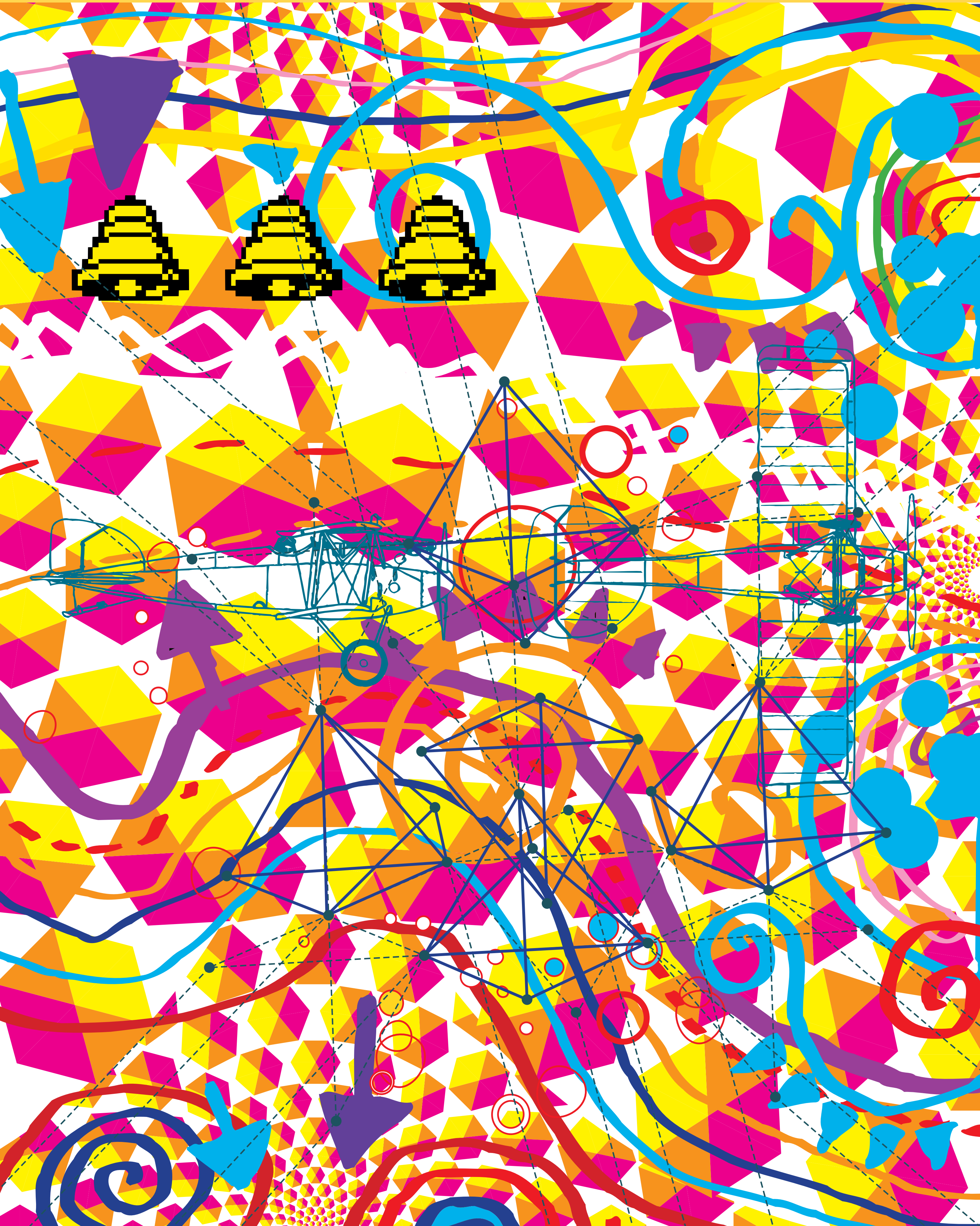
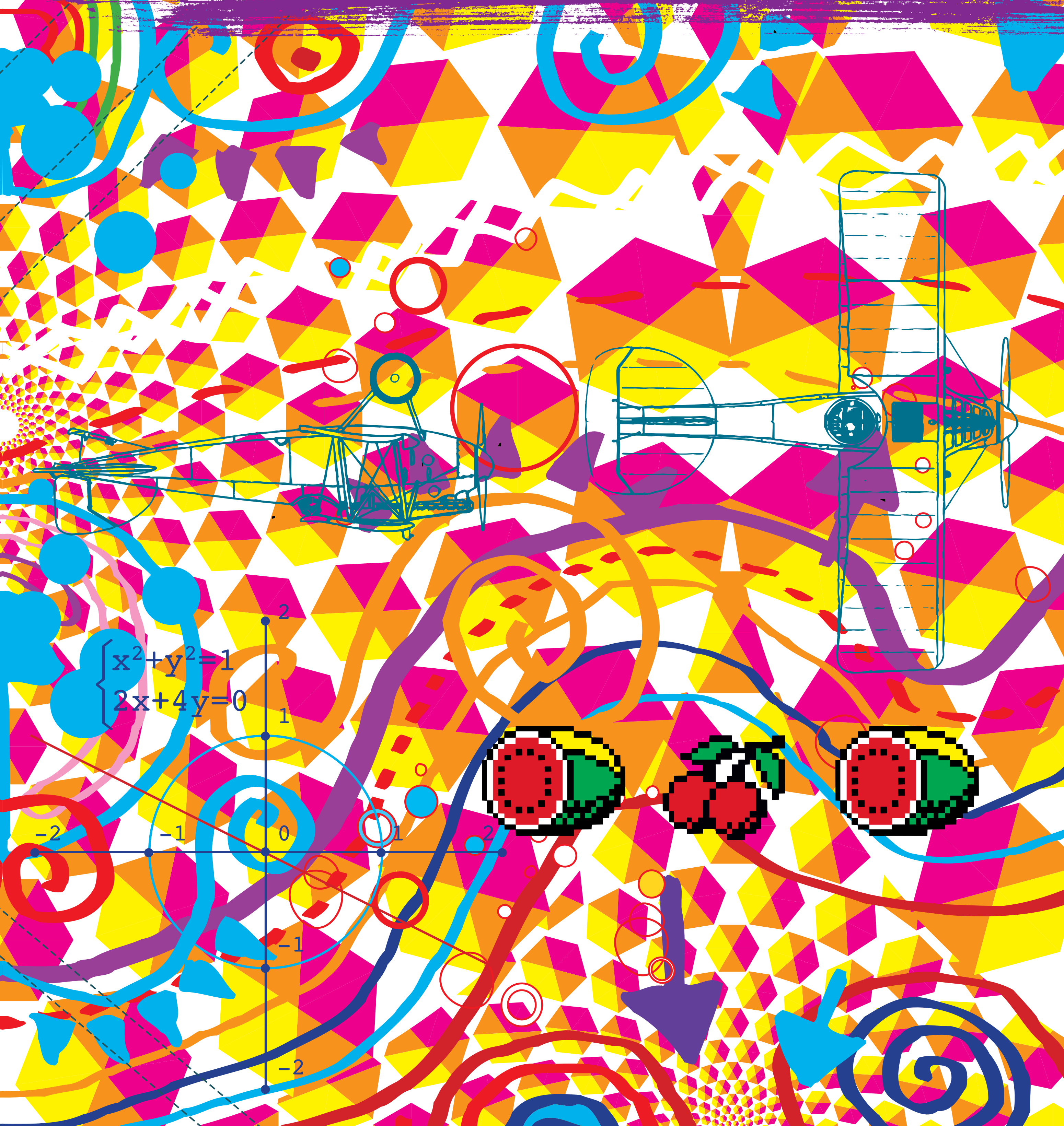


BLOQUE 5



SECUENCIA 30

Sistemas de ecuaciones

En esta secuencia representarás con letras los valores desconocidos de un problema y las usarás para plantear y resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros.

SESIÓN 1

LAS VACAS Y LOS CHIVOS

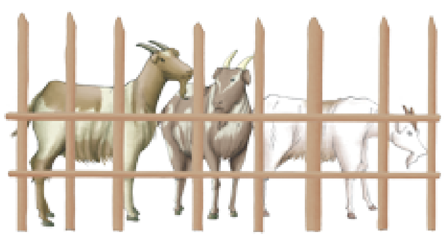
>>> Para empezar

De Diofanto al siglo XXI

El matemático de Alejandría vivió en el siglo III. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental que permitio el desarrollo del álgebra y por primera vez en la historia de las matemáticas griegas presentó de una forma rigurosa el estudio de las ecuaciones de primer y segundo grado, así como de los sistemas de ecuaciones. Por estos hechos se le conoce como el padre del Álgebra.

>>> Consideremos lo siguiente

Don Matías se dedica a la crianza de vacas y chivos. Raúl le pregunta a su padre: — *¿Papá cuántas vacas y chivos tenemos?*—.



El padre le dice:

— *Te voy a dar dos pistas para que encuentres cuántos chivos y cuántas vacas tenemos.*

Primera pista: *en total tenemos* 68 *animales entre chivos y vacas.*

Segunda pista: *el número de chivos es el* ***triple*** *que el número de vacas.*

¿Cuántos animales de cada tipo tiene don Matías?

Chivos: ____________________

Vacas: ____________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Para saber cuántos animales de cada tipo tiene don Matías, se requiere que las parejas de números (número de chivos y número de vacas) cumplan con la primera pista: En total tenemos 68 animales entre chivos y vacas.

a) Completen la Tabla 1 para mostrar algunas parejas de números que cumplan con la primera pista: Consideren que:

- x representa el número de chivos.
- y representa el número de vacas.

Número de chivos: x	Número de vacas: y	Pareja (x, y)
34		(34, ______)
35		
40		
	18	
	17	
60		

Tabla 1

b) ¿Cuál es la ecuación que representa a la primera pista? ____________________

II. Ahora encuentren otras parejas de números que cumplan con la segunda pista dada por don Matías: el número de chivos es el triple que el número de vacas. Completen la siguiente tabla.

Número de chivos: x	Número de vacas: y	Pareja (x, y)
30		
33		
	12	
39		
	20	
	15	
51		

Tabla 2

a) ¿Cuál es la ecuación que representa la segunda pista? ____________________

b) ¿Cuál pareja cumple con las dos pistas? ____________________

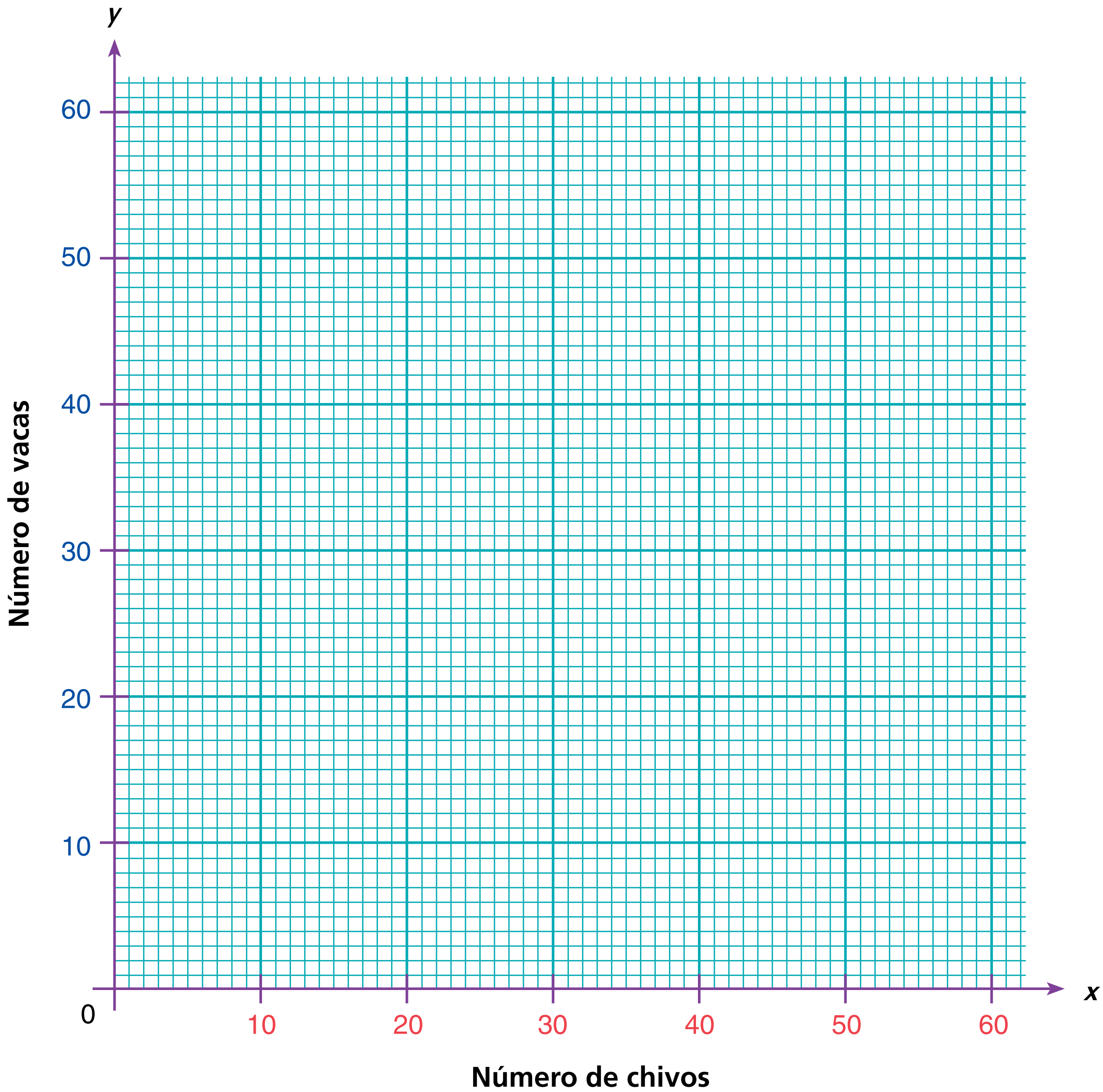
Comparen sus respuestas y comenten:

Además de la pareja que encontraron, ¿existirá otra pareja que cumpla con las dos pistas que dio don Matías a su hijo Raúl?, ¿cuál?

III. Representen en el plano siguiente las parejas que obtuvieron en la Tabla 1 y las parejas que obtuvieron en la Tabla 2.

Con un color unan los puntos que graficaron para la Tabla 1.

Con un color distinto unan los puntos que graficaron para la Tabla 2.



Gráfica 1

¿Qué punto pertenece a las dos rectas que trazaron? (_______ , _______)

Comparen sus respuestas y comenten porqué el punto de intersección de las rectas que trazaron proporciona el número de chivos y vacas que tiene don Matías.

>>> A lo que llegamos

Para resolver un problema que involucre dos incógnitas y dos ecuaciones, hay que buscar **dos valores que satisfagan las dos ecuaciones al mismo tiempo**.

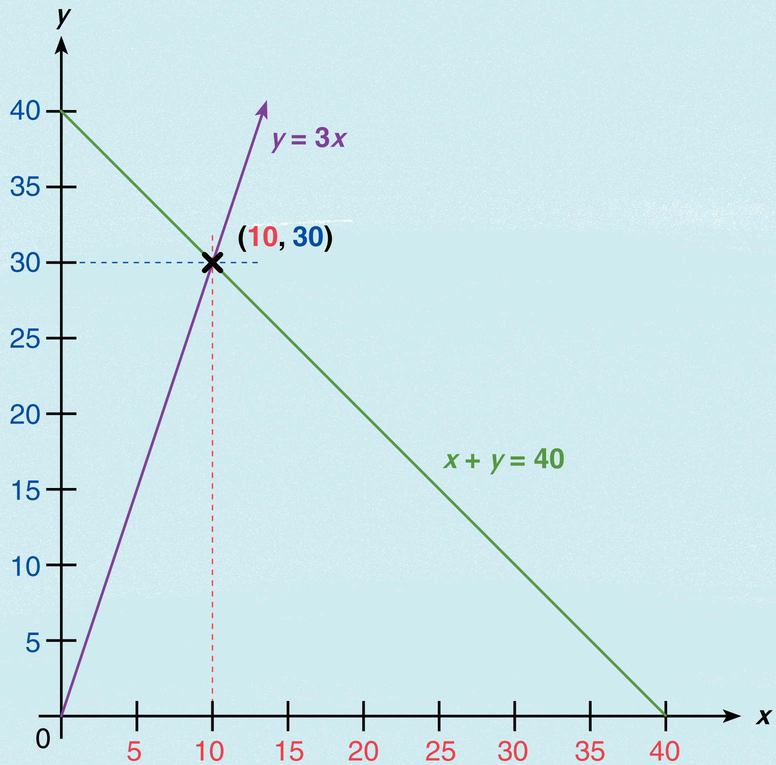
Si se grafican las ecuaciones, el **punto de intersección** de las gráficas corresponde a la solución del problema.

Por ejemplo, si las ecuaciones de un problema son:

Ecuación 1: $x + y = 40$

Ecuación 2: $y = 3x$

Al graficar las ecuaciones se obtienen las siguientes rectas:



El punto de intersección de las rectas corresponde a la solución del problema $x = 10$ y $y = 30$. Estos valores satisfacen al mismo tiempo las dos ecuaciones.

>>> Lo que aprendimos

a) Una bolsa contiene en total 21 frutas, de las cuales algunas son peras y otras son duraznos. ¿Cuántas peras y cuántos duraznos puede haber en la bolsa?

b) Si además sabemos que hay once peras más que duraznos, ¿cuántas peras y cuántos duraznos hay en la bolsa?

SESIÓN 2

LA EDAD DE DON MATÍAS

>>> Para empezar

En la sesión anterior aprendiste a plantear y resolver problemas con dos valores desconocidos por medio de dos ecuaciones. Para ello usaste procedimientos aritméticos y gráficos. En esta sesión plantearás y resolverás sistemas de ecuaciones por el **método algebraico de sustitución**.

>>> Consideremos lo siguiente

La edad de don Matías es igual a cuatro veces la edad de Raúl. La suma de sus edades es 70 años.

¿Cuántos años tiene don Matías? ________________

¿Cuál es la edad de Raúl? ________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Para saber la edad de don Matías y su hijo consideren lo siguiente:

x representa la edad de don Matías;

y representa la edad de Raúl.

a) Completen la ecuación que representa el enunciado: **La edad de don Matías es igual a cuatro veces la edad de Raúl.**

Ecuación 1: $x =$ ____________________

b) Completen la ecuación que representa el enunciado: **La suma de sus edades es 70 años.**

Ecuación 2: ____________________ = 70

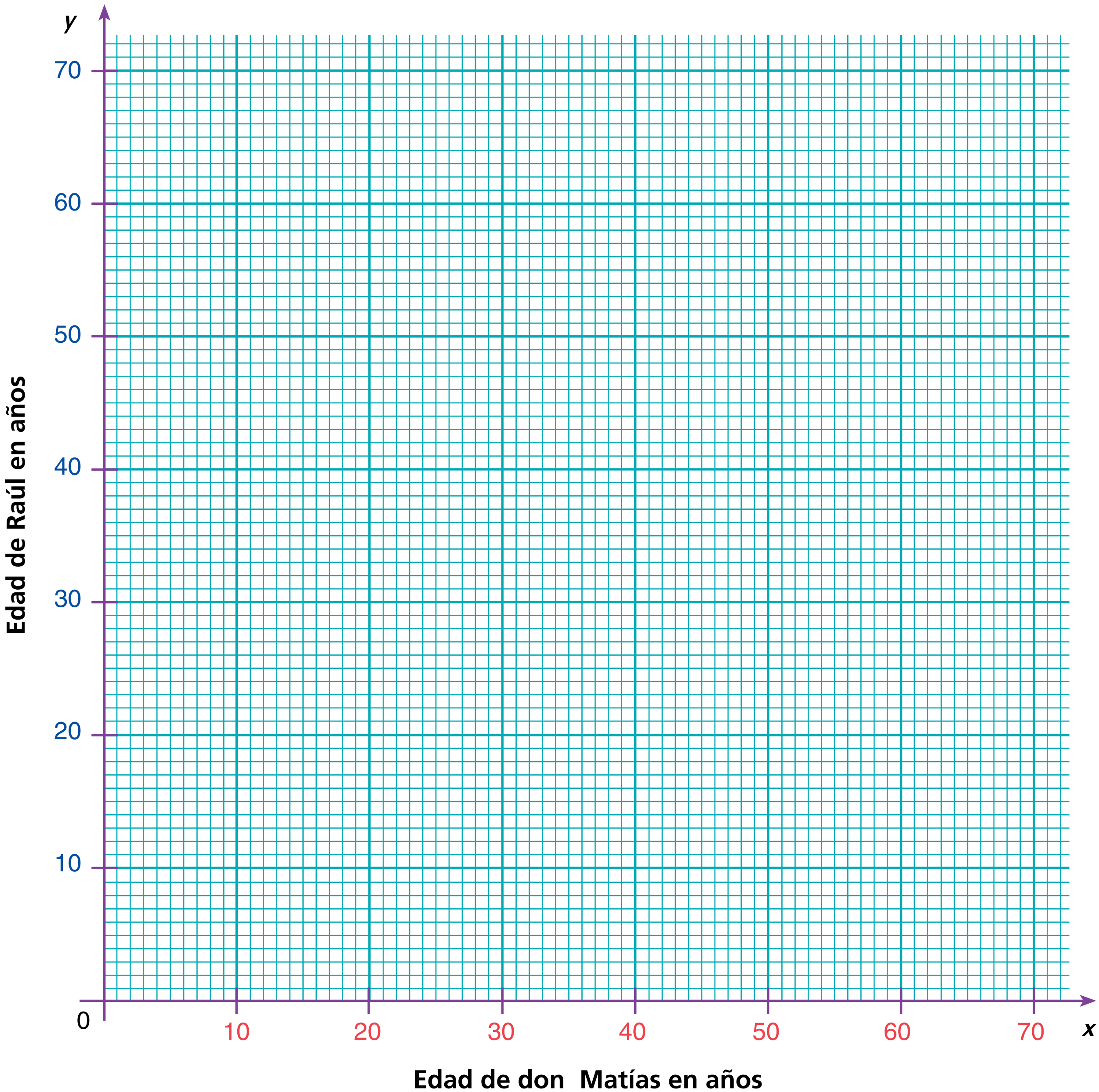
c) ¿Cuál sistema de ecuaciones corresponde a esta situación? ________________

Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3
$x = y + 4$	$y = 4x$	$x = 4y$
$x + y = 70$	$x = 70 - y$	$x + y = 70$

d) ¿Por qué x = **40** , y = **30** no es una solución del sistema que seleccionaron aunque **40 + 30 = 70**? ______________________

e) ¿Por qué x = **40**, y = **10** no es solución del sistema, aunque **40 = 4(10)**? ________

II. a) Con dos colores distintos, grafiquen las rectas que corresponden a las dos ecuaciones del problema. Pueden hacer tablas para encontrar las parejas de puntos que necesiten.



b) ¿En qué punto se intersecan las rectas que trazaron? (______ , ______)

Comparen sus respuestas y comenten porqué el punto de intersección de las rectas que trazaron proporciona la solución al problema de las edades de don Matías y Raúl.

III. A continuación se presenta otra manera de resolver el problema de las edades: el **método de sustitución algebraica**. Realicen las actividades y contesten lo que se pide.

a) La ecuación 1 se puede escribir como: $x = 4y$. Esta ecuación indica que **el valor de x es igual a 4 veces el valor de y.**

En la Ecuación 2, sustituyan x por $4y$ y resuelvan la ecuación que se obtiene después de esta sustitución.

Ecuación 2: $x + y = 70$

Sustitución $(\quad) + y = 70$

b) Como resultado de la sustitución obtuvieron una ecuación de una incógnita.

Resuélvanla y encuentren el valor de y. $y =$ ____________

Encuentren el valor de x. $x =$ ____________

c) Para comprobar los valores que encontraron, sustituyan en las ecuaciones 1 y 2 los valores de x y de y que encontraron.

E1: $x + y = 70$

$(\quad) + (\quad) = 70$

____________ $= 70$

E2: $x = 4y$

$(\quad) = 4(\quad)$

$56 =$ ____________

d) ¿Son verdaderas ambas igualdades que obtuvieron? ____________ ¿Por qué razón?

____

____

Comparen sus respuestas y comenten:

Una vez que encontraron el valor de y, ¿cómo encontraron el valor de x?

IV. En un sistema, no siempre se encuentra despejada una de las incógnitas, por ejemplo:

E1: $x + y = 55$

E2: $y + 2 = 2x$

En este caso, para aplicar el **método de sustitución** es necesario despejar primero una incógnita en una de las ecuaciones.

a) ¿Cuál incógnita despejarían? __________ ¿de cuál ecuación la despejarían? __________

b) Despejen la incógnita que escogieron y solucionen el sistema por sustitución.

$x =$ ____________

$y =$ ____________

c) Comprueben sustituyendo los valores de x y y en las ecuaciones 1 y 2.

Comparen sus respuestas y comenten: ¿en qué se fijaron para elegir la incógnita que conviene despejar?

>>> A lo que llegamos

Una manera de resolver un sistema de ecuaciones es por el **método de sustitución** que, como su nombre lo indica, consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir el resultado en la otra ecuación.

Por ejemplo, para resolver por sustitución el sistema:

E1: $x + y = 95$

E2: $y = 3x - 5$

Se hace lo siguiente:

1. Se sustituye la incógnita y por $3x - 5$ en la Ecuación 1.	E1: $x + y = 95$ $x + (3x - 5) = 95$
2. Se resuelve la ecuación obtenida.	$4x - 5 = 95$ $4x = 95 + 5$ $4x = 100$ $x = 25$
3. Para encontrar el valor de y, se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones. Si se sustituye en la ecuación 2, queda:	E2: $y = 3x - 5$ $y = 3(25) - 5$ $y = 75 - 5$ $y = 70$
4. Se comprueba las solución sustituyendo los valores encontrados de x y de y en las dos ecuaciones.	
E1: $x + y = 95$ $(25) + (70) = 95$ $95 = 95$	E2: $y = 3x - 5$ $(70) = 3(25) - 5$ $70 = 75 - 5$ $70 = 70$

>>> Lo que aprendimos

1. Resuelve el siguiente problema usando un sistema de ecuaciones.

Hoy fue el cumpleaños de Mónica, la hija mayor de don Matías. Un invitado a la fiesta le pregunta al papá.

– *¿Cuántos años cumple la muchacha compadre?*

Para ocultar la edad de su hija don Matías le contestó.

– *Las edades de mi hija y su servidor suman* 72 *años. Pero su edad es dos séptimos de la mía.*

a) ¿Cuantos años tiene la hija de don Matías? ______________

b) ¿Cuántos años tiene don Matías? ______________

2. Resuelve por el método de sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) E1: $2x - 8y = 2$

E2: $x = -4y$

b) E1: $2m + n = 4$

E2: $m - 2n = 7$

SESIÓN 3

COMPRAS EN EL MERCADO

>>> Para empezar

En esta sesión aplicarás el *método de suma o resta* para resolver un sistema de ecuaciones.

>>> Consideremos lo siguiente

Don Matías fue al mercado a vender gallinas y conejos. Doña Lupe le compró **5** gallinas y **3** conejos y pagó por ellos **$425.00**. Don Agustín le compró **3** gallinas y **3** conejos y pagó **$309.00**.

Contesten lo que se les pide a continuación para plantear y resolver este problema mediante un sistema de ecuaciones. Usen la letra x para representar el precio de una gallina y la letra y para el precio de un conejo.

a) Completen la ecuación que representa lo que compró Doña Lupe:

E1: ____________________ **= 425**

b) Completen la ecuación que representa lo que compró Agustín:

E2: ____________________ **= 309**

Resuelvan el sistema de ecuaciones y contesten:

c) ¿Cuál es el precio de cada gallina? $ _______________

d) ¿Cuál es el precio de cada conejo? $ _______________

Verifiquen sus soluciones.

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. ¿Cuál de los siguientes sistemas corresponde al problema anterior?

____

Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3
E1: $x + y = 425$	E1: $8xy = 425$	E1: $5x + 3y = 425$
E2: $x + y = 309$	E2: $6xy = 309$	E2: $3x + 3y = 309$

Comparen el sistema que seleccionaron y comenten porqué lo escogieron.

II. Cuando en ambas ecuaciones de un sistema una incógnita tiene el mismo coeficiente, conviene aplicar el **método de suma o resta** para eliminarla y simplificar el sistema. Contesten lo que se les pide para aplicar este método.

a) En el sistema correspondiente al problema de las gallinas y los conejos, ¿cuál incógnita tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones? __________________;
¿qué coeficiente tiene? ____

b) Resten las ecuaciones 1 y 2 para eliminar a la incógnita que tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones. Completen.

E1: __________ **+** __________ **= 425**

– E2: __________ **+** __________ **= 309**

__________ **+** __________ **= 116**

c) Encuentren el valor de x en la ecuación que obtuvieron. $x =$ ______

d) Encuentren el valor de y. $y =$ ______

e) Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y comprueben si los valores que encontraron para x y para y satisfacen las condiciones del problema planteado.

Gastos de doña Lupe		Gastos de don Agustín	
5 gallinas de $ ______	cada una = $ ______	**3** gallinas de $ ______	cada una = $ ______
3 conejos de $ ______	cada una = $ ______	**3** conejos de $ ______	cada uno = $ ______
	Total $ ______		Total $ ______

Comparen sus respuestas.

III. Cuando en ambas ecuaciones los coeficientes de una misma incógnita sólo difieren en el signo, también conviene aplicar el **método de suma o resta**. Por ejemplo, para resolver el sistema:

$$\text{E1: } \mathbf{5x + 3y = 425}$$

$$\text{E2: } \mathbf{3x - 3y = 39}$$

conviene **sumar** las dos ecuaciones para eliminar los términos **+ 3**y y **– 3**y y simplificar el sistema.

a) Sumen las ecuaciones 1 y 2. Completen.

$$\begin{array}{llcccccc} & \text{E1:} & \mathbf{5x} & + & \mathbf{3y} & = & \mathbf{425} \\ + & \text{E2:} & \mathbf{3x} & - & \mathbf{3y} & = & \mathbf{39} \\ \hline & & \_\_\_\_ & + & \_\_\_\_ & = & \_\_\_\_ \end{array}$$

b) Encuentren el valor de x en la ecuación que obtuvieron. $x =$ ______

c) Encuentren el valor de y. $y =$ ______

d) Verifiquen su solución sustituyendo en ambas ecuaciones los valores de x y de y que encontraron.

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Cuando en las dos ecuaciones de un sistema los **coeficientes** de una misma incógnita **son iguales o sólo difieren en el signo**, conviene aplicar el **método de suma o resta**.

Por ejemplo, para resolver el siguiente sistema.

E1: $5x + \cancel{2y} = 70$

E2: $3x - \cancel{2y} = -14$

$8x + 0y = 56$

Se **suman** uno a uno los **términos** de las dos ecuaciones y se cancelan los términos que tienen y.

$8x = 56$

$x = 7$

Se resuelve la ecuación obtenida y se encuentra el valor de x.

E1: $5x + 2y = 70$

$5(7) + 2y = 70$

$2y = 70 - 5(7)$

$2y = 35$

$y = 17.5$

En cualquiera de las ecuaciones, se sustituye el valor obtenido para x, se resuelve la ecuación resultante y se encuentra el valor de y.

La solución se verifica sustituyendo los valores de x y de y en ambas ecuaciones.

>>> Lo que aprendimos

1. Plantea y resuelve en tu cuaderno un sistema de ecuaciones para solucionar el problema siguiente:

   Toño y Paty compraron en una tienda cuadernos y lápices. Todos los cuadernos y lápices que se compraron son iguales entre sí.

   Por 3 cuadernos y 2 lápices, Paty pagó \$54.

   Por 5 cuadernos y 4 lápices, Toño pagó \$92.

   a) ¿Cuál es el precio de cada cuaderno? \$ ____________________

   b) ¿Cuál es el precio de cada lápiz? \$ ____________________

2. Resuelve por el método de suma o resta los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) E1: $2x - 8y = -8$
      E2: $3x - 8y = -10$

   b) E1: $4m + 3n = -1$
      E2: $6m - 6n = -5$

SESIÓN 4

LA IGUALACIÓN

>>> Para empezar

En esta sesión utilizarás el **método de igualación** para resolver un sistema de ecuaciones.

>>> Consideremos lo siguiente

Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$E1: y = 4x + 13$$

$$E2: 2x - 3 = y$$

$x =$ _______, $y =$ _______

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Una manera de resolver un sistema de ecuaciones cuando la **misma incógnita está despejada** en las dos ecuaciones consiste en aplicar el **método de igualación**. Para eso hay que **igualar** las dos expresiones algebraicas que son equivalentes a la incógnita despejada.

a) ¿Qué ecuación se obtiene al **igualar** las dos expresiones algebraicas equivalentes a la incógnita y?

$$E1: y = 4x + 13$$

$$E2: 2x - 3 = y$$

_______ = _______

Resuelvan la ecuación que obtuvieron.

b) ¿Cuál es el valor de x? _______, ¿cuál es el valor de y? _______

c) Verifiquen sus soluciones sustituyendo los valores que encontraron en las dos ecuaciones originales.

Comparen sus soluciones.

II. Encuentren el sistema de ecuaciones que corresponda al problema siguiente:

Doña Lupe fue a comprar queso. Por 2 *quesos de vaca y* 3 *quesos de cabra pagó* \$300.00. *Si un queso de vaca vale* \$30.00 *menos que un queso de cabra, ¿cuánto vale una pieza de cada tipo de queso?*

Usen las letras x y y para representar las incógnitas del problema.

x: precio de un queso de vaca.

y: precio de un queso de cabra.

a) ¿Qué ecuación representa el enunciado: **por 2 quesos de vaca y 3 quesos de cabra pagó $300.00?**

E1: ____________________

b) ¿Qué ecuación representa el enunciado: **un queso de vaca vale $30.00 menos que un queso de cabra?**

E2: ____________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

Cuando en un sistema la **misma incógnita está despejada** en las dos ecuaciones, conviene aplicar el **método de igualación**. Para eso hay que igualar las expresiones algebraicas dadas en el despeje.

<table>
<tr><td colspan="2">Por ejemplo, para resolver por igualación el sistema:
E1: $x = \frac{75 - 3y}{2}$
E2: $x = 25 + y$</td></tr>
<tr><td>1. Se igualan las expresiones obtenidas mediante el despeje para la incógnita x.</td><td>$\frac{75 - 3y}{2} = 25 + y$</td></tr>
<tr><td>2. Se resuelve la ecuación para obtener el valor de y.</td><td>$75 - 3y = 2\ (25 + y)$
$75 - 3y = 50 + 2y$
$75 - 50 = 2y + 3y$
$25 = 5y$
$5 = y$</td></tr>
<tr><td>3. Para encontrar el valor de x, se sustituye el valor de y en cualquiera de las ecuaciones. Por ejemplo, sustituyendo en la ecuación 2 queda:</td><td>$x - y = 25$
$x - (5) = 25$
$x = 25 + 5$
$x = 30$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Se comprueba las solución sustituyendo los valores encontrados de x y de y en las dos ecuaciones.</td></tr>
</table>

III. Algunas veces, antes de aplicar el **método igualación** hay que despejar alguna de las incógnitas. Realicen las siguientes actividades para resolver por igualación el sistema:

E1: $2x + 3y = 300$

E2: $x = y - 30$

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones se obtiene al despejar la incógnita x de la ecuación 1? Subráyenla.

- $x = (300 - 3y) - 2$
- $x = 150 - 3y$
- $x = \frac{300 - 3y}{2}$

b) Igualen las expresiones que obtuvieron para la incógnita x. Completen la ecuación.

$$\_\_\_\_\_\_ = y - 30$$

Resuelvan la ecuación que se obtiene.

c) ¿Cuánto vale x? ______

d) ¿Cuánto vale y? ______

e) Comprueben sus soluciones sustituyendo en las dos ecuaciones originales los valores que encontraron.

Comparen sus respuestas y comenten cómo resolverían un sistema de ecuaciones por el **método de igualación**, cuando no está despejada ninguna incógnita en las ecuaciones.

>>> Lo que aprendimos

Resuelve por el método de igualación los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) E1: $c = \frac{10 - b}{2}$

E2: $c = \frac{6 + b}{2}$

b) E1: $m = \frac{7n - 4}{8}$

E2: $m = \frac{3n + 6}{6}$

c) E1: $r = \frac{-3s - 1}{4}$

E2: $6r - 6s = -5$

LO QUE APRENDIMOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

SESIÓN 5

1. Selecciona el método por el que resolverías cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y escribe la razón por la que lo harías.

Sistema de ecuaciones	Método (sustitución, suma o resta, igualación)	Razón por la que seleccionas el método
$a + b = 20$ $a - b = 5$		
$c = 3d + 5$ $3c + 2d = 59$		
$m = 2 + n$ $m = -4 + 3n$		
$3x + 2y = 22$ $5x + 2y = 30$		
$r = \frac{-3s - 1}{4}$ $r + 3s = 20$		

Comparen sus respuestas y comenten en qué circunstancias conviene usar cada método para resolver un sistema de ecuaciones.

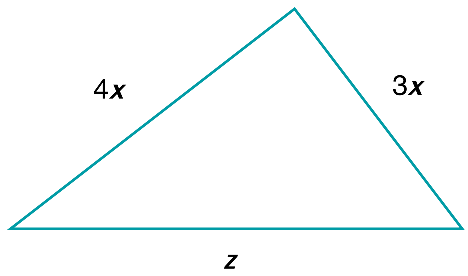
2. Plantea un sistema de ecuaciones para cada uno de los siguientes problemas y resuélvelo por el método que consideres apropiado.

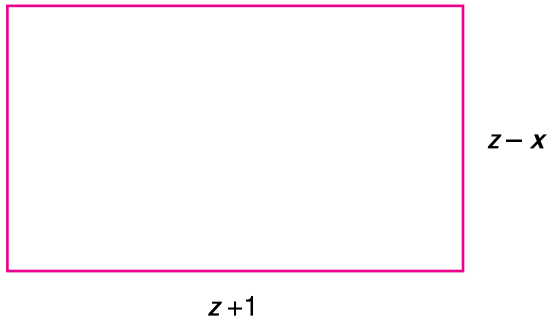
   a) La suma de dos números es 72. Si el triple de uno de los números menos el otro número es 16, ¿cuáles son esos números? ____________________

   E1: ____________________

   E2: ____________________

b) El perímetro del triángulo es 14.4 cm y el del rectángulo es 23.6 cm, ¿cuánto valen x y z?





E1: ______________________

E2: ______________________

$x =$ ______________________, $z =$ ______________________

c) Un padre y su hijo ganan \$15 000.00 al mes. ¿Cuánto gana cada uno si el padre percibe \$3 600.00 más que el hijo?

E1: ______________________

E2: ______________________

El padre gana: ______________________ al mes.

El hijo gana: ______________________ al mes.

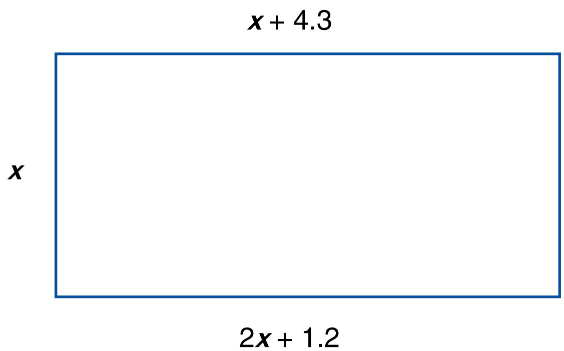
d) En un rectángulo el largo excede por 1.2 cm al doble del ancho; además, el largo mide 4.3 cm más que el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

E1: ______________________

E2: ______________________

Ancho: ______________________ cm.

Largo: ______________________ cm.



e) El maestro Juan compró 12 balones, unos de fútbol y otros de básquetbol; los de fútbol valen $95.00 y los de básquet $120.00, ¿cuántos balones compró para cada deporte si en total pagó $1 265.00?

E1: ______________________

E2: ______________________

Balones de básquetbol que se compraron: ______________________

Balones de fútbol que se compraron: ______________________

Comparen sus respuestas y los procedimientos que utilizaron en cada problema. Comenten por qué seleccionaron cierto método de resolución en cada sistema de ecuaciones.

3. Para conocer más ejemplos de la solución de problemas mediante sistemas de ecuaciones pueden ver el programa ***Resolución de sistemas de ecuaciones***.

>>> Para saber más

Sobre resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado consulta:
http://descartes.cnice.mecd.es/
RUTA 1: Aplicaciones ⟶ Álgebra ⟶ Ecuaciones y sistemas de ecuaciones ⟶ Resolución de sistemas de ecuaciones ⟶ Método de Sustitución.
RUTA 2: Aplicaciones ⟶ Álgebra ⟶ Ecuaciones y sistemas de ecuaciones ⟶ Resolución de sistemas de ecuaciones ⟶ Método de Reducción.
[Fecha de consulta: 24 de agosto de 2007].
Proyecto Descartes, Ministerio de Educación y Ciencia, España.

SECUENCIA 31

Traslación, rotación y simetría central

En esta secuencia determinarás las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. Construirás y reconocerás diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

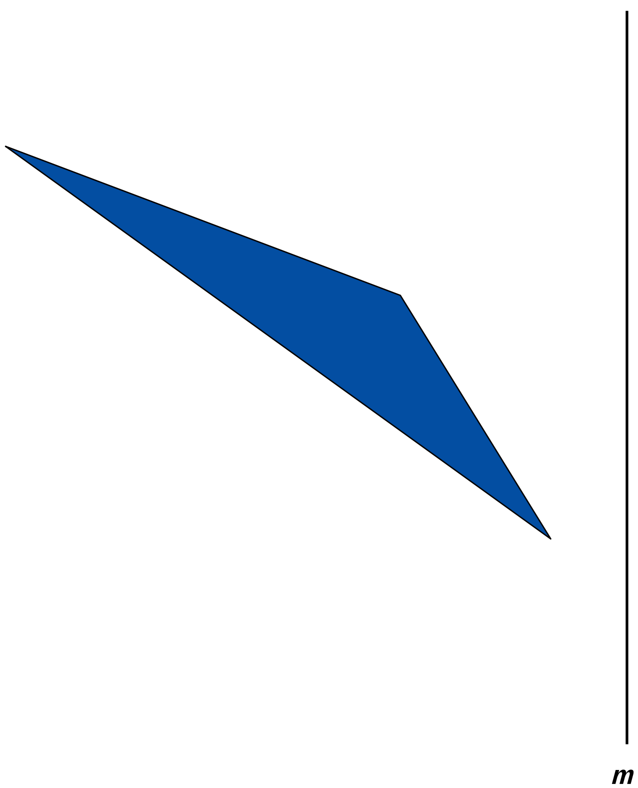
SESIÓN 1

¿HACIA DÓNDE ME MUEVO?

>>> Para empezar

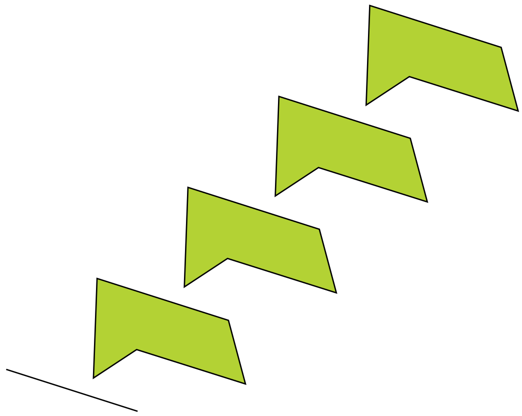
En la secuencia 5 de tu libro **Matemáticas I, volumen I** construiste figuras simétricas con respecto a un eje. Estudiaste que un punto es simétrico a otro con respecto a una recta si se cumple que ambos puntos equidistan de la recta y el segmento que los une es perpendicular a ella. Cuando se traza el simétrico de una figura con respecto a un eje, se conservan las longitudes y los ángulos de la figura original.

Traza el simétrico del triángulo con respecto a la recta ***m***. Utiliza tus instrumentos geométricos



>>> Consideremos lo siguiente

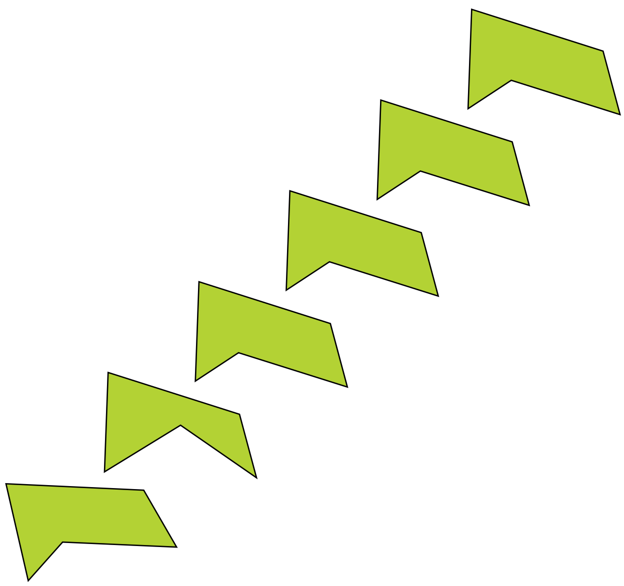
El siguiente dibujo está incompleto. Debe haber 6 figuras iguales. Planeen y lleven a cabo una manera de terminarlo. Utilicen sus instrumentos geométricos.



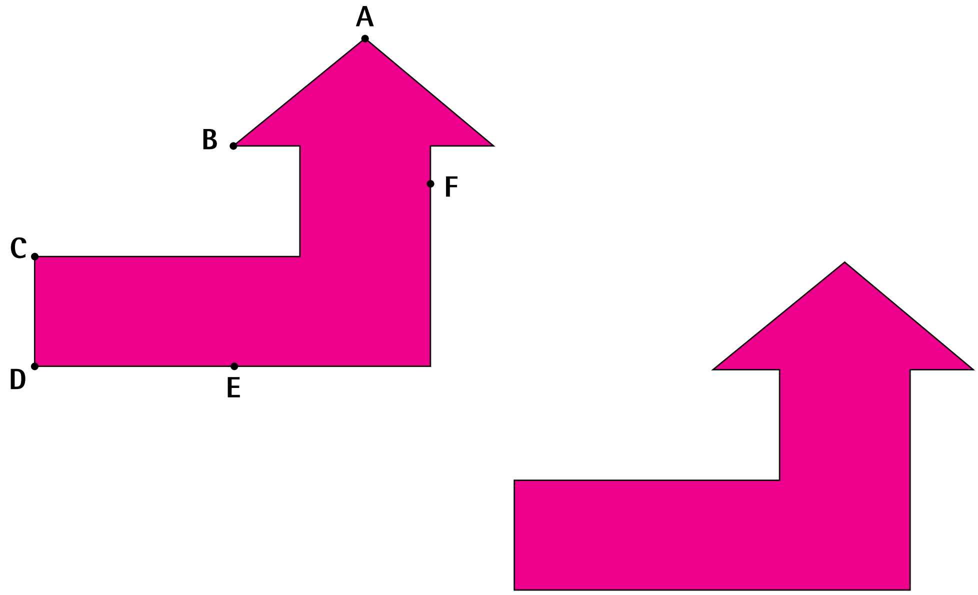
Comparen sus respuestas. Comenten con los otros equipos el procedimiento que emplearon para terminar el dibujo.

>>> Manos a la obra

I. Este dibujo está mal terminado. Explica por qué.



II. Responde las preguntas.



a) Encuentra el vértice que corresponde al vértice **A** y el que corresponde al vértice **B** en la otra figura, nómbralos **A'** y **B'**, respectivamente. Usa tu regla para unir **A** con **A'** y **B** con **B'**, al hacerlo obtienes los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$. Anota en la figura la distancia entre **A** y **A'** y entre **B** y **B'**.

b) Si prolongamos los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, ¿las rectas que se obtienen son paralelas o perpendiculares? ______________________

c) Encuentra los vértices correspondientes a los vértices **C**, **D**, **E**, y **F**. Nómbralos **C'**, **D'**, **E'**, y **F'**, respectivamente. Anota en la figura la distancia entre **C** y **C'**, entre **D** y **D'**, **E** y **E'**, y entre **F** y **F'**.

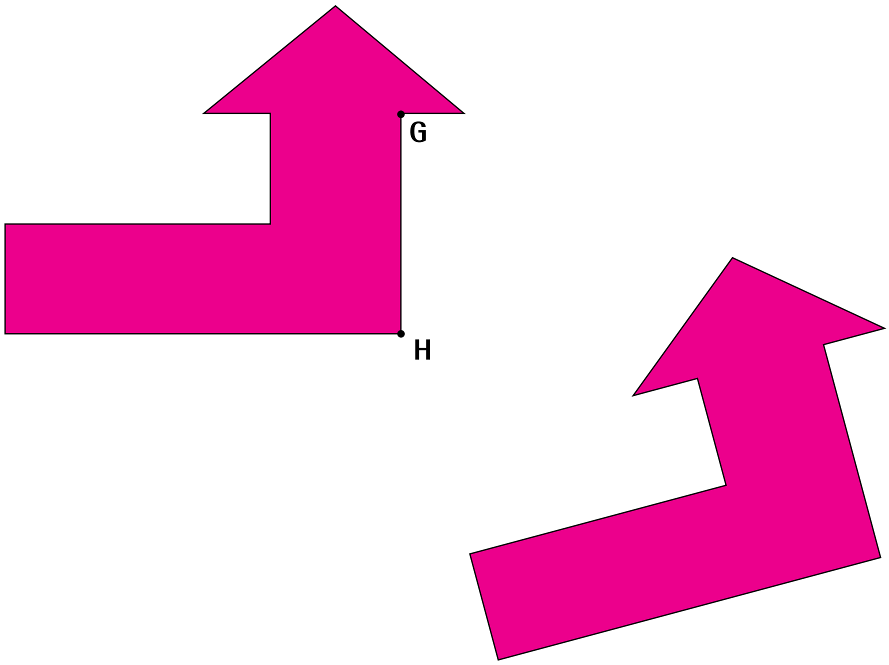
d) ¿Cuál es el lado correspondiente al lado **AB**? ______________________

e) ¿Cuál es el lado correspondiente al lado **CD**? ______________________

f) Si prolongamos el lado **AB** y su correspondiente lado en la otra figura, ¿cómo son, entre sí, las rectas que se obtienen? ______________________

g) Si prolongamos el lado **CD** y su correspondiente lado en la otra figura, ¿cómo son, entre sí, las rectas que se obtienen? ______________________

III. El siguiente dibujo cambió un poco. Encuentra los vértices correspondientes a los vértices **G** y **H**. Nómbralos **G′** y **H′**, respectivamente.



a) Anota en la figura la distancia entre **G** y **G′** y entre **H** y **H′**.

b) Traza los segmentos $\overline{GG'}$ y $\overline{HH'}$. Si las prolongamos, ¿las rectas que se obtienen son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos? ____________________

c) ¿Cuál es el lado correspondiente al lado **GH**? __________

d) Si prolongamos el lado **GH** y su correspondiente lado en la otra figura, ¿las rectas que se obtienen son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos? __________

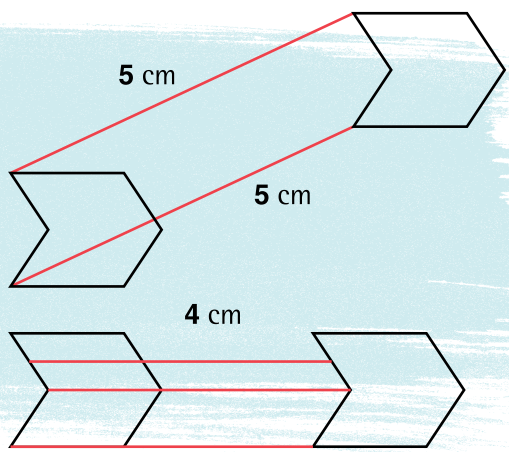
____

Comparen sus respuestas.

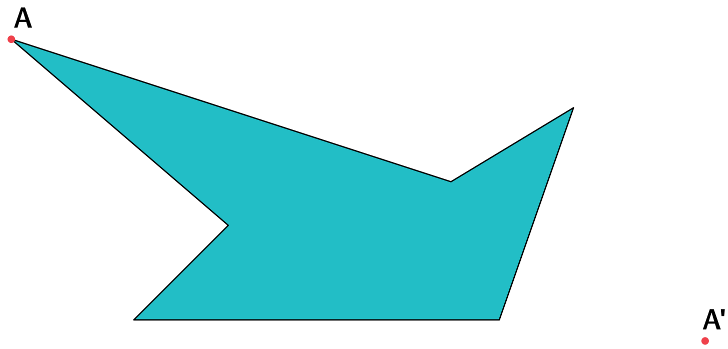
>>> A lo que llegamos

Una figura es una traslación de otra si los segmentos que unen dos puntos de la figura con sus correspondientes puntos en la otra, tienen la misma medida y son paralelos entres sí o son la misma recta.

Al prolongar dos lados correspondientes en las figuras se obtiene la misma recta o se obtienen rectas paralelas entre sí



IV. Dibuja una traslación de la siguiente figura utilizando tus instrumentos geométricos; el vértice A' debe ser el correspondiente al vértice A. Escribe el procedimiento que seguiste para trazarla.



Procedimiento: ____________________

____

____

____

____

Comparen sus respuestas. Entre todos escriban en el pizarrón un procedimiento para trasladar figuras utilizando los instrumentos geométricos. Comenten cómo son los lados y los ángulos de la figura trasladada con respecto a la figura original.

>>> A lo que llegamos

Al trasladar una figura se conserva la medida de los lados y de los ángulos de la figura original.

ROTACIONES

SESIÓN 2

>>> Para empezar

La rueda es uno de los inventos más importantes para la humanidad. Piensen en todo lo que se ha transportado con la ayuda de las ruedas. Actualmente muchos transportes (bicis, triciclos, motos, automóviles, camiones, autobuses, metro, aviones) utilizan llantas para trasladarse. En esta sesión vamos a estudiar las rotaciones.

>>> Consideremos lo siguiente

En la siguiente llanta hay una figura dibujada.

- Al girar la llanta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, la figura se va a mover. Traza sobre la llanta la nueva posición de la figura al hacer un giro de 80°.
- La figura que dibujaste no es una traslación de la figura original. Explica por qué

  ____
- ¿De cuánto debe de ser el giro para que la figura vuelva a estar en la misma posición?

  ____

Comparen sus respuestas. Comenten en qué posición queda la figura si se hace un giro de 90°, de 180° y de 270°, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

>>> Manos a la obra

I. Al girar la llanta la figura quedó en la siguiente posición.

Escoge dos vértices, **A** y **B**, en una de las figuras. Encuentra los vértices correspondientes, **A'** y **B'**, en la otra figura. El centro de la llanta nómbralo como punto **C**.

Usa tu regla para unir **A** con **A'** y **B** con **B'**, al hacerlo obtienes los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$. Responde las preguntas.

a) Encuentra las mediatrices de los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$. Prolóngalas hasta que se crucen. ¿En dónde se cruzan? ______________________

b) Mide el ángulo $\angle ACA'$ y el ángulo $\angle BCB'$. ¿Son iguales o son distintos? _______ ____________________________

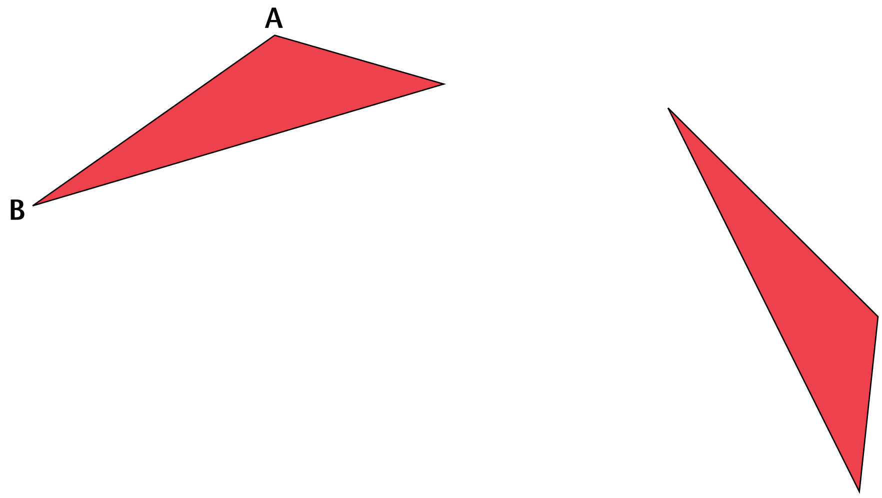
c) ¿Cuánto mide el ángulo del giro que se realizó? ___________

d) Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{A'C}$. ¿Miden lo mismo o distinto? ___________

e) Los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C}$. ¿Miden lo mismo o distinto? ___________

f) Los lados correspondientes y los ángulos correspondientes en las figuras, ¿son iguales o son distintos? ____________________________

II. Los siguientes triángulos se obtuvieron al realizar un giro. Encuentra los vértices correspondientes a los vértices **A** y **B**, nómbralos **A'** y **B'** en el otro triángulo. Encuentra el punto **C** sobre el que se hizo el giro. Calcula de cuánto es el ángulo de giro.



Comparen sus respuestas. Comenten cómo hicieron para encontrar de cuánto fue el giro que se realizó y respondan: ¿cómo son entre sí los lados correspondientes y los ángulos correspondientes en los dos triángulos?

>>> A lo que llegamos

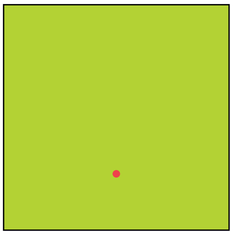
Cuando giramos una figura sobre un punto estamos haciendo una rotación. El punto se llama centro de rotación. La medida de cuánto giramos es el ángulo de rotación. Si la rotación se hace en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el ángulo de rotación es positivo. Si se hace en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo de rotación es negativo.

Al hacer una rotación con un ángulo de rotación de 360°, volvemos a la posición de la figura original.

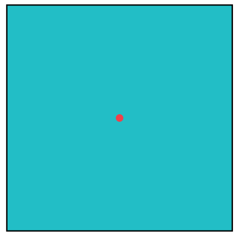
Cuando una figura se obtiene rotando otra, los vértices correspondientes equidistan del centro de rotación y se conserva la medida de los lados y de los ángulos de la figura original.

III. En ocasiones, el centro de rotación está dentro de la figura que se va a rotar. Dibuja la posición de cada figura después de hacer la rotación indicada. En cada caso el centro de rotación está indicado con un punto rojo.

Angulo de rotación –90º



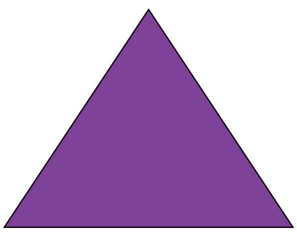
Angulo de rotación 210º



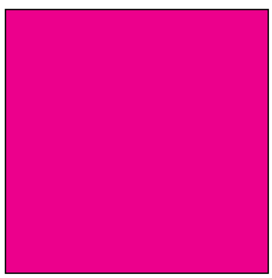
a) Podemos obtener lo mismo al rotar con un ángulo de rotación positivo, que al rotar con un ángulo de –90°. ¿Cuál es ese ángulo? ____________________

b) Podemos obtener lo mismo al rotar con un ángulo de rotación negativo, que al rotar con un ángulo de 210°. ¿Cuál es ese ángulo? ____________________

IV. Copia las siguientes figuras en una hoja (es un triángulo equilátero, un cuadrado y un rectángulo), recórtalas y utiliza un lápiz o una pluma para fijar el centro de rotación dentro de la figura. Encuentra el centro de rotación de manera que se vuelva a la posición inicial al rotar la figura con un ángulo de rotación que mida entre –360° y 360°. Para cada figura indica la medida de todos los ángulos de rotación con los que se vuelve a la posición inicial (considera los ángulos de rotación positivos y los negativos).



____



____

____

Comparen sus respuestas. Comenten si un triángulo isósceles o un rombo pueden ser rotados con un ángulo de rotación que mida entre -360° y 360°, de manera que vuelvan a su posición inicial.

>>> A lo que llegamos

Para rotar un polígono con respecto a un punto C y con un ángulo de rotación *r*:

1. **Por cada vértice se traza la recta que une el vértice con el punto C.**
2. **Utilizando la recta que trazaste, se traza un ángulo igual al ángulo *r*. La recta debe ser uno de los lados del ángulo y el punto C debe ser el vértice del ángulo. Si el ángulo es positivo se traza el lado que falta en sentido contrario a las manecillas del reloj, si el ángulo es negativo se traza en el sentido de las manecillas del reloj.**
3. **Sobre el nuevo lado del ángulo se traslada la distancia entre el vértice del polígono y el punto C.**
4. **Se unen los vértices encontrados para formar el polígono rotado.**

SIMETRÍA CENTRAL

SESIÓN 3

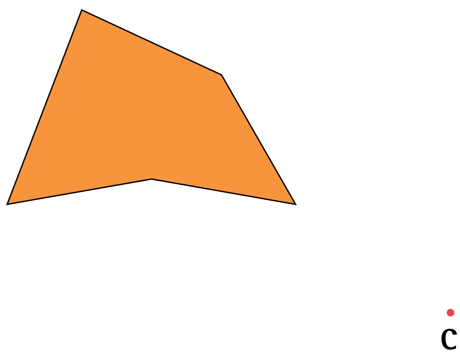
>>> Para empezar

Movimientos en el plano

Ya conoces tres movimientos en el plano: la simetría con respecto a un eje, la traslación y la rotación. En esta sesión conocerás un caso especial de la rotación: la simetría central.

>>> Consideremos lo siguiente

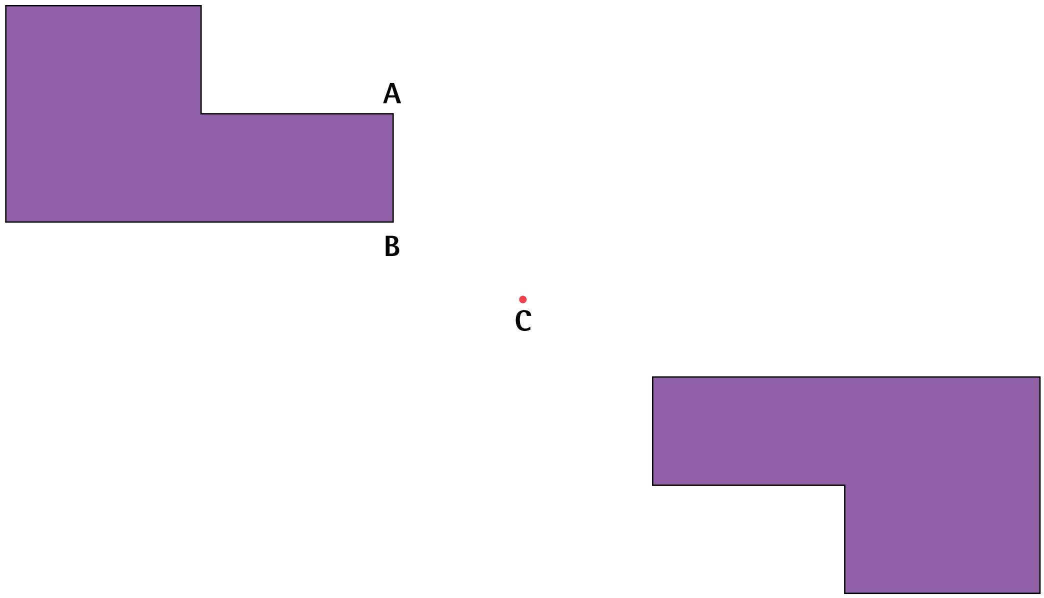
Utiliza tus instrumentos geométricos para trazar la figura que se obtiene al rotar la siguiente figura, con centro en C y ángulo de rotación de 180º.



Comparen sus figuras. Comenten qué procedimiento utilizaron para realizar la rotación.

>>> Manos a la obra

I. Las siguientes figuras se obtuvieron al rotar la figura de la izquierda con un ángulo de rotación de 180° y centro en **C**. Encuentra los vértices correspondientes a los vértices **A** y **B**, nómbralos **A'** y **B'**. Une **A** con **A'** y **B** con **B'**.



II. Responde las preguntas.

a) ¿Por dónde pasa el segmento $\overline{AA'}$? ______________________

b) ¿Cuál es la distancia entre **A** y **C**? ______________________

c) ¿Cuál es la distancia entre **A'** y **C**? ______________________

d) ¿Por dónde pasa el segmento $\overline{BB'}$? ______________________

e) ¿Cuál es la distancia entre **B** y **C**? ______________________

f) ¿Cuál es la distancia entre **B'** y **C**? ______________________

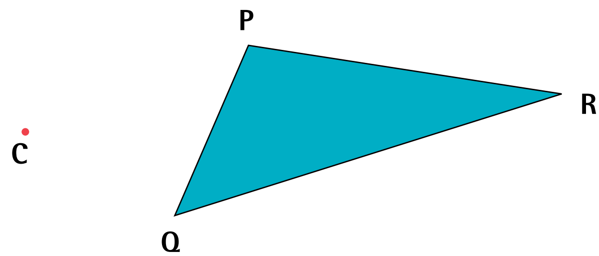
g) Escoge otro vértice y su correspondiente vértice en la otra figura. Únelos y escribe en el dibujo la distancia de cada uno de los dos vértices al centro.

h) Los lados correspondientes y los ángulos correspondientes en las figuras, ¿son iguales o son distintos? ____

>>> A lo que llegamos

A una rotación sobre un centro C con un ángulo de 180°, se le llama una simetría central o simetría con respecto al punto C. Cuando dos puntos A y A' son simétricos con respecto al punto C, A y A' equidistan de C y los tres puntos son colineales.

III. Traza el simétrico del triángulo **PQR** con respecto al punto **C**.



a) ¿Cuáles puntos localizaste para trazar el triángulo simétrico? ______________________

b) Escoge un punto en el triángulo **PQR**, que no sea uno de sus vértices, y localiza su simétrico con respecto al punto **C**.

Comparen sus respuestas. Comenten cómo son los lados y los ángulos de la figura simétrica con respecto a la figura original.

>>> A lo que llegamos

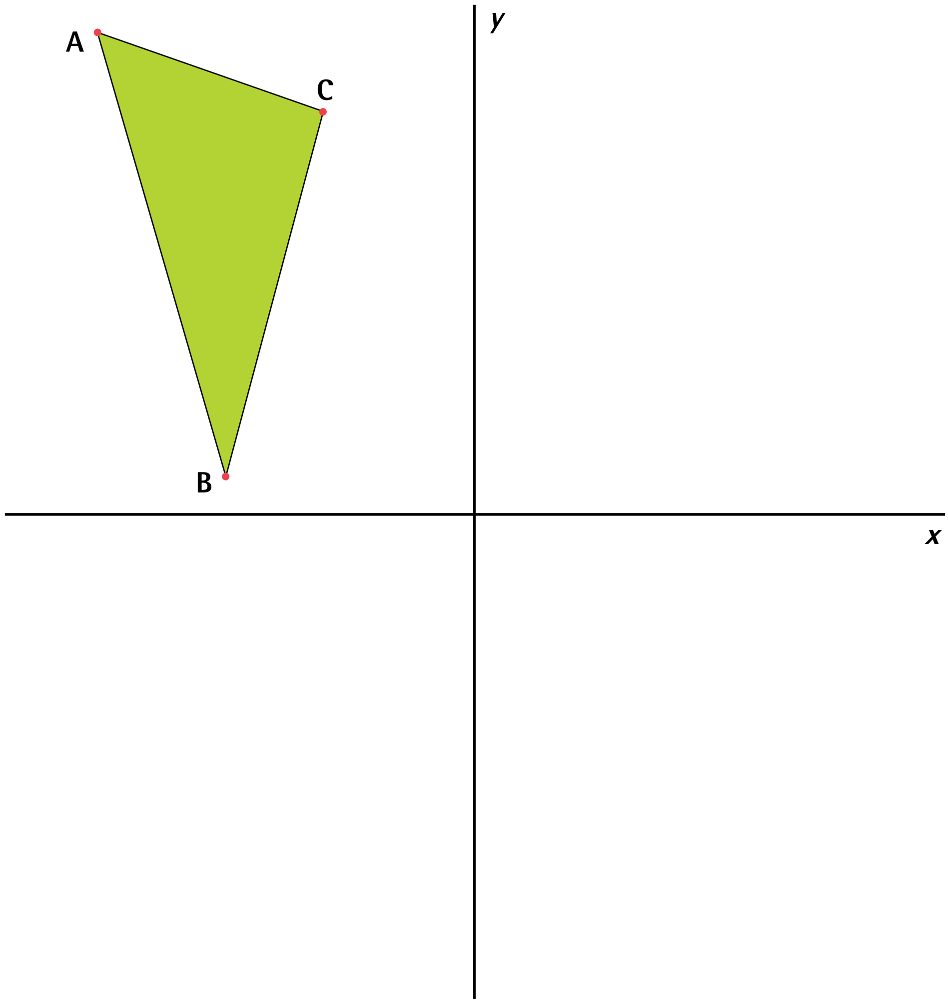
Para construir un polígono simétrico a otro con respecto a un punto:

1. **Por cada vértice se traza la recta que pasa por el centro de simetría.**
2. **Sobre cada recta que se trazó se toma la distancia de cada vértice al centro de simetría y se traslada esa misma distancia del otro lado de la recta correspondiente.**
3. **Se unen los vértices encontrados para formar el polígono.**

Es decir, se traza el simétrico de cada vértice con respecto al centro de simetría y se unen todos los vértices simétricos

Una figura simétrica a otra con respecto a un punto conserva la medida de los lados y de los ángulos de la figura original.

IV. Traza el simétrico del triángulo **ABC** con respecto a la recta ***y***, obtendrás el triángulo **A'B'C'**. Luego traza el simétrico del triángulo **A'B'C'** con respecto a la recta ***x***, obtendrás el tríangulo **A''B''C''**. ¿Qué movimiento habría que hacer para pasar directamente **ABC** a **A''B''C''**?

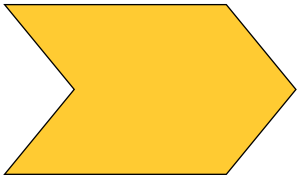


Comparen sus respuestas.

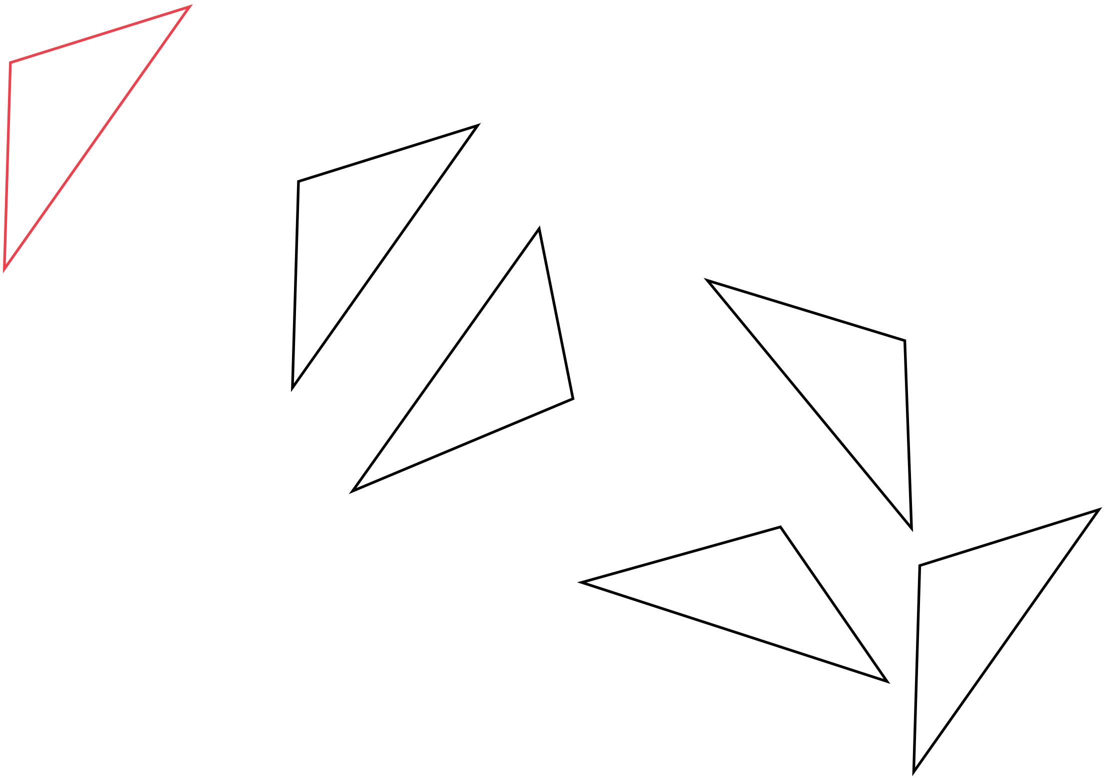
ALGO MÁS SOBRE SIMETRÍAS, ROTACIONES Y TRASLACIONES

>>> Lo que aprendimos

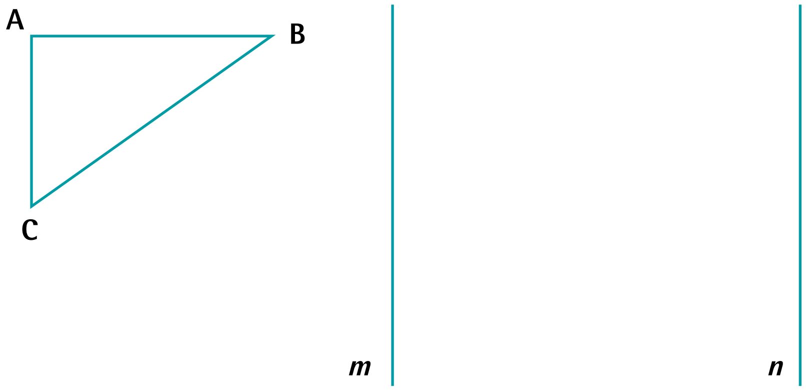
1. Copia la siguiente figura. Haz una traslación y una rotación. Indica la distancia que trasladaste la figura y el ángulo de rotación que utilizaste.



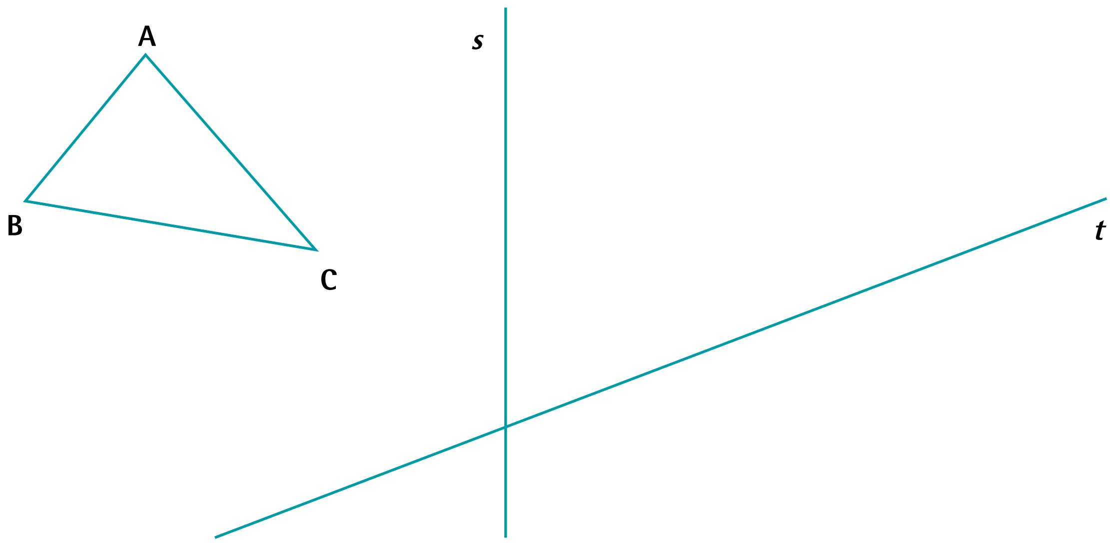
2. Con respecto al triángulo rojo, ilumina de azul los triángulos que sean una traslación, de amarillo los que sean una rotación y de verde los que sean simétricos con respecto a un eje.



3. Traza el simétrico del triángulo **ABC** con respecto a la recta ***m***, obtendrás el triángulo **A'B'C'**. Luego traza el simétrico del triángulo **A'B'C'** con respecto a la recta ***n*** y obtendrás el tríangulo **A''B''C''**. ¿Qué movimiento habría que hacer para pasar directamente **ABC** a **A''B''C''**?



4. Encuentra el simétrico del triángulo **ABC** con respecto a la recta ***s***. Se obtiene el triángulo **A'B'C'**. Luego encuentra el simétrico de **A'B'C'** con respecto a la recta ***t***. ¿Qué movimiento habría que hacer para pasar directamente del triángulo **ABC** al tercer triángulo que obtuviste?



5. Para conocer más propiedades de las rotaciones, traslaciones y simetrías del plano pueden ver el programa ***Rotación y traslación de figuras***.

>>> Para saber más

Sobre movimientos en el plano consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Claudia Gómez. *Una ventana a las formas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

También puedes consultar:
http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Movimientos_en_el_plano/index_movi.htm
Ruta 1: Índice → Traslaciones
Ruta 2: Índice → Giros
Ruta 3: Índice → Simetrías
[Fecha de consulta: 24 de agosto de 2007].
Proyecto Descartes, Ministerio de Educación y Ciencia, España.

Explora las actividades del interactivo *Movimientos en el plano*.

Eventos mutuamente excluyentes

En esta secuencia aprenderás a distinguir en diversas situaciones de azar cuando dos eventos son mutuamente excluyentes o cuando no son mutuamente excluyentes y determinarás la forma en que se calcula su probabilidad de ocurrencia.

SESIÓN 1

¿CUÁNDO DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUYENTES?

>>> Para empezar

¿Cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes?

En la secuencia 27 de tu libro de **Matemáticas II**, **volumen II**, realizaste experimentos aleatorios con monedas y dados para estudiar cuándo dos o más eventos son independientes; en esta sesión realizaremos algunos experimentos y veremos algunas situaciones para distinguir cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes.

Material

- Dos bolsas de plástico oscuras.
- Una hoja blanca.
- Corten la hoja en 12 partes iguales; numeren los papelitos del 1 al 6, de modo que haya dos papelitos con el número 1, dos con el 2, etc. Coloquen en una bolsa un juego de papelitos numerados del 1 al 6 y en la otra los otros 6 papelitos. Marquen una de las bolsas con el número I y la otra con el II.

Ahora, el experimento que van a realizar consiste en *sacar dos papelitos al azar, uno de cada bolsa, y luego los regresan a las bolsas que les corresponden.*

Número de extracción	Bolsa I	Bolsa II	Número de extracción	Bolsa I	Bolsa II
1			6		
2			7		
3			8		
4			9		
5			10		

Recuerden que:

Un **experimento aleatorio** *es todo proceso que produce un resultado u observación que está fuera de control y que depende del azar.*

Al conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio lo llamamos **espacio muestral**, *espacio de eventos o conjunto de resultados. Por ejemplo, al realizar el experimento de lanzar un dado (no trucado), obtenemos el siguiente espacio muestral:* {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Como el espacio muestral es un conjunto, podemos formar subconjuntos de él que llamamos **eventos**. *Por ejemplo, el evento A es obtener un número par al lanzar un dado; los resultados favorables son:* {2,4,6}.

En este experimento aleatorio, ¿cuántos y cuáles son todos los resultados posibles que creen que hay? ____________________

>>> Consideremos lo siguiente

Tres eventos que pueden ocurrir al realizar el experimento de sacar dos papelitos al azar, uno de cada, bolsa anotar los números que salen y regresarlos a las bolsas son:

A: "Los dos papelitos muestran el mismo número".

B: "La suma de los números de los dos papelitos es 7".

C: "La suma de los números de los dos papelitos es 10".

a) Si sacan de la bolsa I el papelito que tiene el número 4, y de la bolsa II el papelito con el número 3, es decir, sacan 4 y 3, ¿a cuál de los tres eventos es favorable este resultado? ____________________

b) ¿Cuál es un resultado favorable al evento C? ____________________

c) Si ocurre que la suma de los números en los dos papelitos es 7, ¿es posible que la suma de esos números también sea 10? __________ Si es así, escriban un ejemplo.

____

d) Si ocurre que los dos papelitos muestran el mismo número, ¿puede ocurrir, al mismo tiempo, que la suma de los números de los dos papelitos sea 10? __________

Si es así, escriban un ejemplo. ____

e) Si ocurre que los dos papelitos muestran el mismo número, ¿puede ocurrir que la suma de esos números sea 7? ______________ Si es así, escriban un ejemplo.

____

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

>>> Manos a la obra

I. Utilicen los resultados que obtuvieron al realizar 10 veces el experimento de sacar dos papelitos al azar, uno de cada bolsa, para completar la siguiente tabla y contestar las preguntas de los incisos.

A: "los dos papelitos muestra el mismo número".	**B:** "la suma de los números de los dos papelitos es 7".	**C:** "la suma de los números de los dos papelitos es 10".

a) De los resultados que obtuvieron, ¿alguno es favorable al evento A? __________

¿Al evento B? ____________________ ¿Y al evento C? ____________________

b) ¿Qué otros resultados creen que podrían obtener que fueran favorables al evento A? ____

c) ¿Qué otros resultados creen que podrían obtener que fueran favorables al evento B? ____

¿Y al evento C? ____

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

II. En el siguiente arreglo rectangular se muestran todos los resultados posibles que pueden ocurrir al sacar dos papelitos al azar, uno de cada bolsa, anotar los números y regresarlos. Marquen con color azul los resultados favorables al evento **A**: "los dos papelitos muestran el mismo número"; con color rojo, los resultados favorables al evento **B**: "la suma de los números de los dos papelitos es 7" y con color verde, los del evento **C**: "la suma de los números de los dos papelitos es 10".

Bolsa II

Bolsa I	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Consideren el arreglo rectangular anterior para responder las siguientes preguntas.

a) En total, ¿cuántos resultados posibles hay para este experimento? ____________

b) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento A? ____________

c) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento B? ____________

¿Y el evento C? ____________

Si se consideran todos los resultados favorables del evento A y del evento B, es decir, todos los resultados que están marcados de color azul o de color rojo, se podría definir un nuevo evento "los dos papelitos muestran el mismo número o la suma de los números de los papelitos es 7".

d) ¿Cuáles resultados son favorables a "los dos papelitos muestran el mismo número o la suma de los números de los dos papelitos es 7"? Escríbanlos en el siguiente recuadro:

Resultados favorables al evento A o al evento B

e) ¿Hay algún resultado que esté marcado de color azul y de color rojo a la vez, es decir, "los dos papelitos muestran el mismo número y la suma de los números de los dos papelitos es 7 al mismo tiempo"? ______________________

¿Cuál o cuáles? ______________________

f) ¿Cuántos resultados favorables diferentes hay para el evento "los dos papelitos muestran el mismo número o la suma de los números es 7"? (Cuenten una sola vez los resultados que se "comparten"). ______________________

g) Sumen el número de resultados favorables del evento A y los del evento B, ¿cuál es la suma? ______________________

h) Si comparan el número de resultados favorables al evento: "los dos papelitos muestran el mismo número o la suma de los números de los dos papelitos es 7", con la suma de los resultados favorables del evento A y los del evento B, ¿es igual o diferente el número de resultados favorables? ______________________

III. Si se realiza el experimento de sacar dos papelitos al azar, uno de cada bolsa, anotar los números que salen y regresarlos a las bolsas otro evento que puede considerarse es "los dos papelitos muestran el mismo número o la suma de los números de los dos papelitos es 10".

a) Ahora, ¿cuáles son los resultados favorables a este nuevo evento?

Resultados favorables al evento A o al evento C

b) ¿Hay algún resultado favorable que se repita, es decir, el resultado es favorable al evento A y al evento C? ______________ ¿Cuál o cuáles? ______________

____

c) ¿Cuántos resultados favorables diferentes hay (cuenten una sola vez los resultados que se repiten)? ______________________

d) Sumen el número de resultados favorables del evento A y el del evento C. ¿Cuánto vale la suma? ______________________

e) ¿Es igual o diferente el número de resultados favorables del evento: "los dos papelitos muestran el mismo número o la suma de los números de los dos papelitos es 10" con el valor de la suma de los resultados favorables del evento A y los del evento C? ______________________

>>> A lo que llegamos

Se dice que dos eventos son **mutuamente excluyentes** si los resultados favorables que se obtienen para cada evento son distintos, es decir, si ocurre uno de los eventos imposibilita la ocurrencia del otro.

Por ejemplo, se lanza un dado (no trucado) y se observa el número de la cara superior que cae. Dos eventos que pueden ocurrir son:

A: "cae número par".

B: "cae número impar".

Los resultados favorables de cada evento son:

A = {2,4,6}

B = {1,3,5}

Como todos los resultados son distintos, los eventos son mutuamente excluyentes.

Esto significa que, si se lanza un dado y ocurre que cae número par, es imposible que ese número sea impar al mismo tiempo.

En cambio, si se define un tercer evento, **C** "cae un múltiplo de 3", sus resultados favorables son: {3,6}.

El evento **A** "cae número par" y el evento **C** "cae múltiplo de 3" **no son mutuamente excluyentes** porque el número 6 es un resultado favorable común a ambos eventos.

IV. Determinen si cada una de las parejas de eventos siguientes son o no eventos mutuamente excluyentes:

a) Se sacan dos papelitos, uno de cada bolsa: "cada papelito muestra el mismo número" y "la suma de los números en los dos papelitos es 7". ______________________

____

b) Se sacan dos papelitos, uno de cada bolsa: "cada papelito muestra el mismo número" y "la suma de los números en los dos papelitos es 10". ____________________

____

c) Se sacan dos papelitos, uno de cada bolsa: "la suma de los números en los dos papelitos es 7" y "la suma de los números en los dos papelitos es 10". __________

____

>>> Lo que aprendimos

1. Define dos eventos diferentes a los que analizaste anteriormente; identifícalos como:

Evento **D**: ______________________________

Evento **E**: ______________________________

a) En tu cuaderno, determina los resultados favorables a cada evento.

b) Reúne los resultados favorables del evento D y los del evento E, ¿cuántos resultados favorables tienen en común? ______________

¿Son los eventos D y E mutuamente excluyentes? ______________

c) Si unes los resultados favorables del evento A y los del evento D, ¿cuántos resultados tienen en común? ______________

¿Son los eventos A y D mutuamente excluyentes? ______________

d) Si unes los eventos B y E, ¿cuántos resultados tienen en común? ______________

¿Son los eventos B y E mutuamente excluyentes? ______________

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Escribe en tu cuaderno los eventos mutuamente excluyentes que sean diferentes a los que tú anotaste.

SESIÓN 2

CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES Y NO EXCLUYENTES

>>> Para empezar

En la sesión anterior aprendiste a distinguir cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes o no son mutuamente excluyentes; en esta sesión aprenderás a calcular la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos eventos.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente tabla muestra el número de personas que laboran en una fábrica. Complétenla.

	Tiempo completo	Medio tiempo	Total por sexo
Mujeres	60	20	
Hombres	80	40	
Total por turno			

Si se selecciona al azar a un trabajador de la fábrica, sean los siguientes eventos:

A: "trabaja tiempo completo".

B: "es hombre".

C: "trabaja medio tiempo y es mujer".

a) Si se selecciona al azar a un trabajador de tiempo completo, ¿puede ocurrir que sea hombre al mismo tiempo? ______

¿Son mutuamente excluyentes los eventos **A** y **B**? ______

b) Si se selecciona al azar a un trabajador de tiempo completo, ¿puede ocurrir que también trabaje medio tiempo? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador seleccionado al azar sea hombre? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador seleccionado al azar trabaje tiempo completo? ______

e) ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador seleccionado al azar trabaje medio tiempo y sea mujer? ______

f) ¿Cuál creen que es la probabilidad de que el trabajador seleccionado trabaje tiempo completo o que trabaje medio tiempo y sea mujer? ______

Recuerden que:
*La probabilidad es un número mayor o igual que **cero** y menor o igual que **1**.*

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten cómo obtuvieron las probabilidades en los incisos c) al f).

>>> Manos a la obra

I. Utilicen la tabla anterior para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas personas trabajan tiempo completo? ______

¿Y cuántas personas trabajan medio tiempo? ______

b) ¿Cuántos trabajadores son mujeres? ______

c) ¿Cuántas personas trabajan medio tiempo y son mujeres? ______

d) En la tabla, ¿qué representa el número 40? ______

e) En total, ¿cuántos trabajadores hay en la fábrica? ______

f) ¿Cuál o cuáles de las siguientes parejas de eventos son mutuamente excluyentes? Márquenlas con una ✓.

- [ ] Se selecciona a un trabajador al azar de la fábrica: "la persona seleccionada trabaja tiempo completo" o "el trabajador seleccionado es mujer".
- [ ] Se selecciona a un trabajador al azar de la fábrica: "la persona seleccionada trabaja tiempo completo" o "el trabajador seleccionado trabaja medio tiempo y es mujer".
- [ ] Se selecciona a un trabajador al azar de la fábrica: "la persona seleccionada es hombre" o "el trabajador seleccionado trabaja medio tiempo y es mujer".

Recuerden que:

Si dos eventos son ***mutuamente excluyentes*** *significa que si ocurre uno no puede ocurrir el otro y no tienen resultados favorables en común.*

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten cómo determinaron que eventos son mutuamente excluyentes.

II. Completen el siguiente arreglo rectangular con las probabilidades que corresponden a cada evento, observen los ejemplos:

	Tiempo completo	Medio tiempo	Total por sexo
Mujeres		$\frac{20}{200} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	
Hombres	$\frac{80}{200} =$		
Total por turno			$\frac{200}{200} = 1$

a) Si se selecciona al azar a un trabajador, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje tiempo completo?

P(trabaja tiempo completo) = P(**A**) =

b) ¿Cuál es la probabilidad del evento **C**?

P(trabaja medio tiempo y es mujer) = P(**C**) = ____________________

c) Si se selecciona al azar a un trabajador, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje tiempo completo y trabaje medio tiempo y sea mujer, es decir, ocurre el evento (**A** y **C**)?

P(trabaja tiempo completo y trabaja medio tiempo y es mujer) = P(**A** y **C**) = _____

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador seleccionado al azar trabaje tiempo completo o trabaje medio tiempo y sea mujer? (No consideren el número de trabajadores que cumple con ambos eventos a la vez).

P(trabaja tiempo completo o trabaja medio tiempo y es mujer) = __________

e) Comparen el valor de la probabilidad que obtuvieron en el inciso d) con la suma de las probabilidades de los incisos a) y b), ¿son iguales o diferentes? __________

Si son diferentes, ¿cuál es la diferencia? ____________________________________

III. Nuevamente, utilicen los valores de la probabilidad que obtuvieron en la tabla de la actividad II del apartado *Manos a la obra* para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas son las personas que trabajan tiempo completo y son hombres a la vez?

____

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador seleccionado al azar trabaje tiempo completo y sea hombre?

P(trabaja tiempo completo y sea hombre) = P(**A** y **B**) = ____________________

c) ¿Cuántas son las personas que trabajan tiempo completo o son hombres? (No consideren el número de trabajadores que cumple con ambos eventos a la vez)

____

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador seleccionado al azar trabaje tiempo completo o sea hombre?

P(trabaja tiempo completo o sea hombre) = P(**A** o **B**) = ____________________

e) Comparen el valor de la probabilidad que obtuvieron en el inciso d) con la suma de la probabilidad del evento "trabaja tiempo completo" y la probabilidad del evento "es hombre", ¿son iguales o diferentes? ____________________________

Si son diferentes, ¿cuál es la diferencia? ____________________________________

f) Comparen esa diferencia con la probabilidad del evento (**A** y **B**) obtenida en el inciso b), ¿son iguales o diferentes? ______________ ¿Por qué consideran que se obtiene esa diferencia? ____

>>> A lo que llegamos

Cuando dos eventos son definidos en un espacio muestral y **son mutuamente excluyentes**, la probabilidad de que ocurra uno u otro de los eventos se obtiene sumando las probabilidades de cada evento. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Cuando dos eventos **no son mutuamente excluyentes**, la probabilidad de que ocurra uno u otro se obtiene sumando las probabilidades de cada evento menos la probabilidad de que ocurran al mismo tiempo. Lo cual se expresa de la siguiente manera:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Esta regla recibe el nombre de **regla de la suma o de la adición.**

El caso especial de esta regla es cuando los eventos son mutuamente excluyentes porque entre los eventos no hay resultados favorables que se "compartan" por lo que no hay doble cuenta de resultados.

SESIÓN 3

MÁS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

>>> Lo que aprendimos

1. Realiza una encuesta con tus compañeros de grupo. Pregúntales:

   ¿Viven en la misma localidad (o colonia) en que se encuentra su escuela?

   Anota también el sexo de cada uno y completa la siguiente tabla.

Alumnos del grupo: ______________

	Vive en la misma localidad		Total
	Sí	No	
Mujeres			
Hombres			
Total			

Si se selecciona al azar a un alumno de tu grupo, y se definen los siguientes eventos:

A: "vive en la misma localidad (o colonia) en que se encuentra la escuela".

B: "es mujer".

C: "no vive en la misma localidad (o colonia) en que se encuentra la escuela".

a) Si se selecciona al azar a un alumno que vive en la misma localidad en que se encuentra la escuela, ¿puede ocurrir que sea mujer al mismo tiempo? ______

b) Si se selecciona al azar a un alumno que vive en la misma localidad en que se encuentra la escuela, ¿puede ocurrir que también no viva en la misma localidad en que se encuentra la escuela? ______

c) De acuerdo con los datos que anotaron en la tabla, ¿cuál o cuáles de las siguientes parejas de eventos son mutuamente excluyentes? Márquenlas con una ✓.

- ☐ Se selecciona al azar a un alumno de tu grupo: "vive en la misma localidad en que se encuentra la escuela" o "el alumno seleccionado es mujer".
- ☐ Se selecciona al azar a un alumno de tu grupo: "vive en la misma localidad en que se encuentra la escuela" o "no vive en la misma localidad en que se encuentra la escuela".
- ☐ Se selecciona al azar a un alumno de tu grupo: "es hombre" o "vive en la misma localidad en que se encuentra la escuela".
- ☐ Se selecciona al azar a un alumno de tu grupo: "es hombre" o "es mujer".

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado al azar sea hombre? ______

e) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado al azar no viva en la misma localidad en que se encuentra la escuela? ______

f) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado al azar viva en la misma localidad en que se encuentra la escuela o no viva en la misma localidad en que se encuentra la escuela y sea mujer? ______

g) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado al azar viva en la misma localidad en que se encuentra la escuela o sea mujer? ______

En la secuencia 9 de tu libro **Matemáticas II, volumen I** resolviste problemas de conteo utilizando tablas, diagramas de árbol y enumeraciones y otras técnicas de conteo. Uno de los problemas que trabajaste en esa secuencia se presentan a continuación.

2. Con los dígitos 2, 4, 8, 5 queremos formar números de tres cifras, en cada número no se puede repetir ninguno de los dígitos. En total, ¿cuántos números podemos formar? Hagan una lista con todos los números, observen los ejemplos.

2	4	5
2	4	8
2	5	4
2	5	8
2	8	4
2	8	5

4	2	5

5	2	4

8	2	4

Si un número de 3 dígitos se escoge de forma aleatoria de todos los números que pueden formarse del conjunto de dígitos anterior (2, 4, 5, y 8), y si se definen los siguientes eventos:

A: "el primero de los 3 dígitos es 5".

B: "el número es múltiplo de 5".

C: "el número es mayor que 800".

D: "el número es múltiplo de 4".

a) ¿Cuántos son los resultados favorables al evento **A**? ____________________

b) ¿Cuáles son los resultados favorables al evento **B**? ____________________

¿Cuántos son los resultados favorables de ese evento? ____________________

c) ¿Cuántos son los resultados favorables al evento **C**? ____________________

d) ¿Cuáles son los resultados favorables al evento **D**? ____________________

¿Cuántos son los resultados favorables de ese evento? ____________________

e) ¿Cuáles de los siguientes eventos son mutuamente excluyentes? Marquen con una ✓.

☐ Se escoge un número de 3 dígitos de forma aleatoria de todos los números que pueden formarse del conjunto de dígitos de 2, 4, 5, y 8 sin repetir: “el número es múltiplo de 5” o “el número es mayor que 800”.

☐ Se escoge un número de 3 dígitos de forma aleatoria de todos los números que pueden formarse del conjunto de dígitos de 2, 4, 5, y 8 sin repetir: “el primero de los 3 dígitos es 5” o “el número es múltiplo de 5”.

- ☐ Se escoge un número de 3 dígitos de forma aleatoria de todos los números que pueden formarse del conjunto de dígitos de 2, 4, 5, y 8 sin repetir: "el número es múltiplo de 5" o "el número es múltiplo de 4".
- ☐ Se escoge un número de 3 dígitos de forma aleatoria de todos los números que pueden formarse del conjunto de dígitos de 2, 4, 5, y 8 sin repetir: "el número es mayor que 800" o "el número es múltiplo de 4".

f) ¿Cuál es la probabilidad del evento (**A** o **B**)? ______________________________

g) ¿Cuál es la probabilidad del evento (**B** o **C**)? ______________________________

h) ¿Cuál es la probabilidad del evento (**B** o **D**)? ______________________________

i) ¿Cuál es la probabilidad del evento (**C** o **D**)? ______________________________

3. Para conocer más situaciones de azar en los que se calcula la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes pueden ver el programa ***Probabilidad y eventos mutuamente excluyentes***.

>>> Para saber más

Sobre otros ejemplos de problemas de eventos mutuamente excluyentes, consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Juego sucio", en *Una ventana a la incertidumbre*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Post Kij, Kjardan. *Esa condenada mala suerte*. México: SEP/Editorial Motino, Libros del Rincón, 2001.

Exploren las actividades de los interactivos *Probabilidad. Eventos mutuamente excluyentes* y *Azar y probabilidad con Logo*.

Representación gráfica de sistemas de ecuaciones

En esta secuencia representarás gráficamente un sistema de ecuaciones lineales y estudiarás la relación entre la intersección de las gráficas y la solución del sistema.

SESIÓN 1

LA FERIA GANADERA

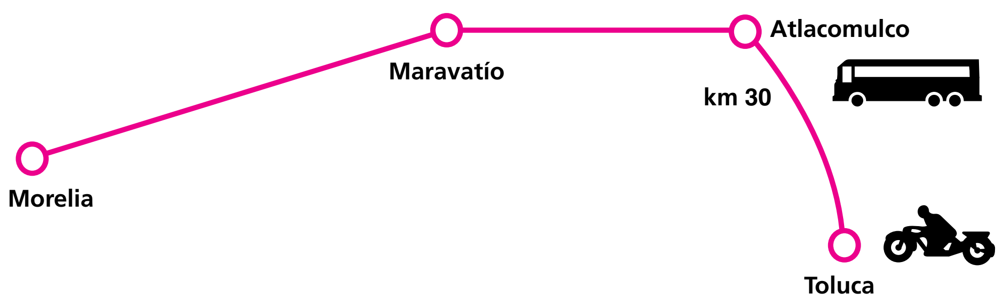
>>> Para empezar

En la secuencia 30 aprendiste a resolver sistemas de ecuaciones por diferentes métodos algebraicos. En esta sesión estudiarás la relación entre la solución de un sistema y la intersección de las rectas que corresponden a las ecuaciones del sistema.

>>> Consideremos lo siguiente

Don Matías va de Toluca a Morelia para asistir a la feria ganadera que se celebrará en la capital del estado de Michoacán. Va en un camión de pasajeros que viaja a velocidad constante de **60** km/h.

A don Matías se le olvidaron unos papeles para la compra de vacas. Uno de sus trabajadores va a intentar alcanzarlo en motocicleta, sale cuando don Matías ya va en el kilómetro **30** de la carretera. La motocicleta viaja a **80** km/h.



¿En qué kilómetro de la carretera Toluca – Morelia, el motociclista alcanzará al camión?

____

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Para resolver este problema, es útil usar álgebra. Usen las letras ***d*** y ***t*** para representar:

d, la distancia recorrida en kilómetros,

t, el tiempo en horas, tomado a partir de que el motociclista sale de Toluca.

Contesten las siguientes preguntas para encontrar las expresiones algebraicas que permiten encontrar la distancia recorrida ***d*** a partir del tiempo ***t***, tanto para el camión como para la motocicleta.

a) La motocicleta va a 80 km/h, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido en **una hora**?

____

b) ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en **2 horas**? _______________________________

c) ¿Cuántos kilómetros recorrerá en ***t*** **horas**? _______________________________

d) Cuando la motocicleta salió de Toluca el camión ya había recorrido **30 km**. ¿En qué kilómetro estaba el camión **una hora** después de que salió el motociclista?

____

e) ¿En qué kilómetro estaba el camión **2 horas** después de que salió el motociclista?

____

f) ¿En qué kilómetro estaba ***t*** **horas** después de que salió el motociclista?

____

Comparen sus respuestas y comenten: ¿porqué la expresión ***d* = 60*t*** no permite encontrar la distancia ***d*** recorrida por el camión después de ***t*** horas de que la motocicleta salió de Toluca?

II. Grafiquen las expresiones algebraicas que encontraron, para eso, realicen lo que se les pide a continuación.

a) Completen las siguientes tablas usando las expresiones de la distancia ***d*** y el tiempo ***t*** que para el camión y la motocicleta.

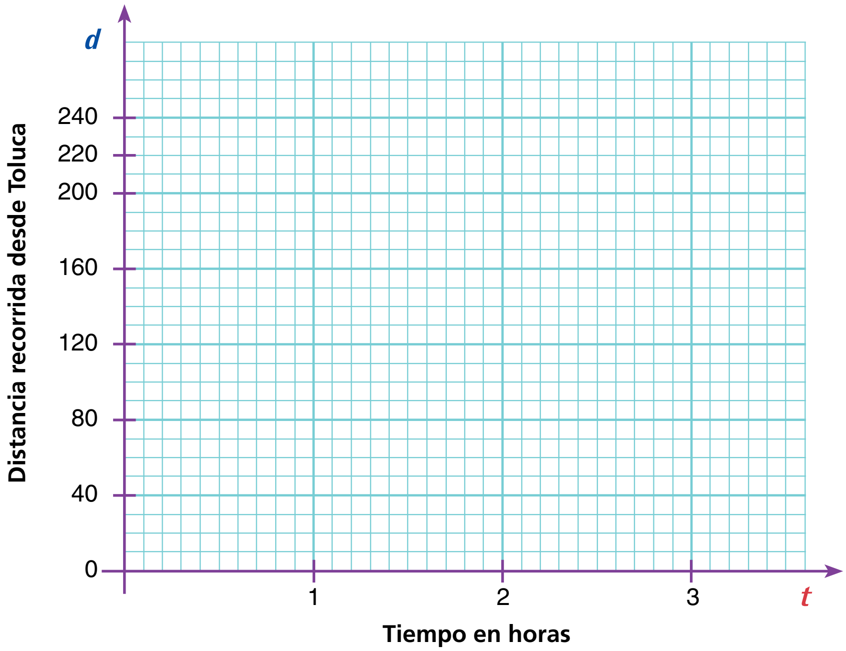
Camión

Expresión: *d* = ______________		
t	***d***	**Punto (*t*, *d*)**
0	30	(0,30)
1		
2		
$2\frac{1}{2}$		

Motocicleta

Expresión: *d* = ______________		
t	***d***	**Punto (*t*, *d*)**
0	0	(0,0)
	80	
2		
$2\frac{3}{4}$		

b) En el siguiente plano cartesiano grafiquen las expresiones para el camión y la motocicleta.



Contesten las siguientes preguntas.

c) ¿Aproximadamente en qué kilómetro de la carretera Toluca - Morelia el motociclista alcanzará a don Matías? ______________________

d) ¿Aproximadamente en cuánto tiempo lo alcanzará? ______________

Comparen sus respuestas y comenten:

Para ubicar con precisión la distancia donde don Matías es alcanzado por el motociclista, es recomendable resolver el sistema de ecuaciones mediante algún método algebraico.

a) ¿Qué método escogerían para resolver este sistema?

b) ¿Por qué razón lo escogerían?

III. Apliquen el método que escogieron y resuelvan el sistema.

a) ¿Cuál es el valor de la incógnita ***t***? ***t*** = ________

b) ¿Cuál es el valor de la incógnita ***d***? ***d*** = ________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿En qué tiempo alcanzará el motociclista a don Matías?

b) ¿En qué kilómetro de la carretera Toluca – Morelia el motociclista alcanza a don Matías?

c) ¿Los valores de ***d*** y ***t*** obtenidos mediante el método que eligieron son iguales o son próximos a los estimados mediante la representación gráfica de las ecuaciones?

>>> A lo que llegamos

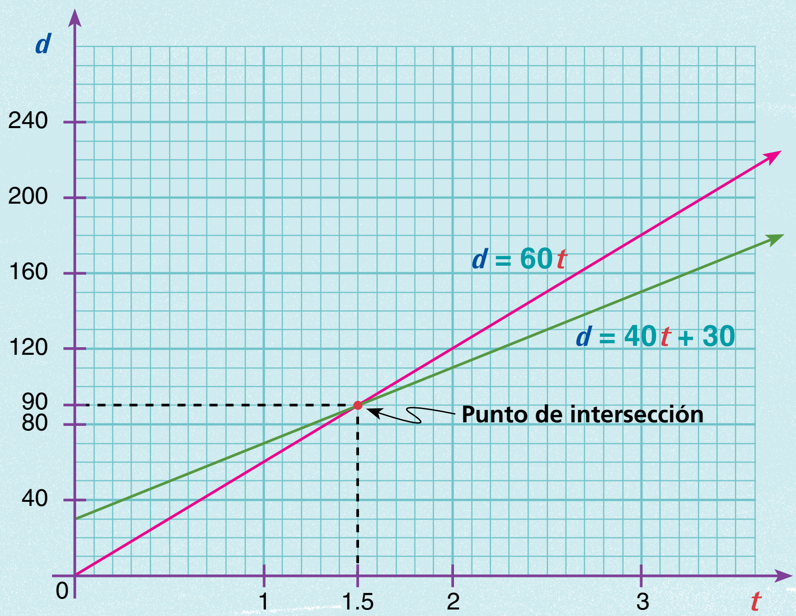
La **representación gráfica** de un sistema de ecuaciones permite encontrar la solución del sistema al encontrar las coordenadas del **punto de intersección** de las rectas correspondientes a las ecuaciones.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones:

$$d = 60t$$

$$d = 40t + 30$$

tiene la siguiente representación gráfica:



Para encontrar con precisión la solución se puede usar un **método algebraico**.

>>> Lo que aprendimos

1. Si en el problema toman como momento inicial cuando salió el camión, contesta lo siguiente:

   a) El camión va **60 km/h**, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido en **1 hora**? ________

   b) ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en **2 horas**? ________

   c) ¿Cuántos kilómetros recorrerá en ***t* horas**? ________

   d) Después de que el camión salió de Toluca, ¿cuánto tiempo pasó para que saliera la motocicleta? (Recuerda que: el camión ya había recorrido **30 km**). ________

e) ¿En qué kilómetro estaba la motocicleta media hora después de que salió el camión? ______________

f) ¿En qué kilómetro estaba el motociclista **1 hora** después de que salió el camión?

____

g) ¿En qué kilómetro estaba el motociclista $\mathbf{1\frac{1}{2}}$ hora después de que salió el camión?

____

h) ¿En qué kilómetro estaba el motociclista ***t*** horas después de que salió el camión?

____

i) Encuentra el sistema de ecuaciones y grafícalo.

j) Compara esta solución con la que obtuviste antes, ¿son iguales o distintas? ¿Por qué?

2. Ricardo, un hijo de don Matías, también trata de alcanzarlo, sólo que cuando él sale de Toluca, su papá le lleva una ventaja de **50 km**. Ricardo viaja en su automóvil a **80 km/h**.

a) Encuentra el sistema de ecuaciones que corresponde a este problema.

Sistema de ecuaciones (recuerda que el camión donde viaja don Matías va a 60 km/h)

E1: ______________ (ecuación que corresponde a don Matías).

E2: ______________ (ecuación que corresponde a Ricardo).

b) Para representar gráficamente el sistema anterior, completa las tablas para determinar las coordenadas de algunos puntos de las rectas que corresponden a cada ecuación.

Camión

Ecuación 1: $d = 60t + 50$		
t	d	**Punto (t, d)**
0	50	(0,50)
	110	
2		
$2\frac{3}{4}$		

Automóvil

Expresión: $d =$ ______		
t	d	Punto (t, d)
0	0	(0,0)
	120	
2		
$2\frac{3}{4}$		

c) Representa gráficamente el sistema de ecuaciones.

De acuerdo a la gráfica que elaboraste estima:

d) ¿En qué kilómetro Ricardo alcanza a su papá? ______________________

e) ¿Cuánto tiempo tardará en lograrlo? ______________________

f) Resuelve el sistema de ecuaciones que se forma al igualar el lado derecho de las ecuaciones E1 y E2.

$$80t = 60t + 50$$

t = ______________

g) Si sustituyes el valor de t en cualquiera de las ecuaciones E1 o E2 y haces las operaciones indicadas, ¿qué valor obtienes para d?

d= ______________

¿DÓNDE ESTÁ LA SOLUCIÓN?

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En la **sesión 1** de esta secuencia aprendiste a resolver sistemas mediante la representación gráfica de las ecuaciones, ¿qué significa si al graficar las dos ecuaciones de un sistema obtienes dos rectas paralelas?, ¿cuál es el resultado de este sistema? Estas preguntas podrás contestarlas al terminar de estudiar esta lección.

>>> Consideremos lo siguiente

Resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y = 3x + 2$$

$$y = 3x$$

$x =$ ____________ , $y =$ ____________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Qué método de solución usaron para resolver el sistema?

b) ¿Tiene solución el sistema?

c) Si tiene solución, ¿cuál es?

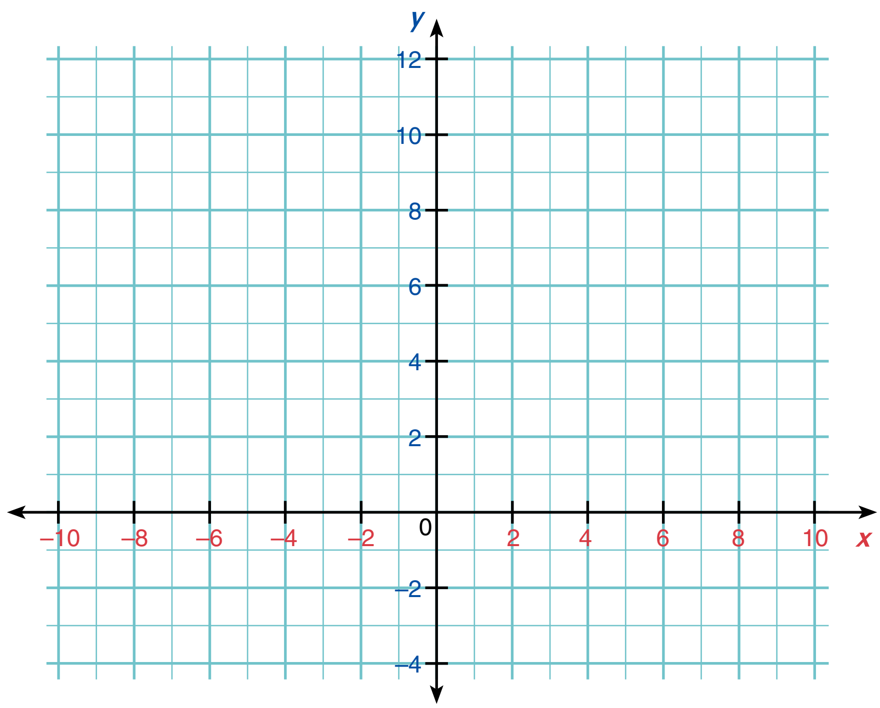
d) Si no tiene solución, ¿por qué creen que no tenga?

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para encontrar algunas parejas de números que cumplan con las ecuaciones. Después, grafiquen los puntos que obtengan.

Recta 1: $y = 3x + 2$		
x	y	Punto (x, y)
–1		
0		
1		
2		

Recta 2: $y = 3x$		
x	y	Punto (x, y)
–1		
0		
1		
2		



Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto es la **ordenada al origen** de la recta 1? ______________

b) ¿Cuánto es la **ordenada al origen** de la recta 2? ______________

c) ¿Cuánto es la **pendiente** de la recta 1? ______________

d) ¿Cuánto es la **pendiente** de la recta 2? ______________

Comparen sus respuestas y comenten: ¿existirá algún punto común a las dos rectas? ¿Cuál?

Recuerda que:

Si la ecuación de la recta es de la forma $y = mx + b$*, la* ***pendiente*** *de la recta corresponde al número* m *y la* ***ordenada al origen*** *corresponde al número* b*. Además, la* ***ordenada al origen*** *de una recta es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y.*

II. Resuelvan el siguiente problema:

Hallar dos números tales que tres veces el segundo menos seis veces el primero, den nueve como resultado; y que, al mismo tiempo, doce veces el primero menos seis veces el segundo, den dieciocho como resultado.

Los números son: __________ y __________

Comparen sus respuestas. Comenten:

a) ¿Qué método usaron para encontrar los números?

b) ¿Creen que se puedan encontrar los dos números que se piden en el problema?

III. Contesten lo que se les pide:

a) Si se usa la letra x para representar al primer número y la letra y para representar al segundo número, ¿cuál de las siguientes parejas de ecuaciones corresponde al problema? Subráyenla.

Ecuación 1: $3x - 6y = 9$
Ecuación 2: $12x - 6y = 18$

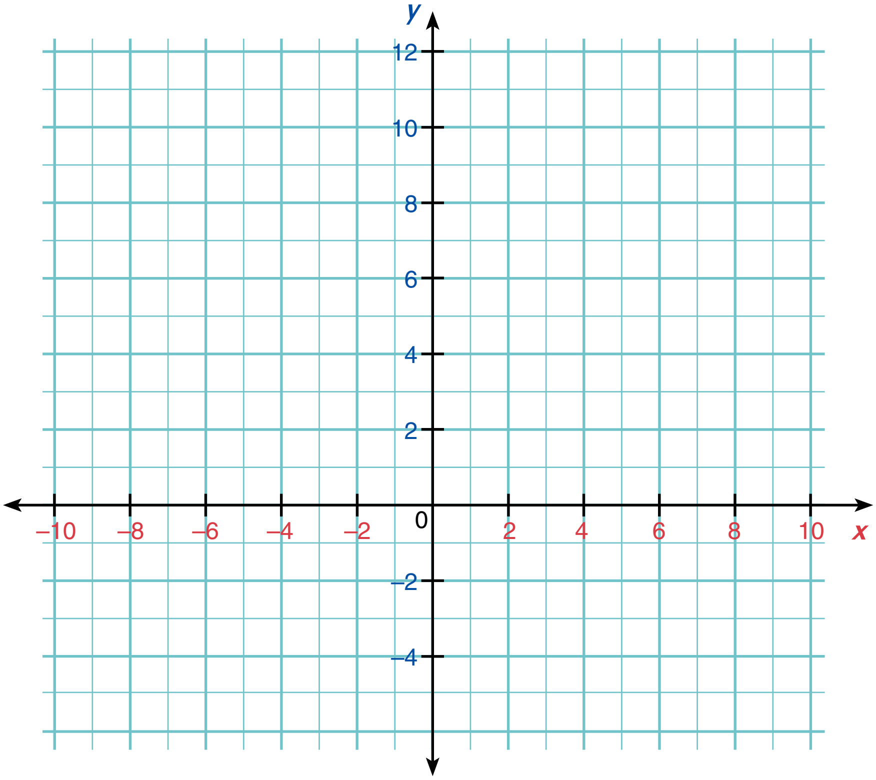
Ecuación 1: $3xy = 9$
Ecuación 2: $6xy = 18$

Ecuación 1: $3y - 6x = 9$
Ecuación 2: $12x - 6y = 18$

b) Completen la siguiente tabla para encontrar algunas parejas de números que cumplan con las ecuaciones que escogieron. Después, grafiquen los puntos que obtengan.

Recta 1: ______________		
x	y	Punto (x, y)
–1		
0		
1		
4		

Recta 2: ______________		
x	y	Punto (x, y)
–1		
0		
1		
4		



Contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto es la **ordenada al origen** de la recta 1? ______________________

b) ¿Cuánto es la **ordenada al origen** de la recta 2? ______________________

c) ¿Cuánto mide el **ángulo de inclinación** de la recta 1? __________________

d) ¿Cuánto mide el **ángulo de inclinación** de la recta 2? __________________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Existirá algún punto común a las dos rectas? ¿Cuál?

b) ¿Tiene solución el sistema?, ¿porqué?

>>> A lo que llegamos

Movimiento rectilíneo uniforme

Dado un sistema de ecuaciones puede tener o no solución.

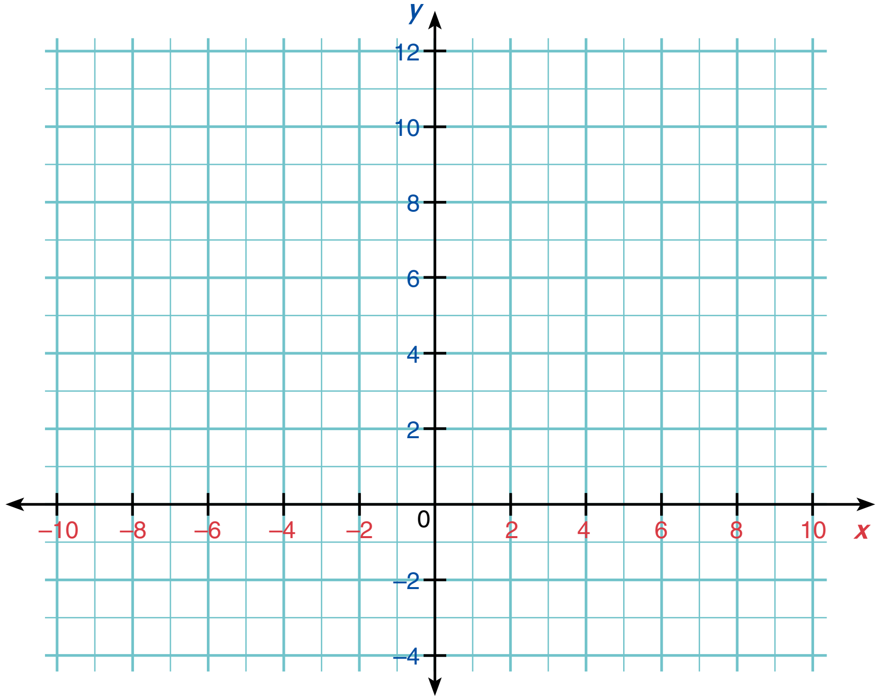
- **Tiene solución** cuando las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema se **intersecan**. El punto de intersección es la solución del sistema.
- **No tiene solución** cuándo las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema no se intersecan, es decir, cuando son **rectas paralelas**.

>>> Lo que aprendimos

Resuelve en tu cuaderno el siguiente sistema de ecuaciones y represéntalo en el plano cartesiano.

E1: $y = 3x + 5$

E2: $y = \frac{6x + 2}{2}$



SOLUCIONES MÚLTIPLES

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En las sesiones anteriores solucionaste sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante su **representación gráfica**. Aprendiste que hay sistemas de ecuaciones que tienen una solución (el punto de intersección de las rectas) y sistemas que no tienen solución. ¿Habrá sistemas que tengan más de una solución? Con lo que aprendas en esta sesión podrás contestar esta pregunta.

>>> Consideremos lo siguiente

Resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E1: 2x + y = 16$$

$$E2: y = \frac{48 - 6x}{3}$$

La solución del sistema es: x = ____________, y = ____________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Tiene solución el sistema?

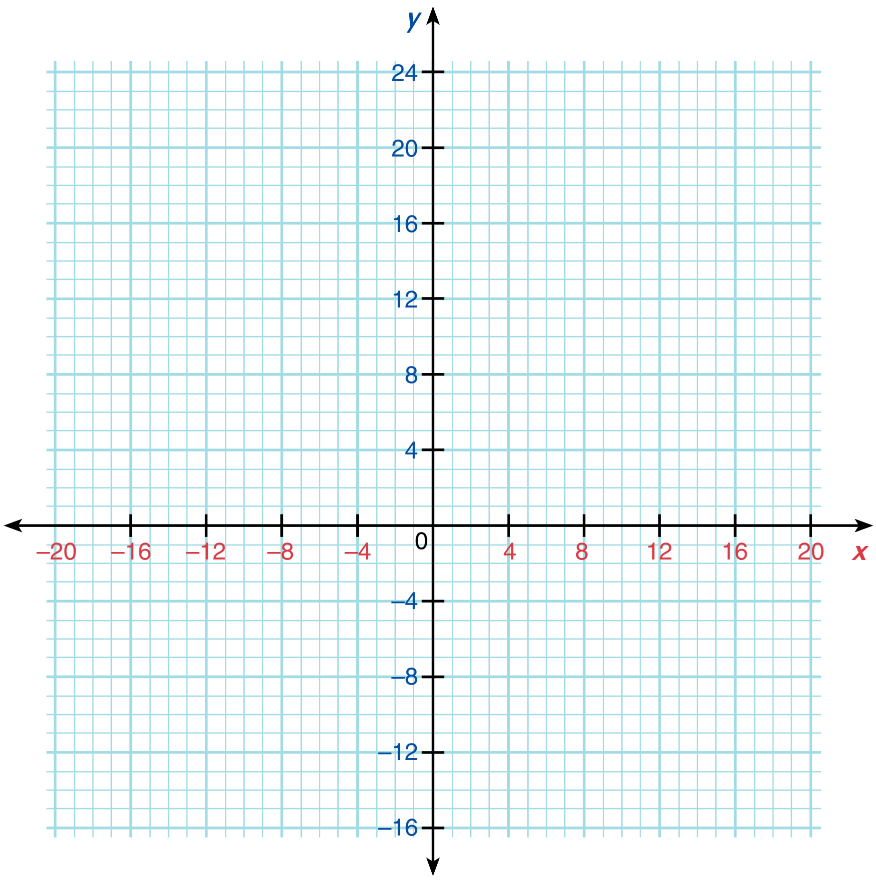
b) ¿Cuántas soluciones distintas encontraron?

>>> Manos a la obra

I. Completen las siguientes tablas para encontrar algunas parejas de números que cumplan con las ecuaciones que escogieron. Después, grafiquen los puntos que obtengan.

Recta 1: $2x + y = 16$		
x	y	Punto (x, y)
–4		
0		
4		
8		
16		

Recta 2: $y = \frac{48 - 6x}{3}$		
x	y	Punto (x, y)
–1		
–2		
0		
1		
8		



¿Habrá algún punto de la recta 1 que no pertenezca a la recta 2? ______________

¿Cuál?____________ Argumenten su respuesta ____________________________

____

____

Comparen sus respuestas.

II. Simplifiquen las expresiones de las rectas hasta obtener ecuaciones de la forma $y = mx + b$.

a) Recta 1: $y =$ __________

b) Recta 2: $y =$ __________

b) ¿Cuánto es la **ordenada al origen** de la recta 1? __________

c) ¿Cuánto es la **ordenada al origen** de la recta 2? __________

d) ¿Cuánto es la **pendiente** de la recta 1? __________

e) ¿Cuánto es la **pendiente** de la recta 2? __________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuántos puntos comparten las rectas 1 y 2?

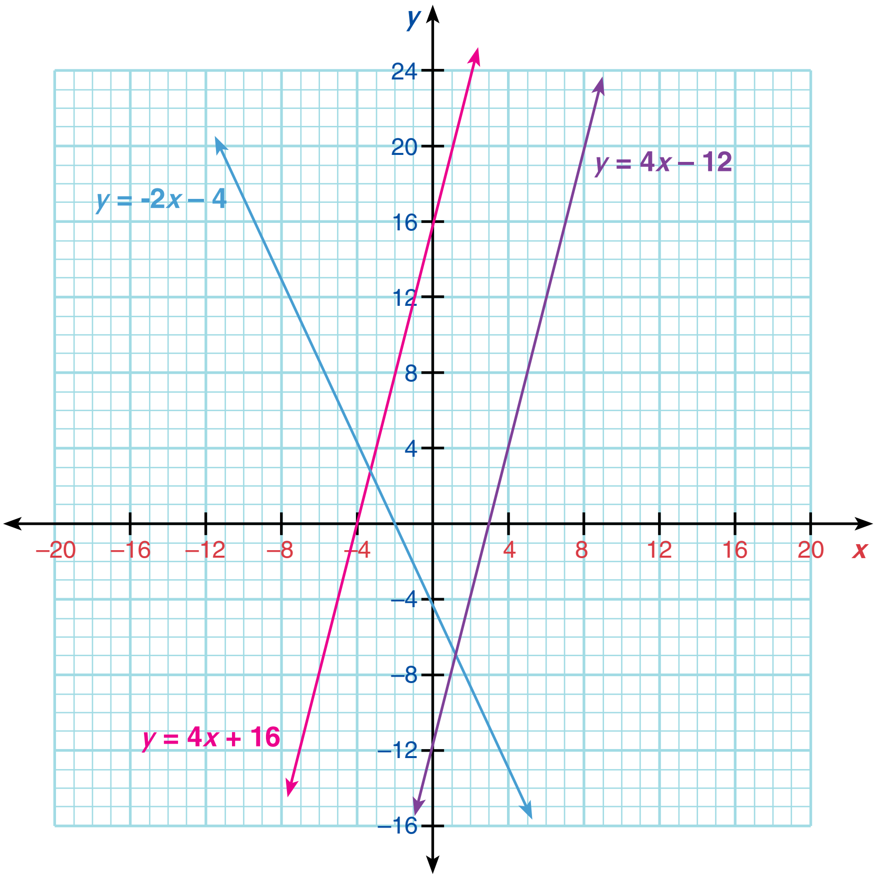
b) ¿Cuántas soluciones tiene un sistema cuando la recta que corresponde a una ecuación es la misma que la recta que corresponde a la otra ecuación?

>>> A lo que llegamos

En un sistema de ecuaciones, cuando **la recta que corresponde a una ecuación es la misma que la recta que corresponde a la otra ecuación**, entonces **cualquier punto** que pertenezca a las rectas es solución del sistema.

>>> Lo que aprendimos

1. Observa la siguiente gráfica y de acuerdo con ello contesta las preguntas.



a) ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones no tiene solución? Enciérralo en una curva.

E1: $y = -2x - 4$	**E1:** $y = -2x - 4$	**E1:** $y = 4x - 12$
E2: $y = 4x + 16$	**E2:** $y = 4x - 12$	**E2:** $y = 4x + 16$

b) De los tres sistemas de ecuaciones anteriores escribe el que tiene la solución

$x = \frac{4}{3}, \quad y = -\frac{20}{3}$

E1: ____________

E2: ____________

c) Encuentra la solución del sistema:

E1: $y = -2x - 4$

E2: $y = 4x + 16$

$x =$ ____________ , $y =$ ____________

2. Para conocer más sobre cuántas soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones pueden ver el programa ***Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones***.

>>> Para saber más

Sobre la representación grafica de sistemas de ecuaciones en la resolución de problemas consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch Carlos y Claudia Gómez. "Derechito", "Sistemas de ecuaciones lineales" en *Una ventana a las incógnitas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Hernández, Carlos. "Ecuaciones simultáneas", "Velocidad", "Casos posibles" en *Matemáticas y deportes*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre resolución gráfica de sistemas de ecuaciones de primer grado consulta:
http://descartes.cnice.mecd.es
RUTA: Aplicaciones → Álgebra → Ecuaciones y sistemas de ecuaciones → Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones.
[Fecha de consulta: 24 de agosto de 2007].
Proyecto Descartes, Ministerio de Educación y Ciencia, España.

Bibliografía

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. 23 agosto 2003. <http://www.inegi.gob.mx >

SEP. *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*, México, 2000.

___ *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*, México, 2000.

___ 20 agosto 2007. <http://www.reforma secundaria.sep.gob.mx/index.htm >

SEP-ILCE. *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo, Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria*, México, 2000.

___ *Geometría dinámica, Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria*, México, 2000.

___ *Biología, Enseñanza de las Ciencias a través de Modelos Matemáticos (Ecamm). Educación Secundaria*, México, 2000.

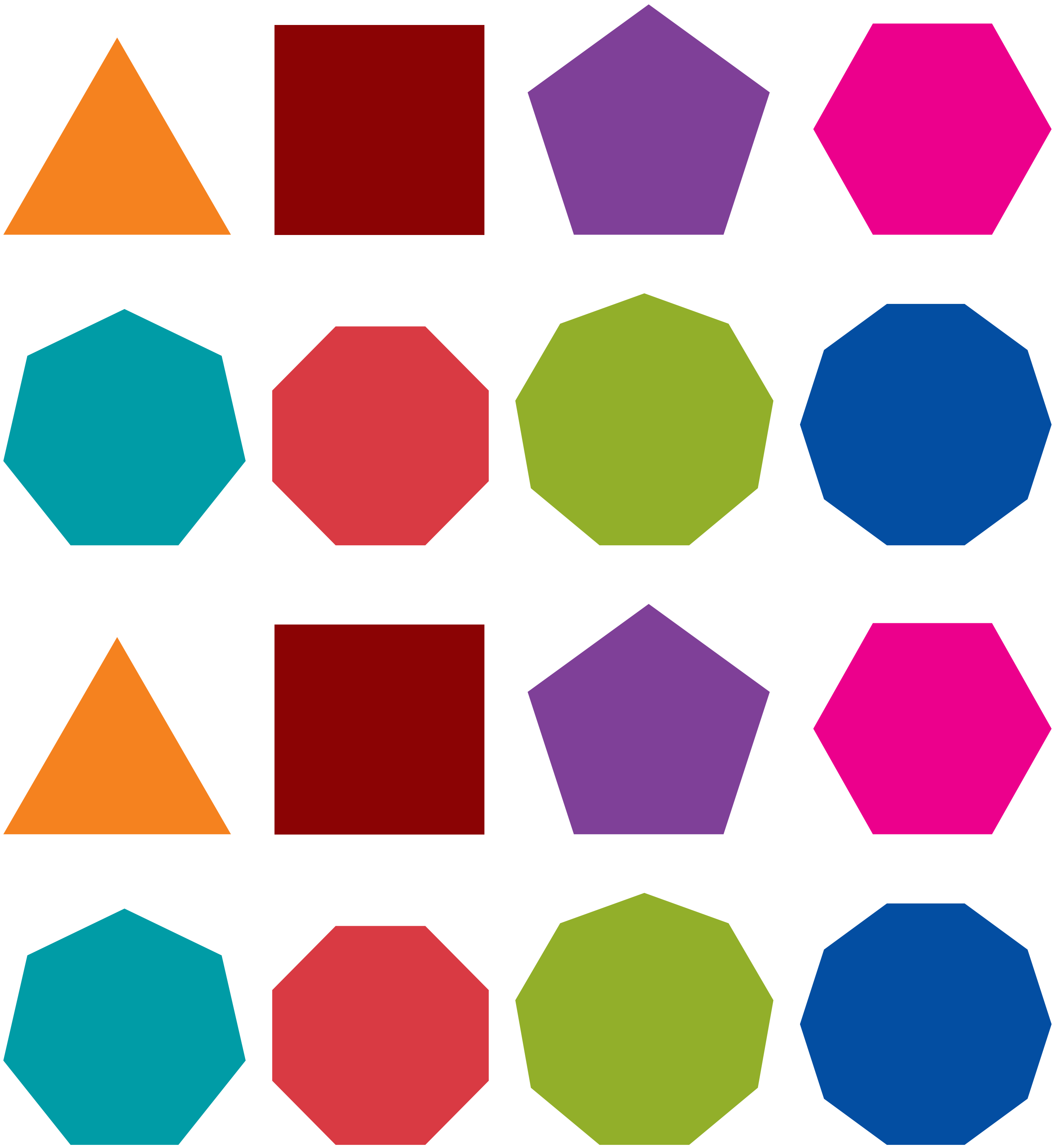
Revisores académicos externos
David Block Sevilla, Carlos Bosch Giral, Luis Alberto Briseño Aguirre, Carolyn Kieran

Diseño de actividades tecnológicas
Mauricio Héctor Cano Pineda
Emilio Domínguez Bravo
Deyanira Monroy Zariñán

Fotografía en telesecundarias
Telesecundaria “Centro Histórico”. Distrito Federal.
Telesecundaria “Sor Juana Inés de la Cruz”. Estado de México.

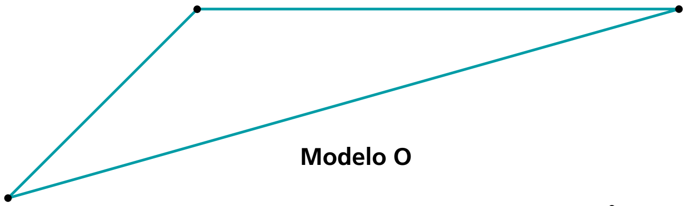
Recortables

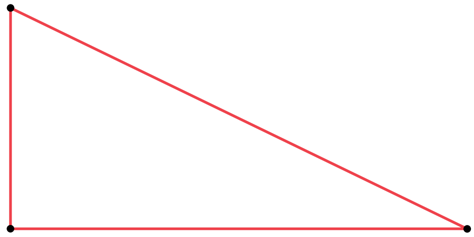
1. POLÍGONOS REGULARES

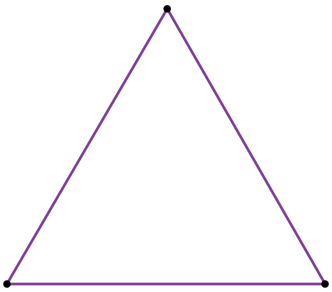


2. POLÍGONOS IRREGULARES

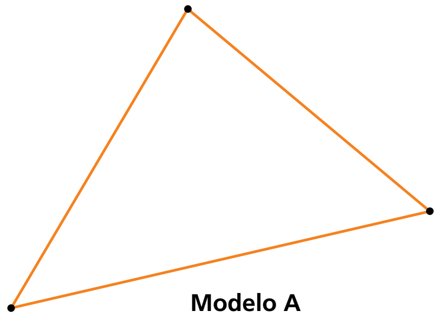
3. PLATOS TRIANGULARES

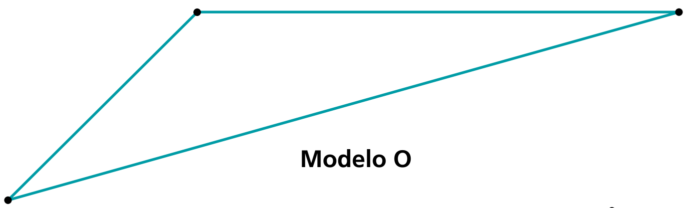

Modelo O

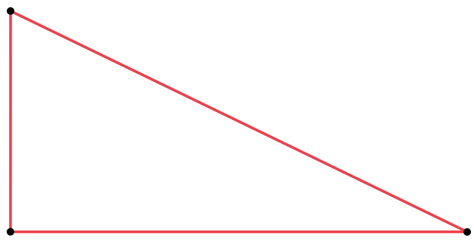

Modelo R

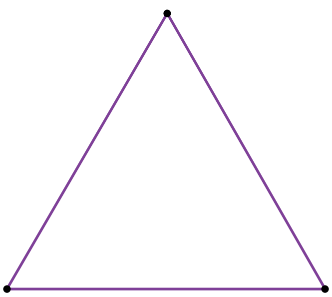

Modelo E


Modelo I

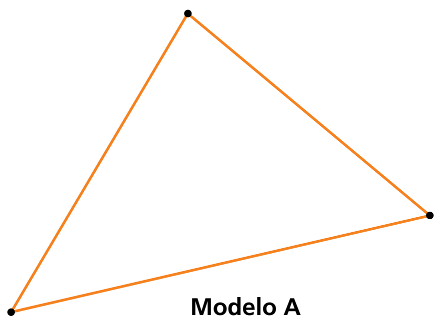

Modelo A


Modelo O


Modelo R


Modelo E


Modelo I


Modelo A