
(x+y)(x-y) = x² - y²
G
F
E
C
D
B
A
x²
x

BLOQUE 1

SECUENCIA 1

Multiplicación y división de números con signo

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números con signo.

SESIÓN 1

LOS NÚMEROS CON SIGNO

>>> Para empezar

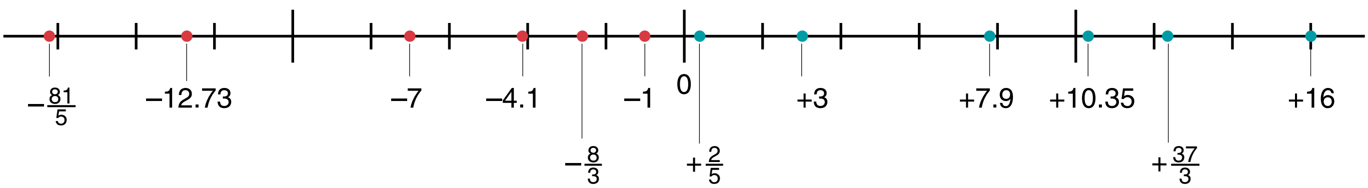
Los números con signo

En las secuencias 25 y 33 de tu libro **Matemáticas I Volumen II** resolviste problemas en los que utilizaste sumas y restas de números con signo. En esta sesión recordarás cómo hacer esas operaciones.

Los **números con signo** son los números positivos y los números negativos. El **cero** no tiene signo.

Los **números positivos** se ubican a la derecha del cero en la recta numérica. Pueden aparecer con el signo **+** o sin él. Cuando llevan el signo **+** es porque se desea resaltar que son positivos. Por ejemplo: +3, +16, +7.9, +10.35, $+\frac{2}{5}$, $+\frac{37}{3}$.

Los **números negativos** se ubican a la izquierda del cero en la recta numérica y siempre se escriben anteponiéndoles el signo –. Por ejemplo: –7, –1, –4.1, –12.73, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{81}{5}$.



Cuando se hacen operaciones de **números con signo**, los números se escriben entre paréntesis para no confundir los signos de los números con los signos de la operación. Por ejemplo:

$$(-4) + (+5) - (-15).$$

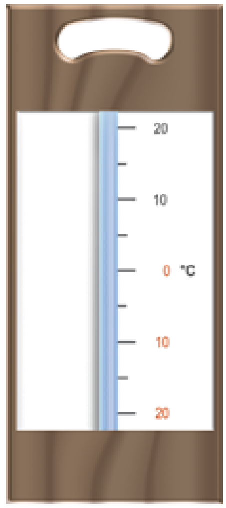
Se puede escribir 5 en vez de +5 y entonces no son necesarios los paréntises:

$$(-4) + 5 - (-15).$$

>>> Lo que aprendimos

1. Una sustancia química que está a una temperatura de –5 °C se calienta en un mechero hasta que alcanza una temperatura de 12 °C.

¿Cuántos grados subió la temperatura de la sustancia? ______________________



2. En una tienda de abarrotes se realizó el balance bimestral de todo un año. Se indicaron las ganancias con **números negros** y las pérdidas con **números rojos**. El saldo para un periodo se calcula sumando las ganancias y restando las pérdidas:

	Ene-Feb	Mar-Abr	May-Jun	Jul-Ago	Sept-Oct	Nov-Dic
Balance bimestral	**960.60**	**773.50**	**1 755.75**	**441.80**	**2 997.25**	**4 647.00**

a) Respondan sin hacer la cuenta, ¿el saldo anual fue positivo o negativo?

____

b) ¿De cuánto fue el saldo anual en la tienda? ______________________

c) En otra tienda, el saldo anual fue de **$9 550.60**. En el bimestre enero-febrero tuvieron pérdidas por **$845.25**.

¿Cuál fue el saldo en esta tienda de marzo a diciembre? ______________________

3. Escriban mayor que (>) o menor que (<) según corresponda.

a) 7 ☐ 18

b) 12 ☐ (–5)

c) (–19) ☐ 1

d) (–7) ☐ 14

e) (–27) ☐ (–35)

f) (–11) ☐ (–3)

Recuerden que:

El número mayor es el que está más a la derecha en la recta numérica.

Recuerden que:

- *Los números simétricos son los que están a la misma distancia del cero.*
- *El valor absoluto de un número siempre es un número positivo, se representtta utilizando dos barras verticales.*

Recuerden que:

- *Para sumar **dos números del mismo signo** se pueden sumar los valores absolutos de los números, y el signo del resultado es el signo de los números que se suman.*
- *Para sumar **dos números de signos distintos**, se puede encontrar la diferencia de los valores absolutos de los números, y el signo del resultado es el signo del número de mayor valor absoluto.*

Recuerden que:

*Para hacer **restas de números con signo** se puede sumar el simétrico:*

$(-2) - 5 = (-2) + (-5) = -7.$

$(-3) - (-5) = (-3) + 5 = 2.$

Recuerden que:

*Para realizar una **suma de varios números con signo** podemos sumar primero todos los números positivos, después todos los números negativos y por último sumar los resultados. Por ejemplo:*

$(-18) + 31 + (-24) = 31 + (-42) = -11.$

$(-15) + 11 + (-8) + 28 = 39 + (-23) = 16.$

4. Escriban el simétrico o el valor absoluto de los siguientes números con signo, según corresponda:

a) El simétrico de 29.3 es

b) El simétrico de $\left(-\frac{19}{7}\right)$ es

c) $|25.1| =$

d) $\left|-\frac{2}{13}\right| =$

5. Resuelvan las siguientes sumas:

a) $(-8) + (-15) =$

b) $24 + (-24) =$

c) $(-31) + 48 =$

d) $59 + (-81) =$

e) $4.3 + (-8.7) =$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{9} =$

6. Resuelvan las siguientes restas:

a) $(-31) - 14 =$

b) $46 - (-10) =$

c) $(-2) - (-65) =$

d) $(-52) - (-19) =$

e) $(-15.7) - (-17.9) =$

f) $\left(-\frac{7}{4}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) =$

7. Resuelvan las siguientes sumas:

a) $(-10) + 17 + (-15) =$

b) $28 + (-4) + 11 =$

c) $(-10) + (-21) + 86 =$

d) $(-47) + (-12) + (-33) =$

e) $14 + (-25) + (-39) + 32 =$

f) $(-10) + (-33) + (-38) + (-9) =$

8. El municipio de Temósachic, localizado en el noroeste del estado de Chihuahua, es uno de los municipios con las temperaturas más bajas del país. En el año 2006, en esa localidad se registraron las siguientes temperaturas mínimas promedio por mes (en grados centígrados):

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic
Temperatura mínima promedio	–7	–2	0	2	5	12	13	14	10	4	–3	–6

a) Dibujen una recta numérica y coloquen en ella todas las temperaturas.

b) Con los datos mensuales del cuadro, calculen el promedio anual de la temperatura mínima. ____________

9. El faro de Alejandría es una de las siete maravillas del mundo antiguo. Ptolomeo I, rey de Egipto, mandó construirlo en el año 291 antes de nuestra era, en la isla de Faro. Consistía en una torre de 134 metros de altura; en su parte superior, una hoguera permanente marcaba la posición de la ciudad a los navegantes.

a) La construcción del faro tardó 12 años en completarse. ¿En qué año se terminó de construir?

____

b) Ptolomeo I tenía 76 años cuando mandó construir el faro, ¿en qué año nació?

____

c) El sucesor de Ptolomeo I fue su hijo, Ptolomeo II, quien se convirtió en rey en el año 285 antes de nuestra era, a la edad de 24 años. Se sabe que Ptolomeo II nació cuando su madre tenía 31 años.

¿En qué año nació la madre?

____

SESIÓN 2

MULTIPLICACIONES DE NÚMEROS CON SIGNO

>>> Para empezar

Los números tienen su origen en la necesidad de contar y de medir. Los primeros números que fueron utilizados son los llamados **números naturales**:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12…

Al conjunto formado por los números naturales, los simétricos de los números naturales y el cero, se le llama conjunto de los **números enteros**:

…, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4…

>>> Consideremos lo siguiente

Las siguientes tablas son parte de las tablas de multiplicar del 4 y del 6. Completa los resultados:

4 × 6 =	24
4 × 5 =	20
4 × 4 =	16
4 × 3 =	
4 × 2 =	
4 × 1 =	
4 × 0 =	0
4 × (–1) =	
4 × (–2) =	
4 × (–3) =	
4 × (–4) =	
4 × (–5) =	
4 × (–6) =	
4 × (–7) =	

6 × 6 =	36
6 × 5 =	30
6 × 4 =	24
6 × 3 =	
6 × 2 =	
6 × 1 =	
6 × 0 =	
6 × (–1) =	
6 × (–2) =	
6 × (–3) =	
6 × (–4) =	–24
6 × (–5) =	
6 × (–6) =	
6 × (–7) =	

Comparen sus respuestas. Comenten los procedimientos que siguieron para llenar las tablas.

>>> Manos a la obra

I. Observa las tablas y responde las preguntas:

a) ¿Cuánto se resta para pasar del resultado de 4×5 al resultado de 4×4? ________

b) ¿Cuánto se resta para pasar del resultado de 4×1 al resultado de 4×0? ________

c) Para pasar del resultado de 4×0 al resultado de $4 \times (-1)$, se resta lo mismo. ¿Cuánto es $4 \times (-1)$? ________________

d) Entre dos renglones consecutivos de la tabla del 4, siempre se resta lo mismo. ¿Cuánto es $4 \times (-5)$? ________________

e) ¿Cuánto se resta entre dos renglones consecutivos de la tabla del 6? ____________

f) ¿Cuánto es $6 \times (-2)$? ________________

g) ¿Cuánto es $6 \times (-5)$? ________________

Comparen sus respuestas.

II. Multiplicar 4×2 es lo mismo que sumar cuatro veces 2:

$$4 \times 2 = \underbrace{2 + 2 + 2 + 2}_{\text{Se suma cuatro veces 2.}} = 8.$$

Expresa cada multiplicación como sumas:

a) $5 \times 3 = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{Se suma \_\_\_\_\_\_\_\_ veces 3.}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

b) $4 \times 0 = \underbrace{0 + 0 + 0 + 0}_{\text{Se suma \_\_\_\_\_\_\_\_ veces 0.}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

III. Cuando en una multiplicación el primer factor es un número entero positivo y el segundo factor es un número negativo, también se hace una suma repetida, por ejemplo:

$$2 \times (-5) = \underbrace{(-5) + (-5)}_{\text{Se suma dos veces } -5.} = -10.$$

O también:

$$4 \times (-3.7) = \underbrace{(-3.7) + (-3.7) + (-3.7) + (-3.7)}_{\text{Se suma cuatro veces } -3.7.} = -14.8.$$

Expresa las siguientes multiplicaciones como sumas repetidas y encuentra el resultado:

a) $3 \times (-8) = (\_\_\_\_) + (\_\_\_\_) + (\_\_\_\_) =$ ______________________

b) ______ $\times (-11) = (-11) + (-11) + (-11) + (-11) =$ ______________________

c) $5 \times$ ______ $= (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) =$ ______________________

d) $4 \times (-1.2) = (-1.2) + (-1.2) + (-1.2) + (-1.2) =$ ______________________

e) $6 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) =$ ______________

f) $6 \times (-7) =$ ____

g) $3 \times$ ______ $=$ ____ $= -36.$

Comparen sus respuestas y comenten: en otro grupo encontraron el resultado de $6 \times (-7)$ diciendo que $6 \times 7 = 42$ y que, entonces, $6 \times (-7) = -42$. ¿Están de acuerdo con este procedimiento? ¿Cómo usarían este procedimiento para encontrar el resultado de $4 \times (-1.2)$ y de $6 \times \left(-\frac{4}{3}\right)$?

IV. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $8 \times (-10) =$ ______________________

b) $12 \times (-4) =$ ______________________

c) $7 \times (-5.8) =$ ______________________

d) $10 \times \left(-\frac{1}{7}\right) =$ ______________________

>>> A lo que llegamos

Cuando en una multiplicación **el primer factor es un número entero positivo** y **el segundo factor es un número negativo**, se suma varias veces el número negativo.

Por ejemplo:

$$5 \times (-4) = \underbrace{(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4)}_{\text{Se suma cinco veces } -4} = -20.$$

$$3 \times (-6.4) = \underbrace{(-6.4) + (-6.4) + (-6.4)}_{\text{Se suma tres veces } -6.4} = -19.2.$$

$$4 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = \underbrace{\left(-\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{7}{3}\right)}_{\text{Se suma cuatro veces } -\frac{7}{3}.} = \left(-\frac{28}{3}\right).$$

En general, para encontrar el resultado de una multiplicación de este tipo se multiplican los valores absolutos de los números y al resultado se le antepone el signo –.

Por ejemplo:

6 × (–3) = –18 Se hace la multiplicación **6 × 3 = 18**, se le antepone el signo –, y el resultado es **–18**.

10 × (–8.32) = –83.2 Se hace la multiplicación **10 × 8.32 = 83.2**, se le antepone el signo –, y el resultado es **–83.2**.

>>> Lo que aprendimos

1. Completa la expresión de cada una de las siguientes multiplicaciones como una suma y encuentra el resultado.

a) 4 × ________ = ________ + ________ + ________ + ________ = 32.

b) 8 × 0 = ______________________________ = ________

c) 3 × (–7) = ______________________________ = ________

d) 9 × (–1) = ______________________________ = ________

e) ________ × (–2) = (–2) + (–2) + (–2) + (–2) + (–2) + (–2) + (–2) = ________

f) 4 × ______ = ______________________________ = –12.

g) $5 \times (-10.4) =$ ______________________ = ______

h) $6 \times \left(-\frac{2}{5}\right) =$ ______________________ = ______

2. Realiza las siguientes multiplicaciones:

$5 \times (-8) =$	$8 \times (-7) =$	$2 \times 0 =$	$3 \times (-9) =$
$11 \times 0 =$	$2 \times (-13) =$	$14 \times (-3) =$	$10 \times 0 =$
$6 \times (-4.8) =$	$8 \times (-2.25) =$	$7 \times \left(-\frac{3}{4}\right) =$	$4 \times \left(-\frac{11}{3}\right) =$

SESIÓN 3

MÁS MULTIPLICACIONES DE NÚMEROS CON SIGNO

>>> Para empezar

En esta sesión vas a continuar haciendo multiplicaciones de números negativos con positivos.

>>> Consideremos lo siguiente

Las siguientes tablas son parte de las tablas de multiplicar del 8. Encuentra los resultados:

$8 \times 6 =$	
$8 \times 5 =$	
$8 \times 4 =$	
$8 \times 3 =$	
$8 \times 2 =$	
$8 \times 1 =$	
$8 \times 0 =$	
$8 \times (-1) =$	
$8 \times (-2) =$	
$8 \times (-3) =$	
$8 \times (-4) =$	
$8 \times (-5) =$	
$8 \times (-6) =$	

$6 \times 8 =$	
$5 \times 8 =$	
$4 \times 8 =$	
$3 \times 8 =$	
$2 \times 8 =$	
$1 \times 8 =$	
$0 \times 8 =$	
$(-1) \times 8 =$	
$(-2) \times 8 =$	
$(-3) \times 8 =$	
$(-4) \times 8 =$	
$(-5) \times 8 =$	
$(-6) \times 8 =$	

Comparen sus respuestas. Comenten cómo van cambiando los resultados en las tablas.

>>> Manos a la obra

I. Observa las tablas y responde las preguntas:

a) En la tabla de la izquierda, de arriba hacia abajo, ¿los resultados aumentan o disminuyen? ______

b) ¿Cuánto se resta para pasar del resultado de 4×8 al resultado de 3×8? ______

c) ¿Cuánto se resta para pasar del resultado de 2×8 al resultado de 1×8? ______

d) Para pasar del resultado de 0×8 al resultado de $(-1) \times 8$, se resta lo mismo. ¿Cuánto es $(-1) \times 8$? ______

e) Entre dos renglones consecutivos de la tabla del 8, siempre se resta lo mismo. ¿Cuánto es $(-5) \times 8$? ______

f) ¿Cómo son los resultados en cada renglón de las dos tablas? ¿Son iguales o son distintos? ______

Comparen sus respuestas. Comenten: si $8 \times (-9) = -72$, ¿cuánto es $(-9) \times 8$?

II. Completa los siguientes resultados:

$10 \times 5 =$	50
$10 \times 4 =$	40
$10 \times 3 =$	30
$10 \times 2 =$	20
$10 \times 1 =$	10
$10 \times 0 =$	0
$10 \times (-1) =$	
$10 \times (-2) =$	
$10 \times (-3) =$	
$10 \times (-4) =$	
$10 \times (-5) =$	

$5 \times 10 =$	50
$4 \times 10 =$	40
$3 \times 10 =$	30
$2 \times 10 =$	20
$1 \times 10 =$	10
$0 \times 10 =$	0
$(-1) \times 10 =$	
$(-2) \times 10 =$	
$(-3) \times 10 =$	
$(-4) \times 10 =$	
$(-5) \times 10 =$	

a) En las tablas, ¿los resultados aumentan o disminuyen? ______

b) Los resultados, en cada renglón de ambas tablas, ¿son iguales o son diferentes?

______

III. Encuentra el resultado de las siguientes multiplicaciones:

a) $7 \times (-4) =$ ____________ b) $(-4) \times 7 =$ ____________

c) $11 \times (-9) =$ ____________ d) $(-9) \times 11 =$ ____________

e) $5 \times (-12) =$ ____________ f) $(-12) \times 5 =$ ____________

g) $4 \times (-27) =$ ____________ h) $(-27) \times 4 =$ ____________

i) $15 \times (-4) =$ ____________ j) $(-2) \times 18 =$ ____________

k) $10 \times (-16) =$ ____________ l) $(-14) \times 13 =$ ____________

Comparen sus respuestas. Comenten cuál es el signo del resultado cuando multiplicamos un número negativo con uno positivo.

>>> A lo que llegamos

Cuando en una multiplicación el primer factor es un número negativo y el segundo factor es un número entero positivo, se multiplican los valores absolutos de los números y al resultado se le antepone el signo –. Por ejemplo:

$(-8) \times 2 = -16$ Se hace la multiplicación **$8 \times 2 = 16$**, se le antepone el signo –, y el resultado es **-16**.

IV. Cuando se multiplica un número entero positivo por una fracción o un número decimal negativo, se hace lo mismo: se multiplican los valores absolutos de los números y al resultado se le antepone el signo –. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $3 \times (-4.1) =$ ____________ b) $(-9.47) \times 10 =$ ____________

c) $\left(-\frac{4}{5}\right) \times 3 =$ ____________ d) $5 \times \left(-\frac{10}{7}\right) =$ ____________

Comparen sus respuestas.

>>> Lo que aprendimos

1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

$0 \times 5 =$	$7 \times (-1) =$	$3 \times (-16) =$
$(-1) \times 14 =$	$(-7) \times 11 =$	$1 \times (-4) =$
$(-17) \times 7 =$	$16 \times (-12) =$	$(-3.5) \times 4 =$
$8 \times (-6.2) =$	$\left(-\frac{2}{9}\right) \times 6 =$	$8 \times \left(-\frac{13}{4}\right) =$

LA REGLA DE LOS SIGNOS 1

SESIÓN 4

>>> Para empezar

Cuando se multiplican números con signo se utiliza la regla de los signos. En esta sesión vas a conocer y a utilizar esta regla.

>>> Consideremos lo siguiente

Encuentra los resultados que hacen falta en la siguiente tabla y anótalos.

×	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*–1*	*–2*	*–3*	*–4*
4	16	12	8	4	0	–4	–8	–12	–16
3	12	9	6	3	0	–3	–6	–9	–12
2	8	6	4	2	0	–2	–4	–6	–8
1	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
–1					0				
–2					0				
–3					0				
–4					0				

Comparen sus respuestas. Comenten cómo van cambiando los resultados en cada renglón y en cada columna.

>>> Manos a la obra

I. Observa las tablas y responde las preguntas:

a) ¿Cuánto se suma para pasar del resultado de $4 \times (-3)$ al resultado de $3 \times (-3)$?

____

b) ¿Cuánto se suma para pasar del resultado de $1 \times (-3)$ al resultado de $0 \times (-3)$?

____

c) Entre dos resultados consecutivos de la tabla del (-3) siempre se suma lo mismo. ¿Cuánto es $(-1) \times (-3)$? ____________________

d) ¿Cuánto es $(-2) \times (-3)$? ____________________

II. Responde las siguientes preguntas:

a) En la tabla del (-1), para pasar de un resultado al siguiente ¿se suma o se resta? ____________________ . ¿Cuánto se suma o cuánto se resta? ____________________

b) En la tabla del 1, para pasar de un resultado al siguiente ¿se suma o se resta? ____________________ . ¿Cuánto se suma o cuánto se resta? ____________________

c) En la tabla del 2, ¿cuánto se suma o cuánto se resta para pasar de un resultado al siguiente? ____________________

d) En la tabla del (-4), ¿cuánto se suma o cuánto se resta para pasar de un resultado al siguiente? ____________________

e) ¿Cuál es el signo del resultado de multiplicar dos números negativos? __________

Comparen sus respuestas. Comenten cuál es el resultado de multiplicar $(-3) \times (-7)$.

III. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $7 \times (-2) =$ ____________________

b) $(-12) \times 4 =$ ____________________

c) $(-3) \times (-6) =$ ____________________

d) $(-9) \times 2 =$ ____________________

e) $3 \times (-15) =$ ____________________

f) $(-17) \times (-4) =$ ____________________

IV. Completa las afirmaciones con *positivo* o *negativo*:

a) Cuando multiplicamos un número positivo por uno negativo el resultado es

____

b) Cuando multiplicamos un número negativo por uno ______________ el resultado es positivo.

c) Cuando multiplicamos un número ______________ por uno positivo el resultado es positivo.

d) Cuando multiplicamos un número negativo por uno ______________ el resultado es negativo.

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Para multiplicar números con signo se multiplican los valores absolutos de los números y luego se determina el signo del resultado utilizando la regla de los signos: cuando multiplicamos

Positivo por positivo el resultado es positivo.
Positivo por negativo el resultado es negativo.
Negativo por positivo el resultado es negativo.
Negativo por negativo el resultado es positivo.

Por ejemplo, para multiplicar (–4) × 11, primero se hace la multiplicación:

$$4 \times 11 = 44,$$

y utilizando la regla de los signos sabemos que el resultado es negativo. Entonces,

$$(-4) \times 11 = -44.$$

V. Cuando se multiplican fracciones o números decimales con signo, también se utiliza la regla de los signos. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(-5) \times 8.4 =$ ______________

b) $(-10.35) \times (-4) =$ ______________

c) $(-5.8) \times (-3.6) =$ ______________

d) $\frac{4}{11} \times (-3) =$ ______________

e) $\left(-\frac{1}{7}\right) \times \left(-\frac{14}{9}\right) =$ ______________

f) $\frac{12}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$ ______________

>>> Lo que aprendimos

1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

$(-8) \times 0 =$	$1 \times (-15) =$	$0 \times (-4) =$
$(-17) \times 1 =$	$(-3) \times 13 =$	$(-12) \times (-8) =$
$(-16) \times 2 =$	$(-13) \times (-15) =$	$7 \times (-1.3) =$
$(-2.5) \times 4.1 =$	$\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{8}\right) =$	$4 \times \left(-\frac{21}{8}\right) =$

SESIÓN 5

LA REGLA DE LOS SIGNOS 2

>>> Para empezar

La **regla de los signos** también se utiliza para hacer divisiones entre dos números con signo.

>>> Consideremos lo siguiente

Completen los datos y los resultados que faltan en las siguientes multiplicaciones:

×	*7*	*–4*	*–12*
2	14	–8	–24
–4		16	
	35		
	–56		
		–52	
	–105		
			216

Comparen sus respuestas. Comenten qué hicieron para encontrar el signo de los números que faltaban.

>>> Manos a la obra

I. Respondan las siguientes preguntas:

a) Un número multiplicado por 17 da como resultado 204, ¿cuál es la operación que se puede hacer para encontrar ese número? _______________

b) ¿Cuál es el número que buscamos? ________

c) Esto es cierto porque: ________ × 17 = 204.

d) Para encontrar el número que multiplicado por –8 da como resultado 184, ¿cuál es la operación que se puede hacer? ________________________________

e) ¿Cuál es el número que buscamos? ________

f) Esto es cierto porque: ________ × (–8) = 184.

II. En la siguiente tabla se presentan algunos problemas. Complétenla:

Problema	División que se hace para encontrar el número	Verificación
¿Cuál es el número que al multiplicarlo por 3 da –78?	(–78) ÷ 3 = ______	______ × 3 = –78
¿Cuál es el número que al multiplicarlo por –9 da 171?		
¿Cuál es el número que al multiplicarlo por ______ da ______?	(–75) ÷ (–25) = ______	______ × ______ = –75

a) ¿Cuál es el signo del resultado de dividir un número negativo entre uno positivo?

____

b) ¿Cuál es el signo del resultado de dividir un número positivo entre uno negativo?

____

c) ¿Cuál es el signo del resultado de dividir un número negativo entre uno negativo?

____

III. Encuentren el resultado de las siguientes divisiones:

a) 12 ÷ (–6) = ________________

b) (–18) ÷ 6 = ________________

c) (–44) ÷ (–4) = ________________

d) (–20) ÷ 5 = ________________

e) (–16) ÷ (–8) = ________________

f) 28 ÷ (–28) = ________________

Comparen sus respuestas. Comenten qué hicieron para encontrar el signo de los resultados.

>>> A lo que llegamos

Para hacer divisiones entre números con signo se dividen los valores absolutos de los números y luego se encuentra el signo del resultado utilizando la **regla de los signos**:

Cuando dividimos,

Positivo entre **positivo** el resultado es **positivo**.

Positivo entre **negativo** el resultado es **negativo**.

Negativo entre **positivo** el resultado es **negativo**.

Negativo entre **negativo** el resultado es **positivo**.

Por ejemplo, para dividir **(–110) ÷ (–5)**, primero se hace la división: **110 ÷ 5 = 22**, y utilizando la regla de los signos, sabemos que el resultado es **positivo**. Entonces,

$$(-110) \div (-5) = 22.$$

IV. Cuando se dividen fracciones o números decimales con signo, también se utiliza la regla de los signos. Realicen las siguientes operaciones:

a) $(-7.4) \div 2 =$ ______________

b) $(-15.5) \div (-5) =$ ______________

c) $(-10) \div \left(-\frac{11}{4}\right) =$ ______________

d) $\left(-\frac{2}{3}\right) \div 7 =$ ______________

e) $\left(-\frac{8}{3}\right) \div \left(-\frac{7}{4}\right) =$ ______________

f) $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) =$ ______________

>>> Lo que aprendimos

1. Realiza las siguientes operaciones:

(–9) × 0 =	(–1) × 17 =	1 × (–29) =	0 × (–24) =
(–2) × 7 =	6 × (–8) =	(–7) × 3 =	11 × (–4) =
12 × (–1) =	(–9) × (–5) =	(–15) × (–1) =	(–10) × (–13) =
44 ÷ (–11) =	(–48) ÷ (–2) =	(–56) ÷ 8 =	(–18) ÷ (–4) =
(–35) ÷ 8 =	16 ÷ (–5) =	(–29) ÷ (–4) =	(–71) ÷ (–10) =
6 × (–5.3) =	(–3) x 2.4 =	(–3.75) ÷ (–5) =	(–34.2) ÷ (–9) =

$(-3) \times \left(-\frac{1}{6}\right) =$	$\left(-\frac{13}{2}\right) \times 5 =$	$\frac{7}{8} \div (-4) =$	$(-12) \div \left(-\frac{2}{7}\right) =$
$(-7.4) \times 5.1 =$	$(-2.7) \times (-10.5) =$	$\left(-\frac{6}{5}\right) \times \left(-\frac{9}{5}\right) =$	$\left(-\frac{1}{7}\right) \times 13 =$
$\frac{8}{6} \times \left(-\frac{9}{2}\right) =$	$(-11) \div \left(-\frac{10}{3}\right) =$	$\frac{2}{3} \div \left(-\frac{5}{8}\right) =$	$\left(-\frac{1}{4}\right) \div \left(-\frac{10}{3}\right) =$

2. Del 25 al 29 de diciembre de 2006 se registraron las siguientes temperaturas en Temósachic, Chihuahua:

	25	**26**	**27**	**28**	**29**
Temperatura máxima	8	17.4	20.2	16	7
Temperatura mínima	–10	–9.4	–8.8	0	–6

a) Encuentra el promedio de las temperaturas máximas en esos días. ______________

b) Encuentra el promedio de las temperaturas mínimas en esos días. ______________

c) Encuentra la temperatura promedio de cada día (el promedio calculado entre la temperatura máxima y la mínima de ese día). ______________

3. Coloca los números que faltan para que todas las operaciones sean correctas:

	×		=	
÷		×		÷
	÷	**4**	=	**–2**
=		=		=
–3	×		=	**12**

>>> Para saber más

Sobre los números enteros consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Claudia Gómez. “Números enteros”, “Suma y resta de números enteros” y “Multiplicación y división de enteros”, en *Una ventana al infinito*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre los números con signo:
Marván, Luz María. “Números con signo”, “¿Mayor o menor?”, “El valor absoluto” y “Reglas para operar con negativos”, en *Representación numérica*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Sobre los egipcios consulta:
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/faro/home.htm
Ruta: Menú → Sobre héroes, tumbas y sabios → El periódico Egipcio
[Fecha de consulta: 23 de mayo de 2007].
Red Escolar, Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa.

Problemas aditivos con expresiones algebraicas

En esta secuencia resolverás problemas de adición y sustracción de expresiones algebraicas.

SESIÓN 1

LOS GALLINEROS

>>> Consideremos lo siguiente

Don Lencho es un granjero que desea construir un gallinero de forma rectangular. El técnico avícola de la región le ha recomendado que el largo del gallinero mida el doble que su ancho.

Para determinar las dimensiones del gallinero, don Lencho tiene una gran cantidad de posibilidades que respeten la recomendación anterior.

Si el número de metros que tiene el ancho se representa con la letra ***a***, escribe una expresión algebraica que represente el perímetro del gallinero.

Perímetro = ______________________________

Comparen sus expresiones algebraicas. Comenten:

¿Cuál es el perímetro del gallinero si el ancho mide 1 metro?

>>> Manos a la obra

I. Completa la siguiente tabla para ayudar a don Lencho a decidir el tamaño del gallinero.

Medida en metros del ancho	Medida en metros del largo	Operaciones que se realizan para calcular el perímetro del gallinero	Perímetro del gallinero en metros
1	2		6
$1\frac{1}{2}$			
2	4		12
3			
	8		
4.5			27
			48
a			

Comparen sus tablas. Si es necesario, verifiquen sus respuestas dibujando en su cuaderno los rectángulos correspondientes (utilicen una escala de **1cm = 1m**). Comenten:

a) ¿Qué operación hicieron para obtener la medida del largo del gallinero cuando a representa la medida del ancho en metros?

____

b) ¿Qué operaciones hicieron para obtener el perímetro del gallinero cuando a representa la medida del ancho en metros?

____

II. Contesta lo siguiente:

a) En las siguientes expresiones algebraicas la letra a representa el número de metros que tiene el ancho del gallinero. Subraya las expresiones que, al sumarse, permiten obtener el perímetro. ¡Cuidado, puede haber más de una que sea correcta!

$a + a + a$

$a + a + 2a + 2a$

$a + a + a + a + a + a$

$3a + 3a$

Recuerda que:

Para evitar confundir el signo **×** *(por) de la multiplicación con la literal* **x**, *el signo "por" no se escribe.*

Por lo mismo:

$3a$ = 3 veces $a = a + a + a$

b) El resultado de la suma $a + a$ es $2a$, o sea, **2 veces** a. Completa el siguiente esquema para encontrar el resultado de la suma $a + a + 2a + 2a$.

$$a + a + 2a + 2a = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$a + a + (a + a) + (a + a)$$

c) ¿Cuántas veces aparece a en la expresión $a + a + (a + a) + (a + a)$? __________

Comenten las soluciones que obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

En una suma de expresiones algebraicas los sumandos se llaman **términos**. Por ejemplo, a y $2a$ son términos de la suma

$a + a + 2a + 2a$

Los términos tienen **coeficiente**, **literales** y **exponentes**.

El término $2a$ tiene:

Coeficiente: **2**

Literal: a

Exponente: **1**

El término a tiene:

Coeficiente: **1**

Literal: a

Exponente: **1**

El término $3a^2$ tiene:

Coeficiente: **3**

Literal: a

Exponente: **2**

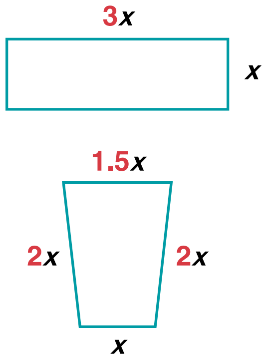
A los términos que tienen la misma **literal** con **igual exponente** como a, $3a$, $2a$, $1.5a$, se les llama **términos semejantes**.

Los **términos numéricos** son semejantes entre sí.
Por ejemplo, **8** y **–5** son términos semejantes.

$3a^2$ y $2a$ aunque tienen la misma literal no son semejantes porque no tienen el mismo exponente.

III. Un hijo de don Lencho le presentó a su papá otros diseños para construir el gallinero.

Une con una línea cada figura con la expresión de la derecha que representa su perímetro.



$8x$

$6x$

$4.5x$

$6.5x$

Comparen las soluciones que obtuvieron. Comenten:

¿Cómo sumar términos semejantes cuando los coeficientes son decimales?

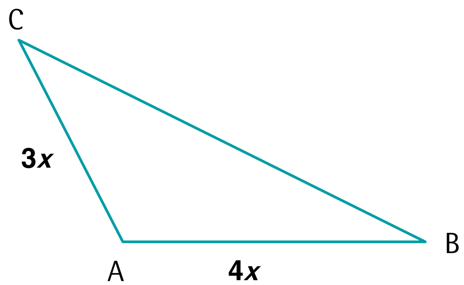
>>> A lo que llegamos

Para sumar términos semejantes se suman los coeficientes y se conserva la parte literal. Por ejemplo:

$$5.2x + 7.3x = 12.5x$$

$$5.2 + 7.3 = 12.5$$

IV. El perímetro del triángulo ABC es $13x$.



¿Cuál es la medida del lado BC? ______________________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Qué operación hicieron para encontrar la medida del lado BC?

>>> A lo que llegamos

Para restar términos semejantes se restan los coeficientes y se conserva la parte literal. Por ejemplo:

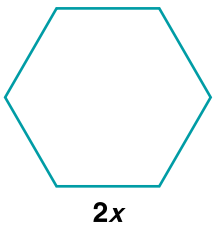
$$7x - 4x = 3x$$

$$7 - 4 = 3$$

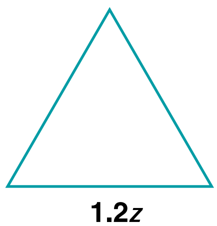
>>> Lo que aprendimos

1. El ancho de un rectángulo es $\mathbf{15}x$, y el largo tiene la medida del ancho más $\mathbf{3}x$. Dibuja en tu cuaderno el rectángulo con la medida de sus lados y escribe la expresión que corresponde a su perímetro.

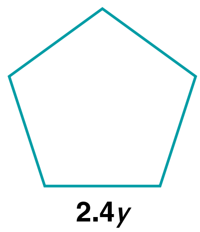
2. Escribe la expresión del perímetro para cada uno de los siguientes polígonos regulares.



P = ____________________



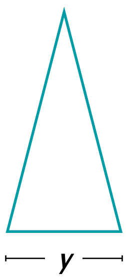
P = ____________________



P = ____________________

3. Encuentra el valor faltante en cada una de las figuras siguientes.

a)



b)

El perímetro del triángulo isósceles es $\mathbf{5}y$. ¿Cuánto mide cada uno de los lados iguales? ____________________

El perímetro del rectángulo es $\mathbf{8}y$. ¿Cuánto mide de largo?

____

A MEDIR CONTORNOS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Son **binomios** expresiones algebraicas con dos términos como las siguientes:

$x + 3$

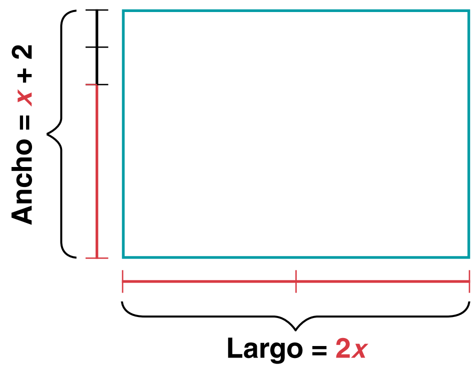
$x + z$

$y - \frac{5}{3}$

$2x^2 + 7$

>>> Consideremos lo siguiente

En el siguiente rectángulo se han determinado las medidas de la base y la altura.



a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro del rectángulo?

____

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cómo obtuvieron el perímetro del rectángulo?

>>> Manos a la obra

I. ¿Cuáles de las siguientes expresiones permiten encontrar el perímetro del rectángulo anterior? Subráyenlas.

$x + 2 + 2x$

$2x + 2x + (x + 2) + (x + 2)$

$2x + (x + 2) + 2x + (x + 2)$

$(3x + 2) + (3x + 2)$

> Recuerden que:
>
> Dos términos son semejantes cuando:
>
> 1) tienen la misma parte literal, como $3w$ y $2w$.
>
> 2) son términos numéricos, como -2, 8.

Comparen sus respuestas y comenten: ¿por qué las expresiones que señalaron representan lo mismo (el perímetro del rectángulo)?

II. En la sesión anterior aprendieron a sumar **términos semejantes**: *sumar los coeficientes y conservar la parte literal.* ¿Cómo sumarían los términos semejantes de las expresiones anteriores? Contesten las siguientes preguntas.

a) Para hacer la suma $\mathbf{2x + 2x + (x + 2) + (x + 2)}$ se suman los términos semejantes. Completen:

$$2x + 2x + (x + 2) + (x + 2) = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_$$

$$2x + 2x + x + x = \_\_\_\_\_ \qquad 2 + 2 = \_\_\_\_\_$$

El paréntesis en $(x + 2)$ *se usa para indicar que* $x + 2$ *es la medida de un lado del rectángulo y el paréntesis se puede quitar.*

b) Suma los términos semejantes de las siguientes expresiones:

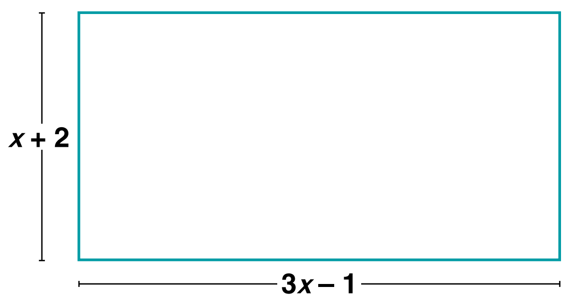
$2x + (x + 2) + 2x + (x + 2) = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_$

$x + 2 + 2x = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_$

$(3x + 2) + (3x + 2) = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_$

Comparen sus resultados.

III. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro del siguiente rectángulo?



Comparen las soluciones que obtuvieron. Sumen los términos semejantes y verifiquen si obtienen el mismo resultado.

>>> A lo que llegamos

Para sumar binomios se suman los términos que son semejantes.

$$(2x + 3) + (x - 2) = 3x + 1$$

$$2x + x = 3x \qquad 3 - 2 = 1$$

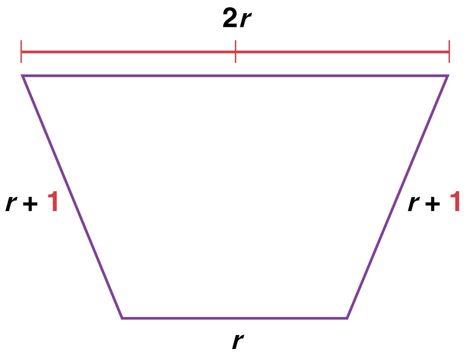
>>> Lo que aprendimos

1. La altura de un rectángulo es x, y la base es **5** unidades mayor que la altura. Dibuja en tu cuaderno el rectángulo con la medida de sus lados y escribe la expresión que corresponde a su perímetro. No te olvides de sumar los términos semejantes.

   P = ________________

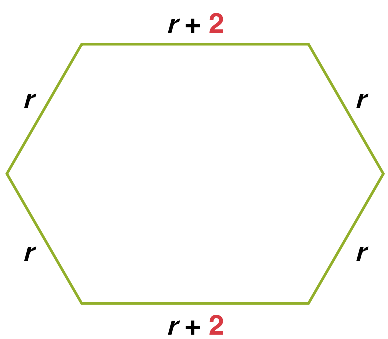
2. Escribe la expresión que corresponde al perímetro de cada polígono. No te olvides de sumar los términos semejantes.

   a)



   Perímetro: __________

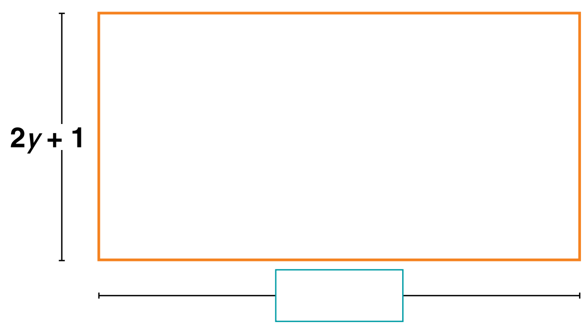
   b)



   Perímetro: __________

3. El perímetro del rectángulo de la derecha es $10y + 6$.

   ¿Cuál es la medida del largo? ________________



SESIÓN 3

LA TABLA NUMÉRICA

>>> Para empezar

En la columna x de la siguiente tabla se encuentran algunos números enteros.

Recuerda que:

$-x = -1$ por x

Los números de las columnas: $2x$, $3x$, $-3x$, $0x$, y $-x$ se obtuvieron al multiplicar el coeficiente de cada expresión algebraica por el valor de x que está en su mismo renglón.

x	$2x$	$3x$	$-3x$	$0x$	$-x$	$3x - x$	$3x + (-x)$
5	2×5=10	3×5=15	–3×5=–15	0×5=0	–1×5=–5	15 – 5 =10	15 + (–5) = 10
4	8	12	–12	0	–4	8	8
3	6	9	–9	0	–3	6	6
2	4	6	–6	0	–2	4	
1	2	3	–3	0	–1		2
0	0	0	0	0	0	0	0
–1	$2x(-1) = -2$	$3x(-1) = -3$	(–3)×(1)=+3	0×(-1)=0	(–1)×(1)=+1	(–3) – (–1)= (–3) +(+1)=–2	(–3) +(+1)=–2
–2	–4	–6	6	0	2	–4	
–3	–6	–9	9	0	3	–6	–6
–4	–8	–12	12	0	4		–8
–5	–10	–15	15	0	5	–10	

Tabla 1

Completen la tabla y coementen:

- ¿Por qué $3x - x$ equivale a restar el valor de x a $3x$?
- ¿Por qué el valor de $3x + (-x)$ equivale a sumar el valor de $-x$ a $3x$?

Recuerden que:

Para restar números enteros, al minuendo se le suma el simétrico del sustraendo:

A - B = A + *(simétrico de* **B***)*

A - B = A + (-B)

>>> Consideremos lo siguiente

Las expresiones algebraicas del renglón superior de las primeras seis columnas son: x, $2x$, $3x$, $-3x$, $0x$, y $-x$.

a) ¿Cuál de ellas es el resultado de la resta $3x - x$? ____________________

b) ¿Cuál es el resultado de la suma $3x + (-x)$? ____________________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cómo hicieron las operaciones?

>>> Manos a la obra

I. Observen la tabla 1 y contesten:

a) ¿Qué columnas tienen los mismos números que la columna $3x + (-x)$?

____

Si se agregaran la columna $2x + (-3x)$ y la columna $2x + (-x)$:

b) ¿Qué otra columna de la tabla 1 tendría los mismos números que la columna $2x + (-3x)$? ____________________

c) ¿Qué otra columna de la tabla 1 tendría los mismos números que la columna $2x + (-x)$? ____________________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Por qué creen que la columna $3x + (-x)$ tiene los mismos resultados que la columna $2x$?

>>> A lo que llegamos

Para sumar términos semejantes con coeficientes que son números con signo, se suman los coeficientes y se conserva la parte literal. Por ejemplo:

$$6x + (-8x) = -2x$$

$$6 + (-8) = 6 - 8 = -2$$

II. Agregen a la tabla 1 la columna $2x - (-x)$ y escriban los números que deben ir en cada renglón.

a) ¿Qué columna tiene los mismos números que la columna $2x - (-x)$? ____________

b) ¿Cuál es el resultado de la operación $2x - (-x)$? ____________

Si se agregaran la columna $x - (-x)$ y la columna $-x - (-3x)$:

Recuerden que:
El coeficiente de $-x$ *es* -1

c) ¿Qué otra columna de la tabla 1 tendría los mismos números que la columna $x - (-x)$? ____________

d) ¿Qué otra columna de la tabla 1 tendría los mismos números que la columna $-x - (-3x)$? ________

Comparen sus respuestas y comenten cómo encontraron el resultado de las restas anteriores.

>>> A lo que llegamos

Para restar términos semejantes con coeficientes negativos, se restan los coeficientes y se conserva la parte literal.

$$-2x - (-5x) = 3x$$

$$-2 - (-5) = -2 + (+5) = +3$$

III. Apliquen las dos reglas anteriores para encontrar el resultado de las operaciones:

a) $4x + (-x) =$ ________________________________

b) $2x - x =$ ________________________________

c) $x - (-x) =$ ________________________________

Comparen sus respuestas.

IV. Completen las siguientes operaciones sumando o restando términos semejantes.

a) $x -$ ________ $= 0x = 0$

b) $x +$ ________ $= -2x$

c) $2x +$ ________ $= 0x = 0$

d) $-3x -$ ________ $= -2x$

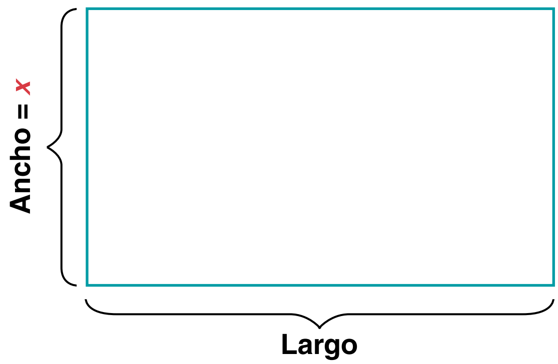
e) $x -$ ________ $= 5x$

>>> Lo que aprendimos

1. Para cada operación de la izquierda escoge su resultado de las expresiones que aparecen en la columna de la derecha.

Operaciones	Resultados posibles
a) $5x + (-3x) =$ ______	$2x$
b) $-5x - (-3x) =$ ______	$-8x$
c) $5x - (+3x) =$ ______	$-2x$
d) $-5x + (3x) =$ ______	$+8x$
e) $-3x - (-5x) =$ ______	

2. El largo de un terreno rectangular mide 12.5 metros menos que el doble del ancho. La barda que lo rodea mide 197 metros. Si el ancho mide x metros:



a) ¿Qué expresión algebraica corresponde a la medida del largo? ______

b) ¿Qué expresión corresponde al perímetro? ______

c) ¿Cuántos metros mide cada lado del terreno?

Ancho : ______ metros Largo: ______ metros

3. Un comerciante vendió cierta cantidad x de aguacate el lunes, el martes vendió 20 kg más que el lunes y el miércoles le faltaron 5 kg para vender el triple de lo que vendió el lunes. Si en los tres días vendió en total 167.5 kg de aguacate:

a) ¿Qué cantidad de esta fruta vendió cada día?

Lunes: ______ kg Martes: ______ kg Miércoles: ______ kg

b) ¿Qué día vendió un poco más de 50 kg de aguacate? ______

c) ¿Qué día vendió 86.5 kg? ______

SESIÓN 4

CUADRADOS MÁGICOS Y NÚMEROS CONSECUTIVOS

>>> Para empezar

La magia de los chinos

El origen de los cuadrados mágicos es incierto, aunque sabemos que antiguas civilizaciones los conocieron. Se piensa que su origen se da hace cerca de 400 años en la antigua China.

En el siguiente cuadrado mágico, las sumas de los tres números de cada renglón, de cada columna y de cada diagonal dan como resultado el mismo número.

13	6	11
8	10	12
9	14	7

En total hay ocho sumas. Comprueba que todas dan el mismo número como resultado.

>>> Lo que aprendimos

1. Los números consecutivos: –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1 y 2 se pueden acomodar en un cuadrado mágico para que sus renglones, columnas y diagonales sumen el mismo número. Completa el cuadrado mágico usando los números que se proporcionan.

		1
	–2	
	0	–1

Números faltantes: –6, –5, –4, –3 y 2

2. Para el siguiente cuadrado mágico los nueve números consecutivos están representados por las expresiones algebraicas: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, $n + 5$, $n + 6$, $n + 7$, $n + 8$.

Acomoda las expresiones faltantes de manera que los renglones, columnas o diagonales sumen lo mismo.

	$\boldsymbol{n}$	
	$\boldsymbol{n + 4}$	
	$\boldsymbol{n + 8}$	$\boldsymbol{n + 1}$

Expresiones que falta colocar: $n+2$, $n+3$, $n+5$, $n+6$ y $n+7$.

Haz las siguientes sumas para verificar si los renglones, columnas o diagonales suman lo mismo. No te olvides de sumar los términos semejantes.

a) Renglón superior: n + (_____) + (_____) = ________

b) Renglón central: $(n + 4)$ + (_____) + (_____) = ________

c) Renglón inferior: $(n + 8)$ + $(n + 1)$ + (_____) = ________

d) Columna izquierda: ____________________ = ________

e) Columna central: n + $(n + 4)$ + $(n + 8)$ = ________

f) Columna derecha: $(n + 1)$ + (_____) + (_____) = ________

g) Diagonal de izquierda a derecha (_____) + $(n + 4)$ + $(n + 1)$ = ________

h) Diagonal de derecha a izquierda (_____) + $(n + 4)$ + (_____) = ________

3. Realiza las siguientes sumas:

a) $1 + 2 + 3 =$ ____________

b) $2 + 3 + 4 =$ ____________

c) $15 + 16 + 17 =$ ____________

d) $n + (n+1) + (n+2) =$ ____________

e) ¿Por qué la suma de tres números consecutivos es un múltiplo de 3?

____

Recuerda que:

Los múltiplos de 3 se obtienen al multiplicar los números enteros por 3.

Son múltiplos de 3:

..., –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9, 12, ...

4. Realiza las siguientes sumas:

a) $1 + 2 + 3 + 4=$ ____________

b) $10 + 11+ 12 + 13 =$ ____________

c) $45 + 46 + 47 + 48 =$ ____________

d) $100 + 101 + 102 + 103 =$ ____________

e) $n + (n+1) + (n+2) + (n +3) =$ ____________

f) ¿Será cierto que la suma de cuatro números consecutivos es un múltiplo de 4?

____

Justifica tu respuesta ____

____

5. La suma de cinco números consecutivos es un múltiplo de 5. Realiza la siguiente suma para comprobarlo.

$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) =$ ____________

¿Por qué $5n + 10$ es múltiplo de 5? ____

____

6. La suma de nueve números consecutivos de un cuadrado mágico es un múltiplo de 9.

a) Realiza la siguiente suma para comprobarlo.

$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) + (n+7) + (n+8) =$ ____________

b) ¿Por qué el resultado de la suma anterior es un múltiplo de 9? ____________

____

>>> Para saber más

Sobre resolución de cuadrados mágicos consulta:
http://interactiva.matem.unam.mx
Ruta: Secundaria → Juegos aritméticos → Un cuadrado mágico.
[Fecha de consulta: 23 de mayo de 2007].
Proyecto Universitario de Enseñanza de la Matemáticas Asistida por Computadora (PUEMAC), UNAM.

Explora las actividades del interactivo *Suma y resta de expresiones algebraicas*.

Expresiones algebraicas y modelos geométricos

En esta secuencia reconocerás y obtendrás expresiones algebraicas equivalentes a partir del empleo de modelos geométricos

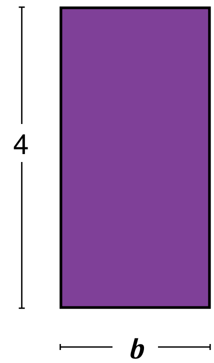
SESIÓN 1

EXPRESIONES EQUIVALENTES

>>> Para empezar

En primer año aprendiste a obtener expresiones algebraicas para calcular el área de distintas figuras geométricas. Por ejemplo, para un rectángulo de altura a y base b obtuviste la expresión ab.

De igual manera, la expresión $4b$ representa el área de un rectángulo que mide 4 unidades de altura ($a=4$) y b unidades de base.

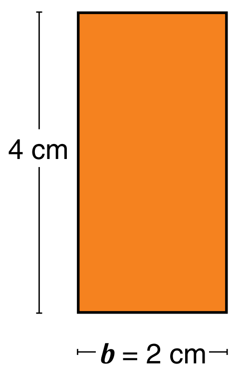


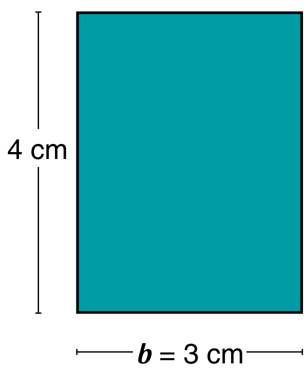
Recuerda que:

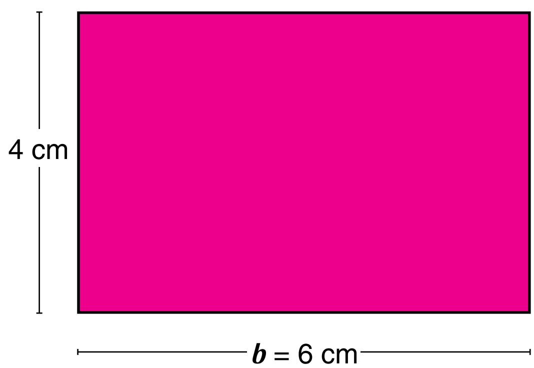
$ab = a \times b$

$4b = 4 \times b$

Los siguientes rectángulos tienen altura 4 y distintas bases: 2, 3 y 6. El área de cada uno se puede calcular usando la expresión $4b$. Calcula las áreas usando esta expresión.





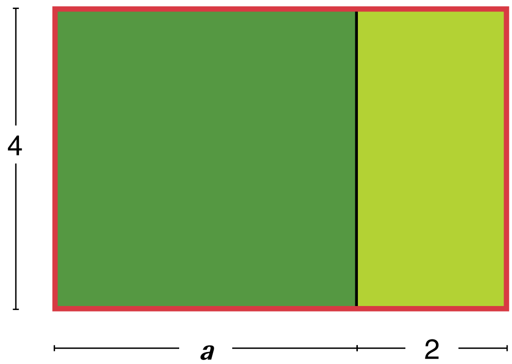


Área = ___________ **Área** = ___________ **Área** = ___________

En esta secuencia encontrarás distintas expresiones algebraicas que representan disitintas formas de calcular el área de un rectángulo. Para simplificar los cálculos omitiremos las unidades de medida de sus lados. Puedes pensar que se trata de medidas en centímetros.

>>> Consideremos lo siguiente

De las siguientes expresiones, ¿cuáles representan el área del rectángulo enmarcado en rojo?



a) $4(a + 2)$ b) $4a + 8$ c) $4a + 2$ d) $2(a + 2) + 2(a + 2)$

Recuerden que:

Para indicar que un número multiplica a una expresión se usan los paréntesis:

$5(b + 3) = 5 \times (b + 3)$

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cómo saben cuáles son correctas y cuáles no?

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la medida de la altura del rectángulo enmarcado en rojo?

altura = ____________________

b) Escriban una expresión que represente la medida de la base de este rectángulo.

base = ____________________

c) ¿Qué expresión resulta al multiplicar la medida de la altura por la medida de la base?

altura × base = ____________________

II. Realicen lo siguiente.

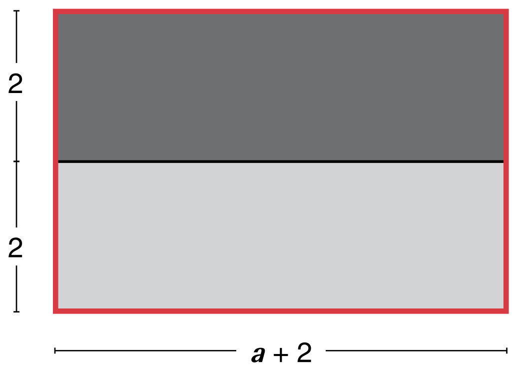
a) Escriban una expresión que represente el área del rectángulo **verde oscuro**:

b) Escriban una expresión que represente el área del rectángulo **verde claro**:

c) Observen que el área del rectángulo enmarcado en rojo es la suma del área del rectángulo **verde claro** y del **verde oscuro**. Escriban otra expresión que represente el área del rectángulo enmarcado en rojo a partir del área de los rectángulos **verde claro** y **verde oscuro**:

Comparen sus respuestas.

III. En la siguiente figura, la superficie del rectángulo enmarcado en rojo se dividió con una línea horizontal.

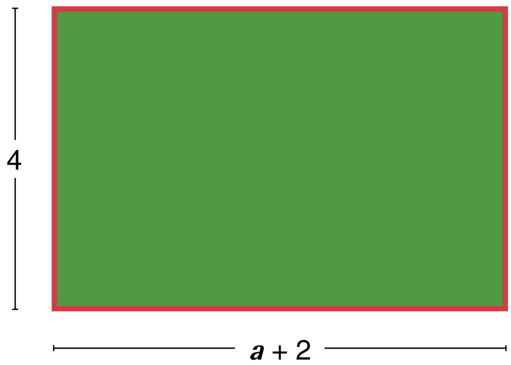


a) Escriban una expresión que represente el área del rectángulo **gris oscuro**:

b) Escriban una expresión que represente el área del rectángulo **gris claro**:

c) Usando las expresiones anteriores, escriban una expresión que represente el área del rectángulo enmarcado en rojo:

IV. Dividan el rectángulo de abajo y usen esa división para encontrar otra expresión algebraica que represente su área.



Área = ________________________________

Comparen sus respuestas y comenten la siguiente información.

Existen varias expresiones algebraicas que representan el área de un rectángulo de medidas 4 y (a + 2). Por ejemplo, las tres expresiones 4(a + 2), 4a + 8 y 2(a + 2) + 2(a + 2) representan su área.

V. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto vale la expresión 4(a + 2), si a = 3? ________________________

b) ¿Cuánto vale la expresión 4a + 8, si a = 3? ________________________

c) ¿Cuánto vale la expresión 2(a + 2)+2(a + 2), si a = 3? __________________

VI. Completen la siguiente tabla calculando el valor de las expresiones **4(a + 2)**, **4a + 8** y **2(a + 2)+2(a + 2)** para los valores de a indicados en la primera columna.

a	4(a + 2)	4a + 8	2(a + 2)+2(a + 2)
4	4(4+2)=4(6)=**24**		
4.5		4(4.5)+8=18+8=**26**	
5			
5.5			
6			2(6+2)+2(6+2)=2(8)+2(8)=16+16=**32**

Comparen los resultados que obtuvieron en las tres columnas y comenten:

¿Creen que para cualquier otro valor de a las tres expresiones coincidan? ______

Por ejemplo, ¿coincidirán para $a = 163.25$? ______

>>> A lo que llegamos

Las expresiones $4(a + 2)$, $4a + 8$ y $2(a + 2) + 2(a + 2)$ siempre dan el mismo resultado al asignarle valores a a, pues representan el área del mismo rectángulo, por lo que se puede escribir:

$$4(a + 2) = 4a + 8 = 2(a + 2) + 2(a + 2)$$

A este tipo de expresiones se les llama **expresiones equivalentes.**

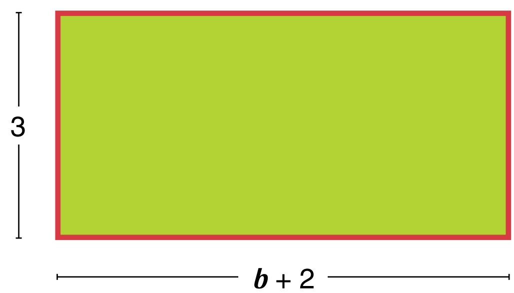
VI. Completen la siguiente tabla.

a	$4a + 2$
4	
4.5	$4(4.5) + 2 = 18 + 2 = \mathbf{20}$
5	
5.5	
6	

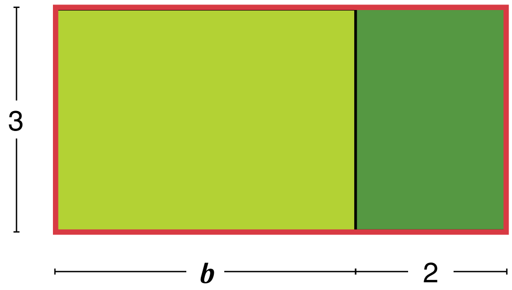
La expresión $4a + 2$ no representa el área de un rectángulo de lados que miden 4 y $(a + 2)$, ¿por qué? ______

>>> Lo que aprendimos

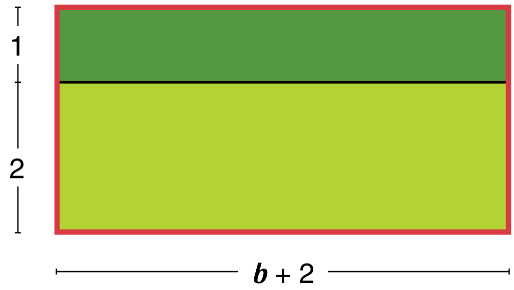
1. Las siguientes figuras son dibujos del mismo rectángulo, con distintas divisiones de su superficie. Para cada una de estas figuras escribe una expresión algebraica que represente su área a partir de la división que se propone.



Expresión: $3(b+2)$

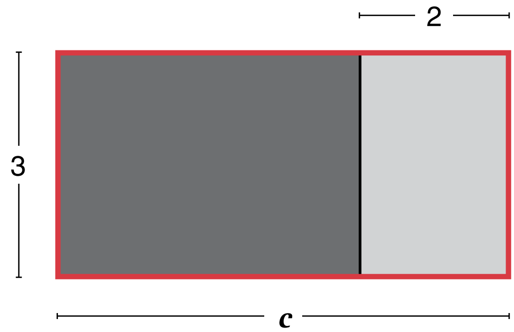


Expresión: ______________________



Expresión: ______________________

2. Encuentren dos expresiones equivalentes que representan el área del rectángulo gris oscuro a partir de la figura que se propone.



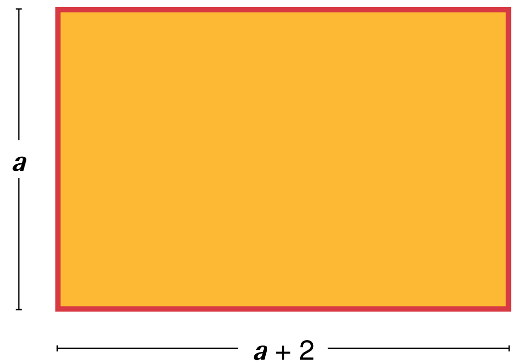
______________________ = ______________________

Expresión 1 **Expresión 2**

Llenen la siguiente tabla para verificar que las expresiones que obtuvieron dan el mismo resultado al sustituir los valores $c = 3, 3.5, 4, 4.5$ y algún otro valor que elijan.

	Expresión 1	**Expresión 2**
c		
3		
3.5		
4		
4.5		

3. Dividan la figura de la derecha en rectángulos de menor área y encuentren dos expresiones equivalentes que representen el área de la figura completa.



______________________ = ______________________

SESIÓN 2

MÁS EXPRESIONES EQUIVALENTES

>>> Para empezar

En la sesión 1 aprendiste a obtener expresiones algebraicas equivalentes a partir de un rectángulo. En esta sesión aprenderás a obtener expresiones equivalentes a partir de otra dada.

>>> Consideremos lo siguiente

Para cada una de las siguientes expresiones encuentren una expresión equivalente.

a) $3(x+2) =$ ______________________ b) $2(2x + 4) =$ ______________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo hicieron para encontrarlas.

>>> Manos a la obra

I. Dibujen un rectángulo cuya área se represente con la expresión $3(x+2)$

Expresión	Rectángulo
$3(x+2)$	

Dividan la superficie del rectángulo anterior en varios rectángulos pequeños. Encuentren las expresiones que corresponden al área de cada uno de los rectángulos pequeños y anótenlas:

$3(x+2) =$ ______________________________________

Comparen sus respuestas. Comenten cómo dividieron la superficie del rectángulo grande y cómo encontraron el área de cada uno de los rectángulos pequeños.

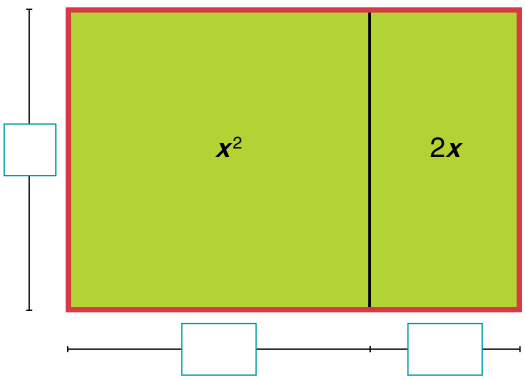
II. Dibujen un rectángulo cuya área se represente con la expresión $\mathbf{2(2x + 4)}$, divídanlo en rectángulos más pequeños y encuentren sus áreas.

Expresión	Rectángulo
$2(2x + 4)$	

$2(2x + 4) =$ ______________________________

Comparen sus respuestas y comenten: ¿son equivalentes las expresiones que obtuvieron? ¿Por qué?

III. Usen la siguiente figura para encontrar una expresión equivalente a $x^2 + 2x$.

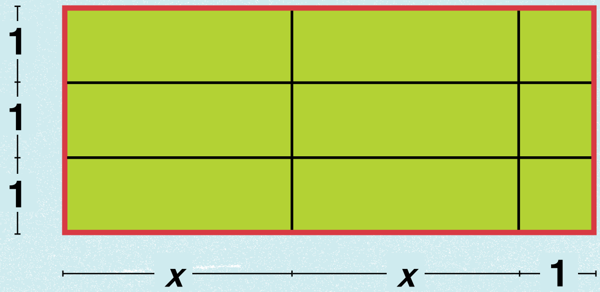


$x^2 + 2x =$ ______________________________

>>> A lo que llegamos

Más expresiones equivalentes

Cuando se quiere encontrar una expresión equivalente a otra dada, puede ser útil construir un rectángulo cuya área se represente con la expresión. Por ejemplo, para la expresión dada $3(2x + 1)$ se puede construir un rectángulo que mida 3 unidades de altura y $2x+1$ unidades de la base:



Dividiendo este rectángulo en piezas de menor área se puede ver que la expresión $6x+3$ también sirve para calcular su área, y por lo tanto es equivalente a la expresión $3(2x+1)$.

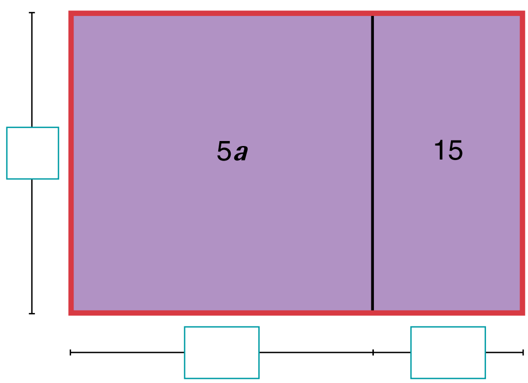
>>> Lo que aprendimos

1. Para cada una de las siguientes expresiones encuentra una expresión equivalente a ésta.

   a) $3(2x+3)$ = ________________ b) $x(2x+4)$ = ________________

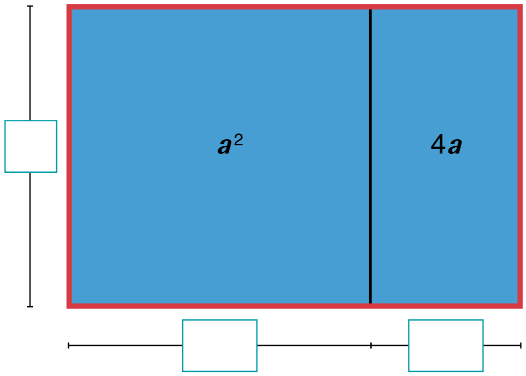
2. Para cada uno de los siguientes rectángulos anota las medidas de sus lados en los espacios marcados, y después usa la figura para escribir dos expresiones equivalentes que representen su área.

   a)



________________ = ________________

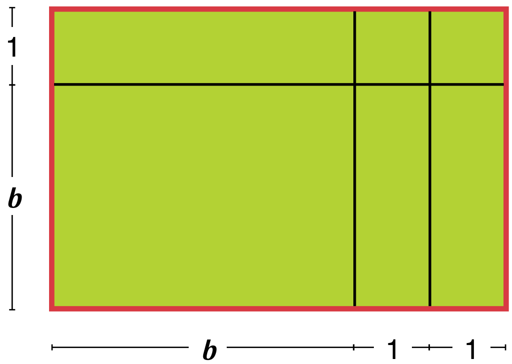
b)



________________ = ________________

3. Ayúdate de la siguiente figura para encontrar una expresión equivalente a la expresión

$(b + 1)(b + 2) =$ ______________________________



>>> Para saber más

Sobre otras expresiones algebraicas equivalentes a partir de modelos geométricos consulta:

http://www.interactiva.matem.unam.mx

Ruta: Álgebra → Una embarrada de álgebra → Binomio al cuadrado

[Fecha de consulta: 24 de mayo de 2007].

Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora (PUEMAC), UNAM.

SECUENCIA 4

Ángulos

En esta secuencia determinarás la medida de ángulos usando tu transportador, y deducirás algunas medidas sin usarlo.

SESIÓN 1

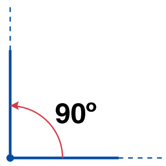
MEDIDAS DE ÁNGULOS

>>> Para empezar

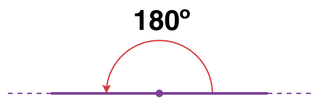
El grado como unidad de medida

La regularidad de los fenómenos naturales y astronómicos interesó a hombres de todos los tiempos. Antiguas civilizaciones, como la babilónica, estimaron la duración del año en 360 días. Como estas civilizaciones pensaban que el Sol giraba alrededor de la Tierra, dividieron en **360** partes la trayectoria en la que veían moverse al Sol, haciendo corresponder a cada parte un día y una noche. Es probable que de esta división se derive la división de un giro completo en 360 partes, llamadas **grados**.

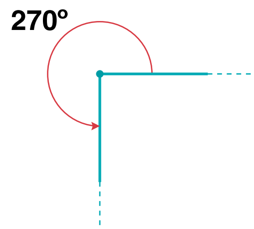
Los siguientes son algunos ángulos que encontrarás frecuentemente en tus secuencias de geometría. Observa sus medidas y sus nombres.



Ángulo recto

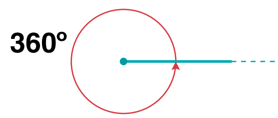


Ángulo llano



Ángulo entrante

Son los ángulos que miden más de 180° y menos de 360°

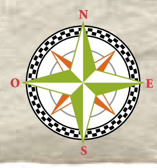


Ángulo perigonal

>>> Consideremos lo siguiente

En el baúl de su papá, Jaime encontró un viejo pergamino en el que se indica cómo y dónde encontrar un cofre lleno de monedas de oro. Las indicaciones para llegar al tesoro estaban claras, pero una mancha de agua borró el mapa. Sigue las indicaciones y ayúdale a Jaime a reproducir el mapa. Supón que un paso es igual a un centímetro.

Para encontrar el cofre tienes que llegar a la meseta del Cerro Colorado y caminar hasta el monolito que ahí encuentres. Luego, tienes que sentarte en el monolito viendo hacia al Este, gira 60° al Norte y camina de frente 3 pasos. En ese punto clava una estaca. Regresa al monolito y siéntate viendo al oeste. Gira 150° al sur y camina de frente 4 pasos, en este punto clava otra estaca. El cofre está enterrado justo a la mitad de la distancia entre las dos estacas.

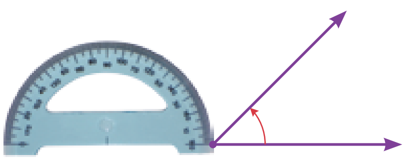


Comparen sus mapas y comenten cómo hicieron para reconstruirlos.

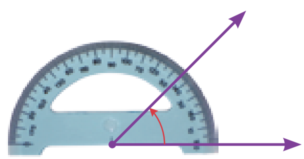
>>> Manos a la obra

I. Encierra con un círculo las ilustraciones en las que el transportador se utilice de manera correcta para medir el ángulo.

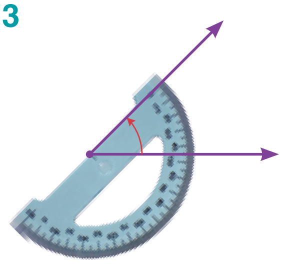
1



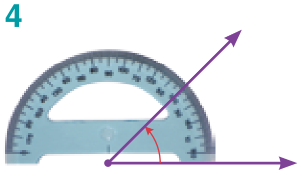
2



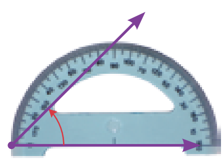
3



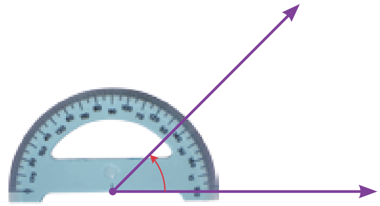
4



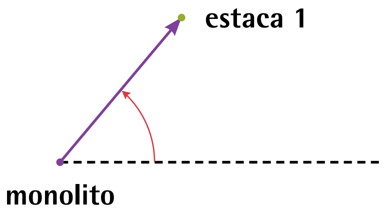
5

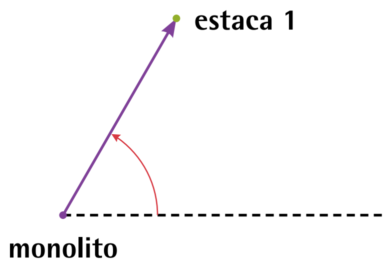


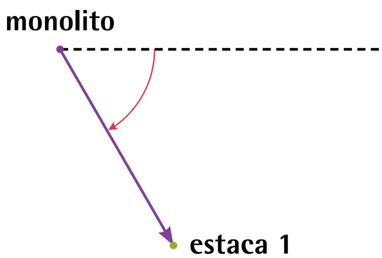
Comparen sus respuestas y comenten los errores que descubrieron en el uso del transportador en las ilustraciones. Comenten ¿en la ilustración de abajo se está midiendo de manera correcta el ángulo?

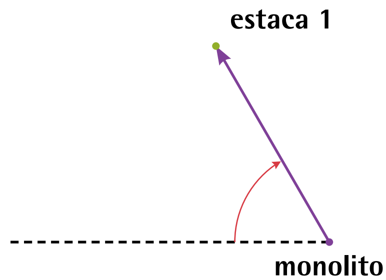


II. ¿Cuál de los siguientes ángulos cumple con las indicaciones del mapa para determinar el lugar de la primera estaca?





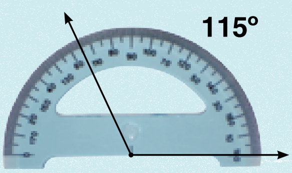


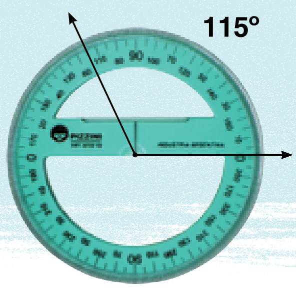


Comparen sus resultados y comenten los errores que descubrieron en los ángulos. Verifiquen sus mapas. Si es necesario, háganlos otra vez.

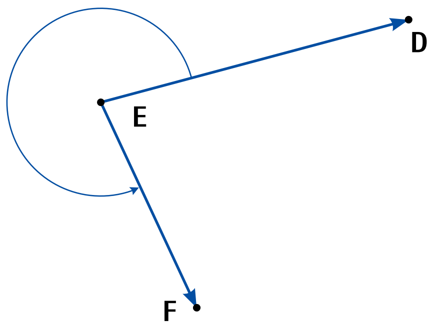
>>> A lo que llegamos

Al medir un ángulo hay que colocar la **marca central del transportador** sobre el vértice del ángulo. La marca que corresponde a **0°** debe coincidir con un lado del ángulo.





III. A continuación se presenta una forma de medir ángulos mayores de 180°.



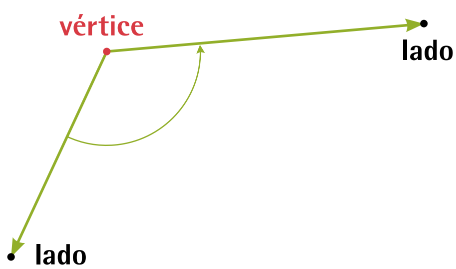
Prolonga uno de los lados del ángulo marcado de forma que la prolongación lo divida en dos ángulos.

a) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos que se formaron? ________ y ________

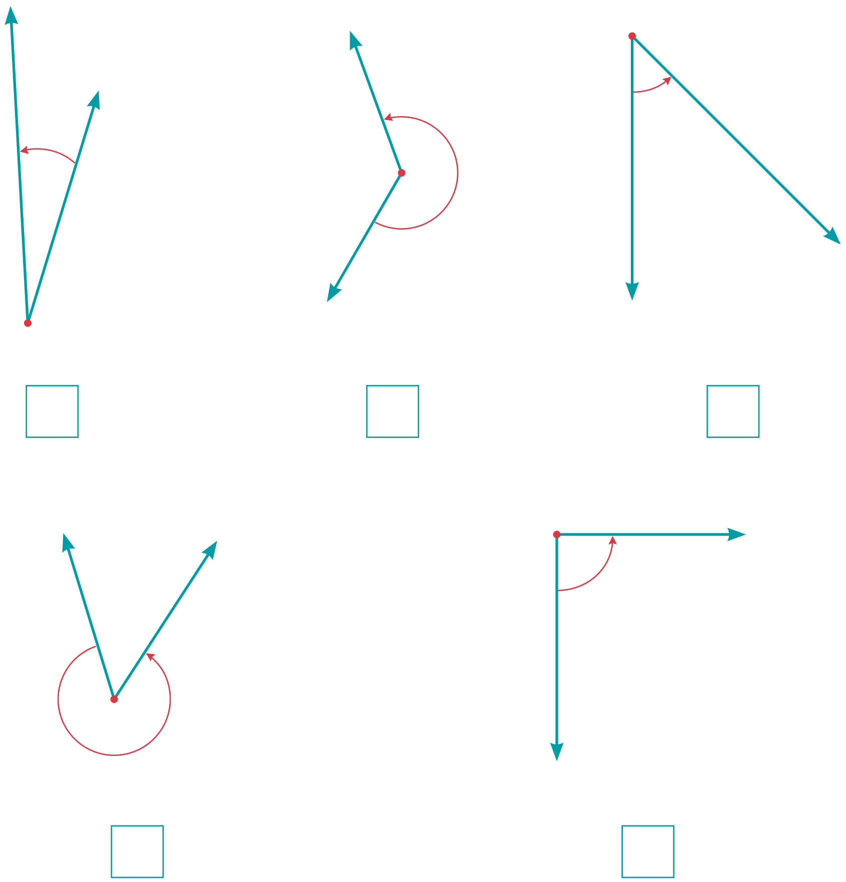
b) ¿Cuánto mide el **ángulo marcado** originalmente? ____________________

Comparen sus respuestas y comenten: ¿habrá alguna otra manera de medir un ángulo mayor que 180°? ¿Cuál?

IV. Recuerda que un **ángulo** está formado por dos semirrectas que tienen el mismo punto inicial. A las semirrectas se les llama **lados** del ángulo. Al punto inicial se le llama **vértice**.



Anota en los cuadritos los números del **1** al **5** para ordenar de mayor a menor los siguientes ángulos.



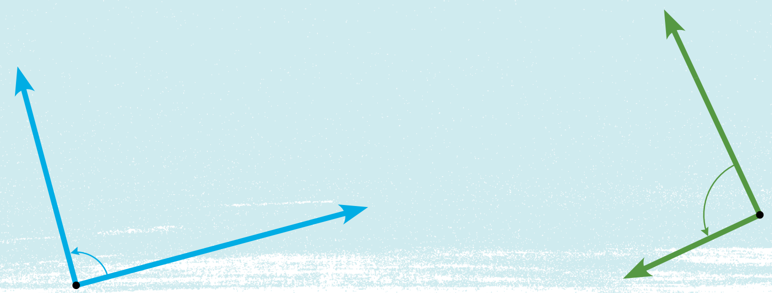
Comparen sus respuestas. Comenten:

a) ¿En qué se fijaron para comparar los ángulos?

b) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos?

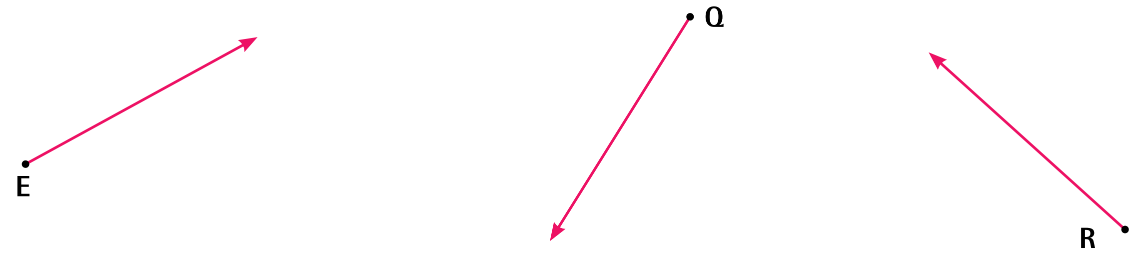
>>> A lo que llegamos

La medida de un ángulo no depende de la longitud de sus lados. Por ejemplo, el ángulo azul y el ángulo verde miden 100°.



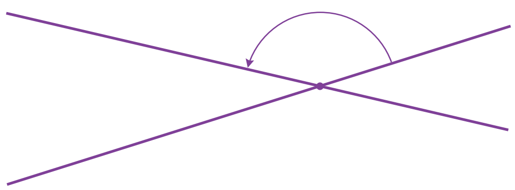
>>> Lo que aprendimos

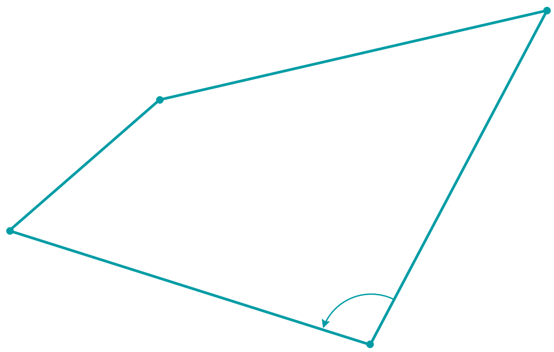
1. Considera las siguientes semirrectas como un lado y su punto inicial como vértice. Construye los ángulos que se piden, utiliza tu transportador.



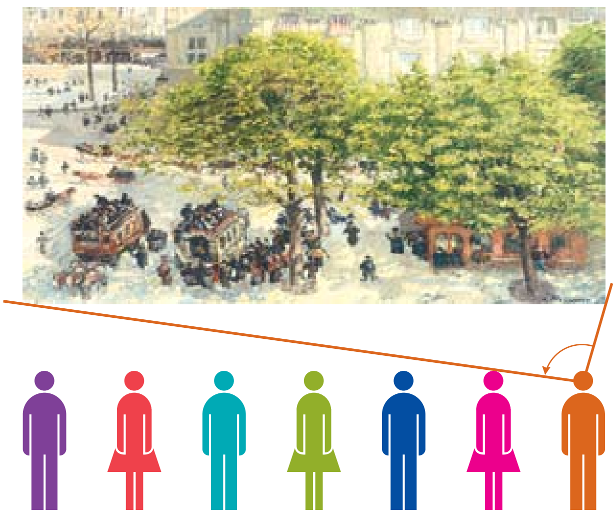
120° 210° 70°

2. Usa tu transportador y determina cuánto miden los ángulos marcados.





3. Varios estudiantes fueron al museo y se pararon frente a una de las pinturas para observarla mientras escuchaban la explicación del guía. Las figuras muestran la forma como se acomodaron los estudiantes. A fin de ver la pintura completa, identifica quién tiene el mayor ángulo.



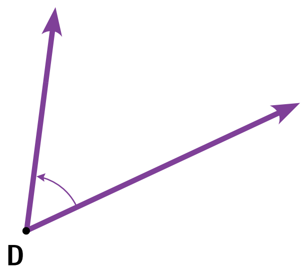
¿Cuál de todos tiene el mayor ángulo para ver la pintura completa? ____________

SESIÓN 2

ÁNGULOS INTERNOS DE TRIÁNGULOS

>>> Para empezar

Un ángulo se puede representar por medio de una letra mayúscula asignada a su vértice. Por ejemplo, el siguiente ángulo se puede representar como ∡**D**.



>>> Consideremos lo siguiente

¿Cuáles de las siguientes ternas son las medidas de los ángulos internos de un triángulo? Construye el triángulo correspondiente. Utiliza el segmento **AB** como uno de los lados.

a) **30°, 60°, 70°**

¿Pudiste construir el triángulo? ____________

Justifica tu respuesta ____

b) **50°, 70°, 120°**

¿Pudiste construir el triángulo? ____________

Justifica tu respuesta ____

c) **50°**, **60°**, **70°**

¿Pudiste construir el triángulo? ______

Justifica tu respuesta ______________________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo construyeron sus triángulos.

>>> Manos a la obra

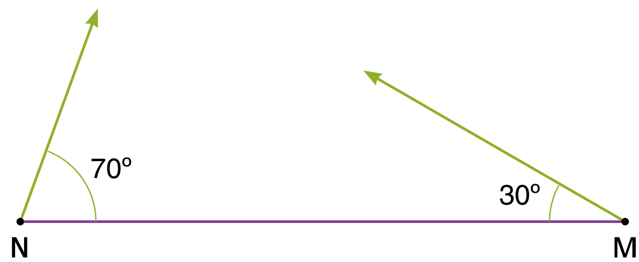
I. La siguiente figura muestra una construcción incompleta en la que se intenta construir el triángulo con la terna de medidas **30°**, **60°** y **70°** y con el segmento **NM** como uno de sus lados. Completa la construcción.

a) Con tu transportador mide el tercer ángulo interno de este triángulo.

¿Cuánto mide? ______

b) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos de este triángulo?

______



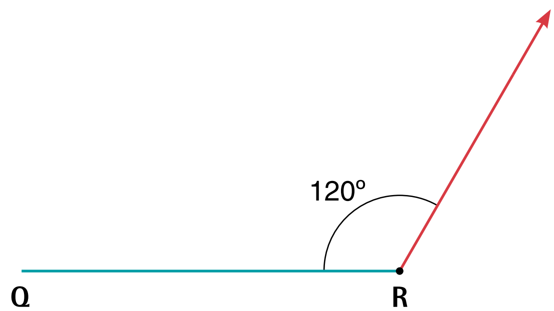
Comparen sus respuestas.

II. En la siguiente figura se intenta construir un triángulo con la terna **50°**, **70°** y **120°** como medidas de sus ángulos internos y con el segmento **QR** como uno de sus lados. Completa la construcción.

¿Pudiste construir el triángulo? ______

Justifica tu respuesta ______

______

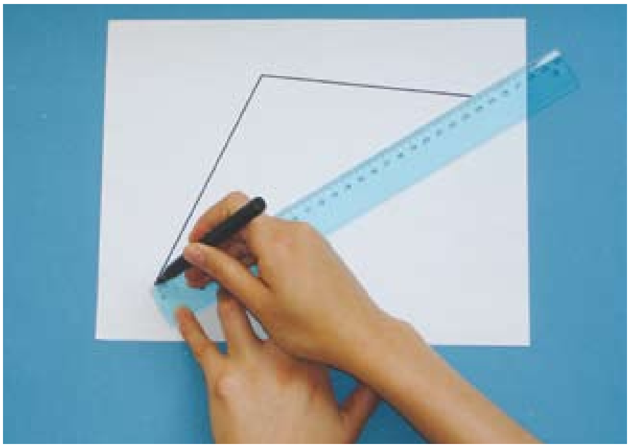


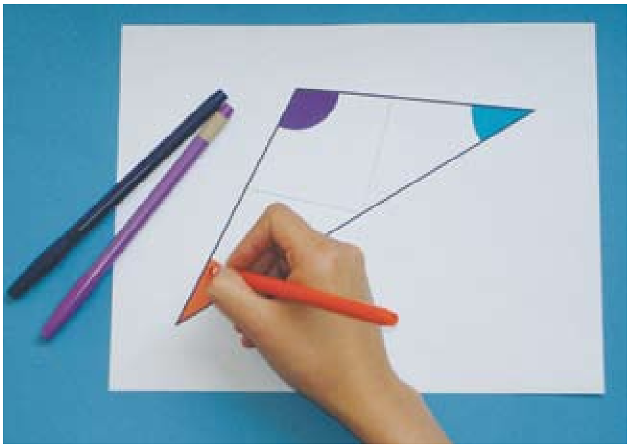
Comparen sus construcciones y comenten:

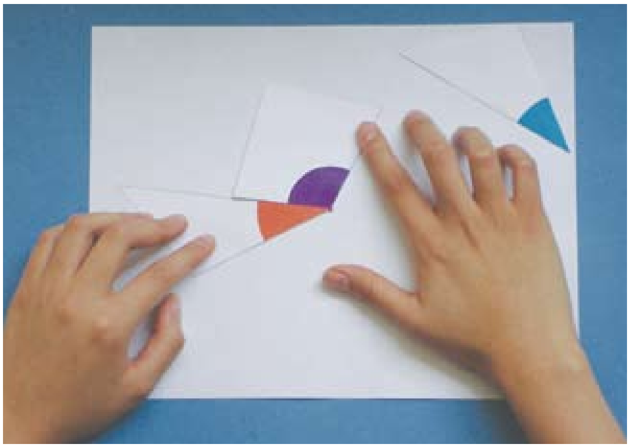
a) Si el ángulo en el vértice **Q** mide **50**°, ¿cuánto mide el tercer ángulo interno?

b) ¿Se puede construir un triángulo con dos ángulos internos que midan **70**° y **120**°? ¿Por qué?

III. Dibuja un triángulo en una hoja blanca, pinta cada uno de sus ángulos internos de un color distinto. Corta el triángulo en tres partes de manera que en cada parte quede uno de los ángulos internos. Pega las tres partes haciendo coincidir los vértices en un **punto rojo**, como se indica en las fotos. Ten cuidado de que no se encimen las partes y que no dejen huecos entre ellas.





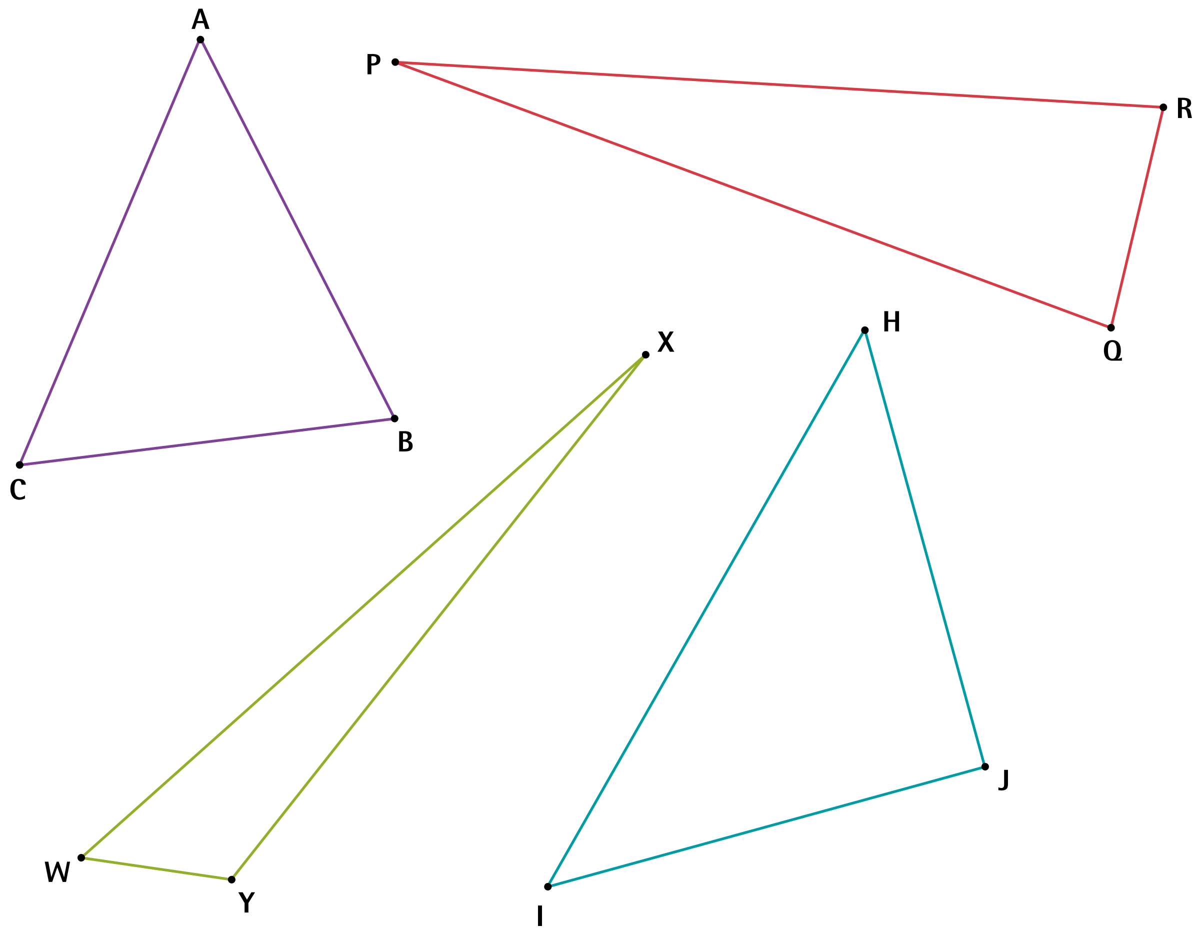


¿Cuánto mide el ángulo que se obtiene al pegar los tres ángulos del triángulo que dibujaste? ______________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Creen que si dibujan otro triángulo, la medida del ángulo formado al pegar sus tres ángulos internos sea la misma? ¿Por qué?

IV. Mide los ángulos internos de los siguientes triángulos. Anota las medidas en la tabla.



Triángulo	Ángulo	Ángulo	Ángulo	Suma de las medidas de los tres ángulos internos
△ABC	∡A=			
△WXY		∡W=		
△PQR				
△HIJ			∡J=	

>>> A lo que llegamos

La suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180°.

>>> Lo que aprendimos

1. Los triángulos equilateros tienen sus tres ángulos internos iguales. Sin usar transportador, contesta la pregunta.

¿Cuánto mide cada uno de los ángulos internos de cualquier triángulo equilátero? ________________

Recuerda que:

Se llaman triángulos equiláteros aquellos que tienen sus tres lados iguales.

SESIÓN 3

DEDUCCIÓN DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

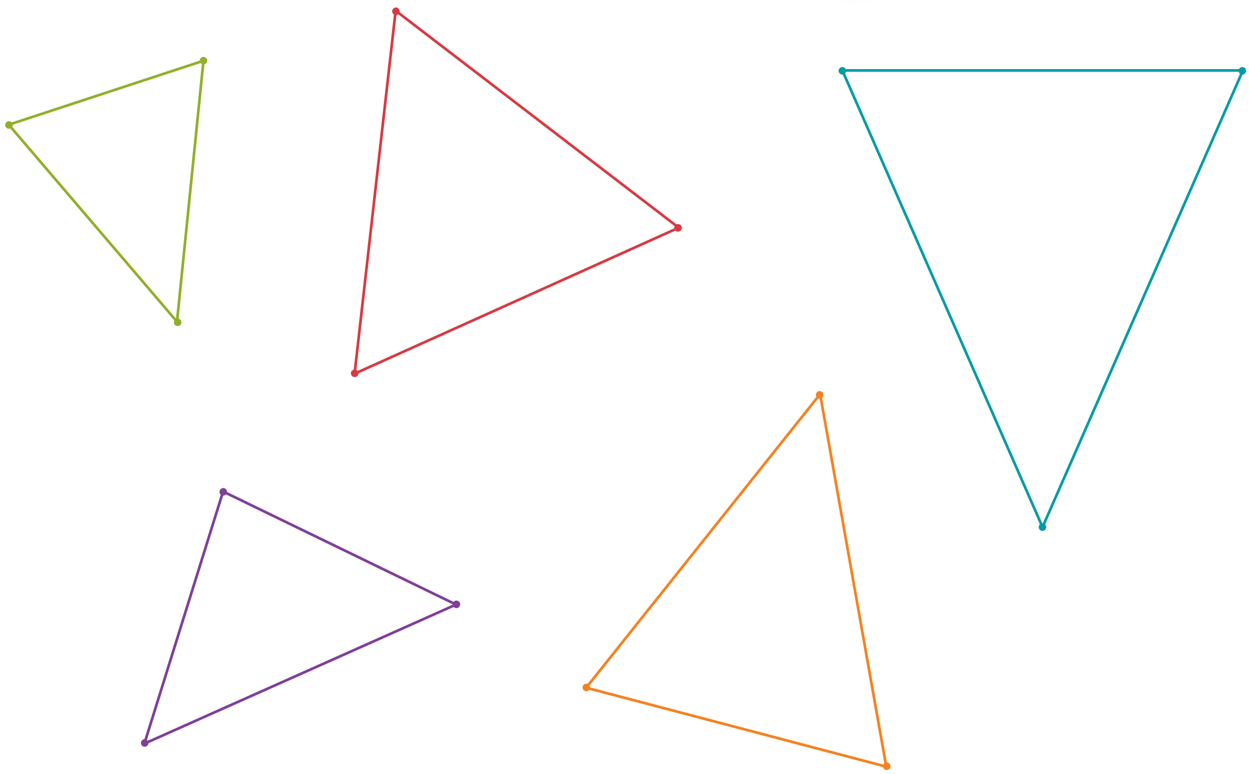
>>> Para empezar

¿Sabías que en todos los triángulos isósceles **dos de sus ángulos internos son iguales**?

Verifica esta propiedad en los siguientes triángulos isósceles y pinta del mismo color los ángulos que sean iguales.

Recuerda que:

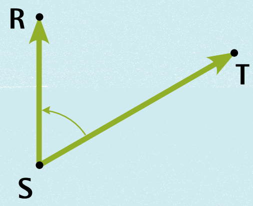
Se llaman triángulos isósceles los triángulos que tienen dos lados iguales.



A continuación se presentan varios problemas sobre medidas de ángulos.

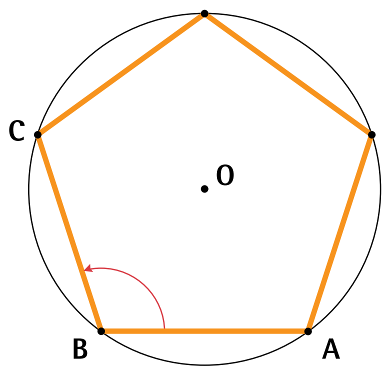
>>> Lo que aprendimos

Otra forma de representar ángulos es con tres letras mayúsculas, una para el vértice y dos para un punto de cada lado del ángulo. Así, el ángulo



se representará como ∡TSR. Observen que la letra correspondiente al vértice se coloca en medio de las otras dos.

1. El pentágono regular está inscrito en un círculo de centro **O** y radio **OA**.



Sin utilizar instrumentos de medición responde: ¿cuánto mide ∡**ABC**? ____________

Comparen y comenten sus respuestas.

Responde las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto mide el ángulo central del pentágono? ____________

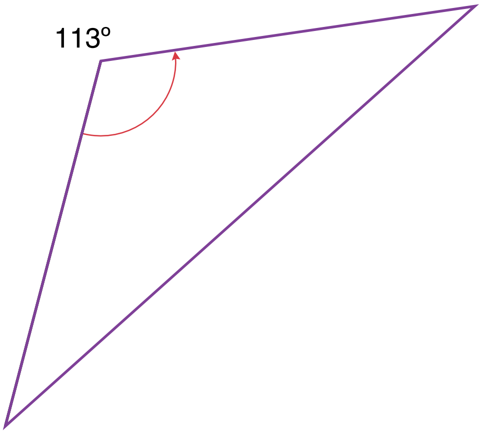
b) ¿Qué tipo de triángulo es **OAB**? ____________

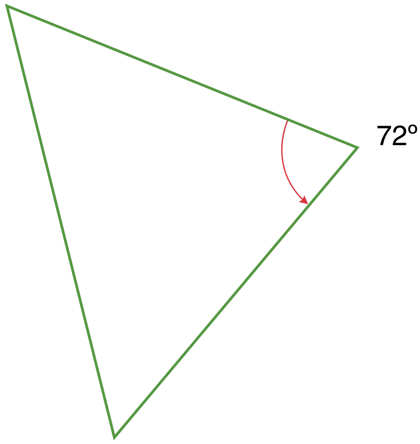
c) ¿Cuánto miden ∡**OAB** y ∡**OBA**? ____________

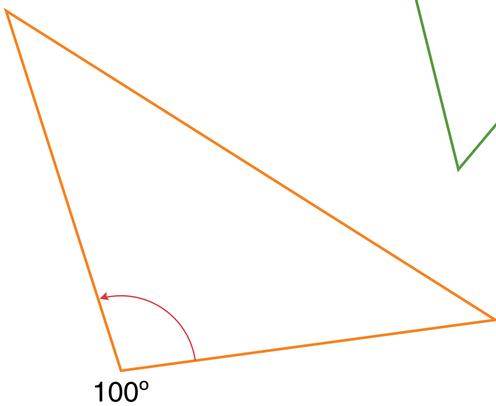
d) ∡**OBA** = ∡**OBC** ¿por qué? ____________

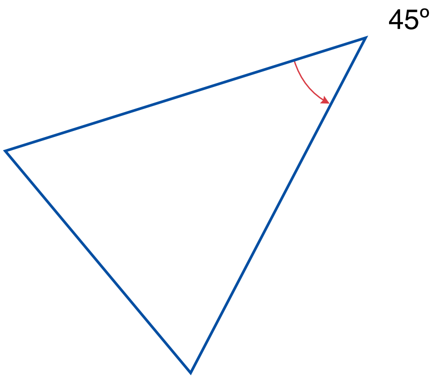
____

2. En los siguientes triángulos isósceles se marcó la medida del ángulo formado por los lados iguales. Selecciona del recuadro las medidas de los ángulos faltantes y anótalas en el triángulo correspondiente.



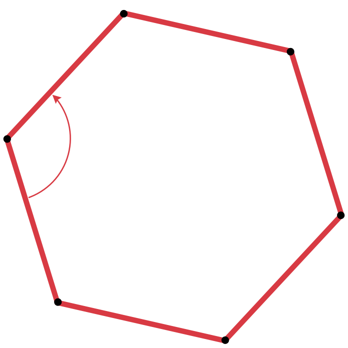




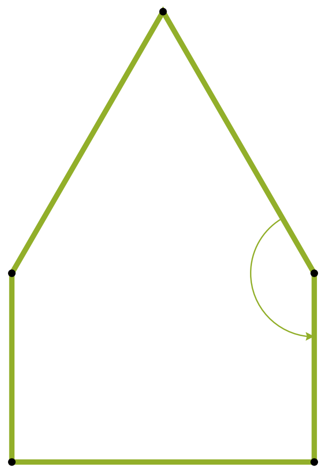


54°	**80°**	**67.5°**	**33.5°**	**40°**

3. Determina el valor de los ángulos marcados y escribe en tu cuaderno el proceso que utilizaste para determinar el valor de cada uno.

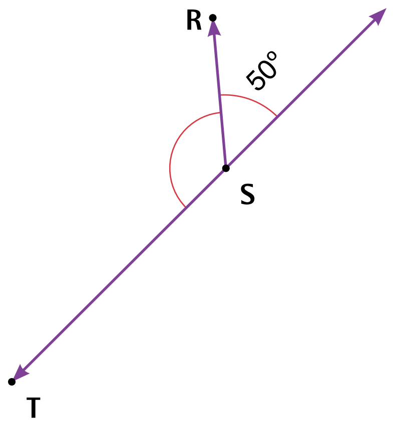


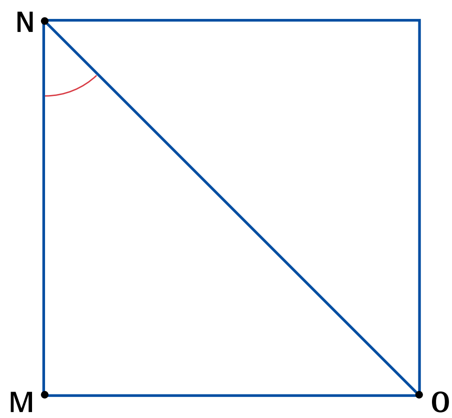
Hexágono regular



Pentágono formado por un rectángulo y un triángulo equilátero

4. Sin utilizar instrumentos de medición, determina la medida de los ángulos marcados con rojo en las ilustraciones.





∡RST = ____________

∡MNO = ____________

>>> Para saber más

Sobre ángulos y cómo interactuar con ellos consulta:
http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Medicion_de_angulos/index.htm
Ruta 1: El transportador de ángulos
Ruta 2: Ángulos complementarios y suplementarios
[Fecha de consulta: 24 de mayo de 2007].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

SECUENCIA 5

Rectas y ángulos

¿Cómo se llaman las rectas que no se cortan?, ¿y las que sí se cortan?; cuando dos rectas se cortan se forman cuatro ángulos, ¿cómo se relacionan sus medidas?

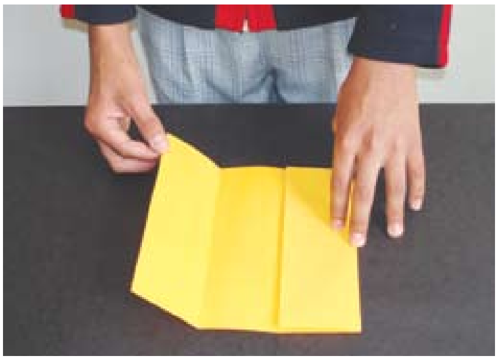
Este tipo de preguntas son las que podrás contestar cuando termines de estudiar esta secuencia.

SESIÓN 1

RECTAS QUE NO SE CORTAN

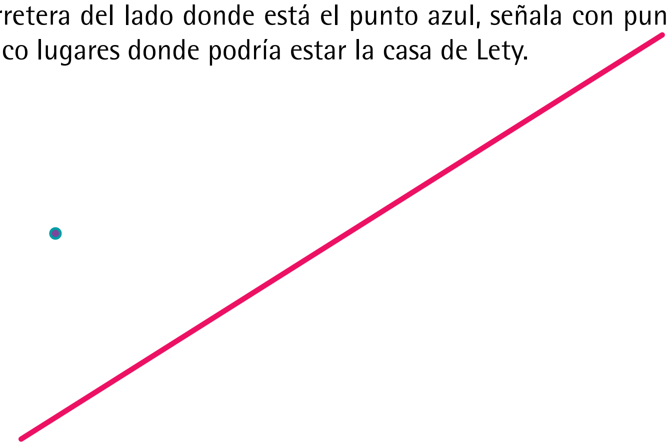
>>> Para empezar

Desde la escuela primaria has estudiado el trazo de paralelas usando distintos recursos, ¿lo recuerdas? Uno de esos recursos fue el doblado de papel. Consigue una hoja y haz los dobleces tal como se muestra en la figura y marca las rectas paralelas. Después pega la hoja en tu cuaderno.



>>> Consideremos lo siguiente

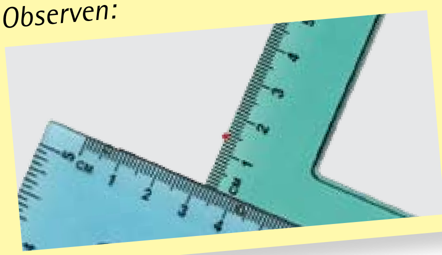
Consideren que la recta roja representa una carretera y que 1 cm representa 1 km. La casa de Lety está situada a 2 km de la carretera del lado donde está el punto azul, señala con puntos cinco lugares donde podría estar la casa de Lety.



Recuerden que:

La distancia de un punto a una recta se mide sobre la perpendicular del punto a la recta.

Observen:



Si localizaron bien los cinco puntos podrán unirlos con una línea recta, tracen esa línea recta.

a) ¿Cómo son entre sí la recta roja y la que acaban de trazar? ______________________

b) Anoten dos cosas de su alrededor que representen rectas paralelas.

______________________ y ______________________

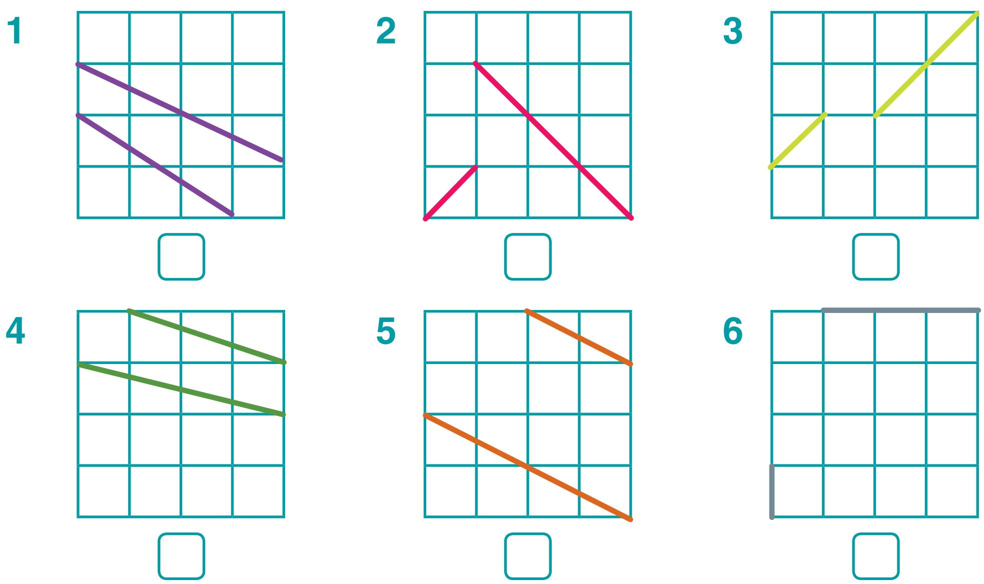
c) Escriban una definición para rectas paralelas. ______________________

____

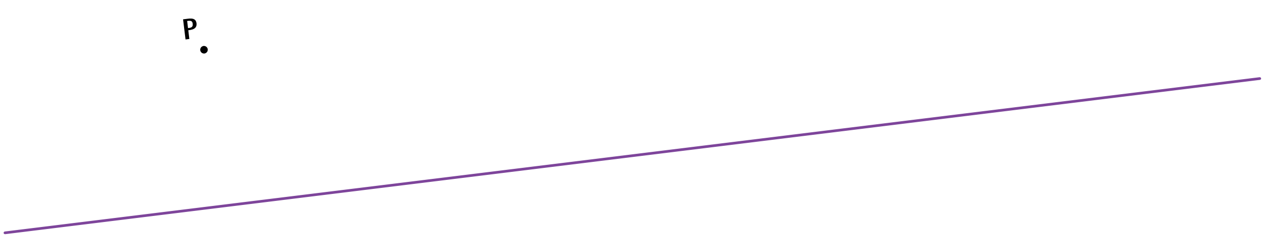
Comparen las diferentes definiciones de rectas paralelas con sus compañeros y, entre todos, elijan aquellas que les parezcan adecuadas. Si creen que alguna es incorrecta traten de dar un ejemplo de por qué la consideran incorrecta.

>>> Manos a la obra

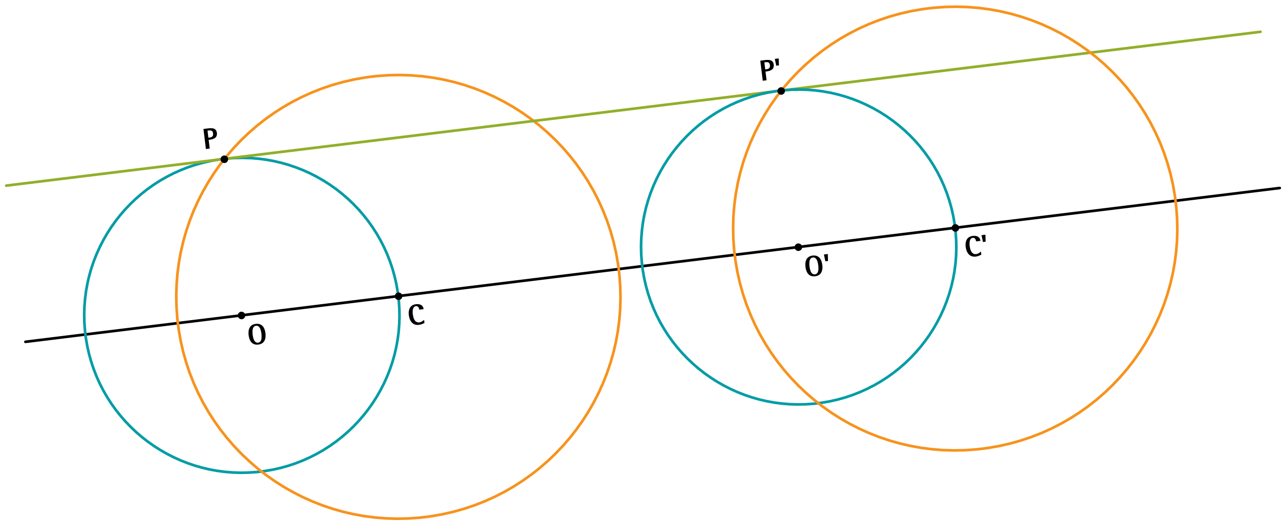
I. En cada caso marquen con ✓ si las rectas representadas son paralelas.



II. Se desea trazar una paralela a la recta que pase por el punto P.



La siguiente figura muestra un procedimiento completo con el que, usando regla y compás, se trazó una recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta negra.



Analicen la figura y

a) Reprodúzcanla en su cuaderno.

b) Escriban con sus propias palabras la secuencia de pasos que siguieron.

III. Subrayen las dos definiciones correctas de rectas paralelas. En cuanto a las incorrectas, busquen un ejemplo para mostrar por qué lo son.

a) Son rectas horizontales.

b) Son rectas que siempre conservan la misma distancia entre sí.

c) Son rectas que no se cortan.

d) Son rectas que tienen la misma medida.

>>> A lo que llegamos

Las rectas que no se cortan se llaman rectas paralelas.

Si una recta *m* es paralela a la recta *n*, esto se escribe: *m* II *n*.

>>> Lo que aprendimos

1. Busca una manera de trazar rectas paralelas usando sólo regla y transportador. Cuando lo hayas hecho comenta en grupo los diferentes procedimientos, y si en alguno no están de acuerdo argumenten sus razones (pista: analiza los dobleces que hiciste al inicio de la sesión, te ayudará a resolver este problema).

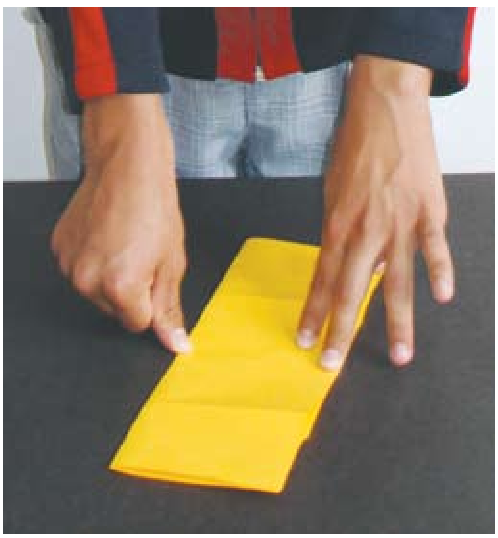
2. En cada caso, traza una recta paralela a la recta ℓ que pase por el punto M.

RECTAS QUE SE CORTAN

SESIÓN 2

>>> Para empezar

También las rectas perpendiculares pueden trazarse usando distintos recursos, como el doblado de papel. Consigue una hoja y haz los dobleces que se muestran en la figura, marca las rectas perpendiculares y después pega la hoja en tu cuaderno.



>>> Consideremos lo siguiente

En el primer recuadro tracen dos rectas que se corten formando cuatro ángulos iguales y en el segundo recuadro tracen dos rectas que se corten formando ángulos que no sean todos iguales.

a) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del primer recuadro?

____

b) Si trazaron bien las rectas del primer recuadro, se trata de dos rectas perpendiculares. Anoten dos cosas de su alrededor que representen rectas perpendiculares. _______________

____

c) Escriban una definición para rectas perpendiculares.

____

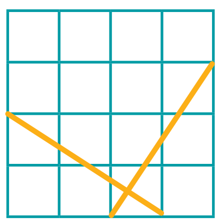
d) Las rectas que trazaron en el segundo recuadro se llaman oblicuas. Escriban una definición para rectas oblicuas.

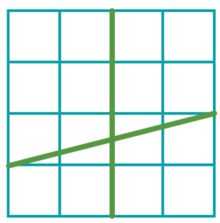
____

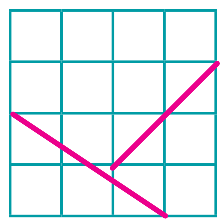
Comparen las diferentes definiciones de rectas perpendiculares y rectas oblicuas con las de sus compañeros y entre todos elijan aquellas que les parezcan adecuadas. Si creen que alguna es incorrecta traten de dar un ejemplo de por qué lo es.

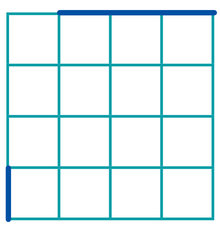
>>> Manos a la obra

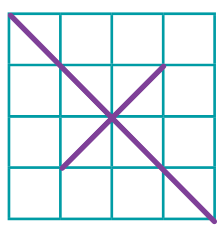
I. En cada caso anoten si las rectas representadas son perpendiculares u oblicuas.

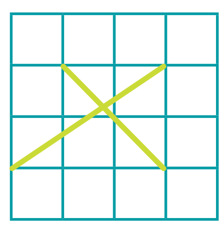
1


2


3


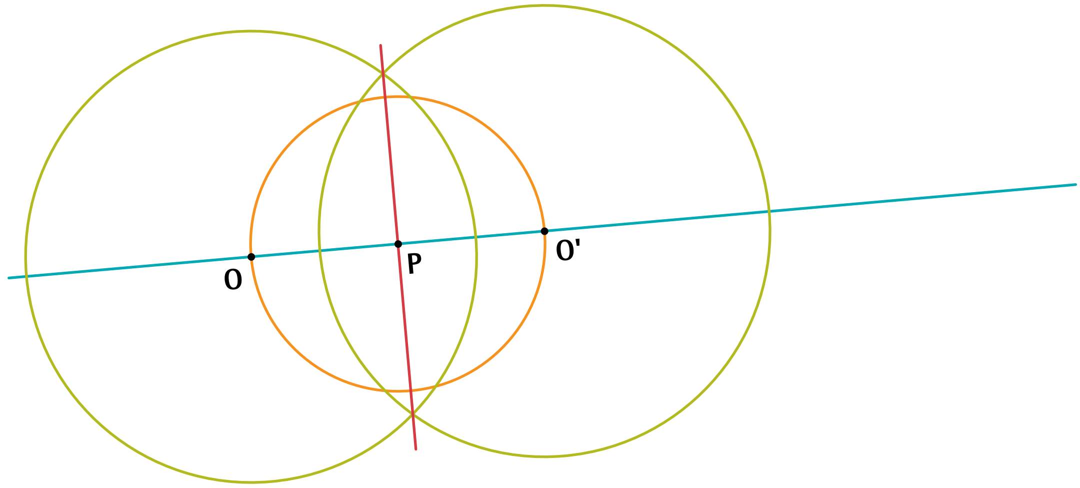
4


5


6


II. Se desea trazar una recta que pase por el punto P y que sea perpendicular a la recta dada.

La siguiente figura muestra un procedimiento completo para hacer el trazo con regla y compás.



Analicen la figura y

a) Reprodúzcanla en su cuaderno.

b) Escriban con sus propias palabras la secuencia de pasos que siguieron.

III. Subrayen las dos definiciones correctas para rectas perpendiculares y para rectas oblicuas, para las otras definiciones den un ejemplo de por qué las consideran incorrectas.

Rectas perpendiculares:

a) Son dos rectas, una vertical y otra horizontal

b) Son rectas que se cortan formando ángulos rectos

c) Son rectas que no se cortan

d) Son rectas que al cortarse forman cuatro ángulos iguales

Rectas oblicuas:

a) Son rectas que se cortan formando ángulos iguales

b) Son rectas que se cortan formando dos ángulos agudos y dos obtusos

c) Son rectas que se cortan formando ángulos que no son rectos

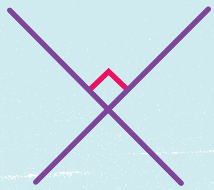
d) Son rectas que no se cortan

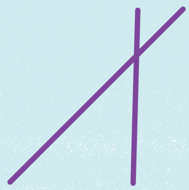
>>> A lo que llegamos

Si dos rectas que se cortan forman ángulos de 90°, entonces se llaman rectas perpendiculares; si se cortan formando ángulos que no son de 90°, se llaman rectas oblicuas.

Si una recta *p* es perpendicular a la recta *q*, esto se escribe: $p \perp q$.

Para indicar que un ángulo mide 90°, es decir, que es recto, se coloca en el ángulo una marca como la roja.





>>> Lo que aprendimos

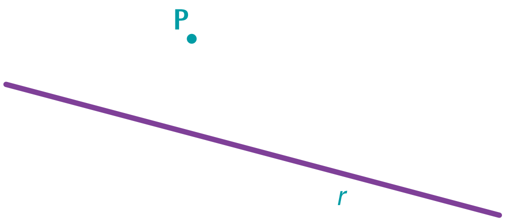
1. Busquen una manera de trazar rectas perpendiculares usando sólo regla y transportador; cuando lo hayan hecho comenten en grupo los diferentes procedimientos, si en alguno no están de acuerdo argumenten sus razones.

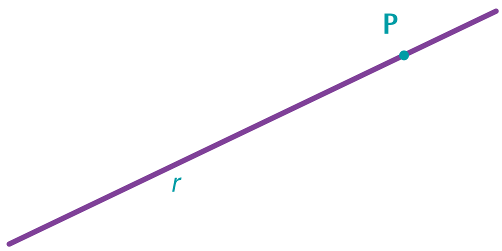
2. Realicen los siguientes trazos en una hoja blanca, utilizando sus instrumentos geométricos.

   a) Un cuadrado de cualquier tamaño cuyos lados no sean paralelos a los bordes de la hoja.

   b) Un rectángulo de cualquier tamaño cuyos lados no sean paralelos a los bordes de la hoja.

3. En cada caso, tracen una recta perpendicular a la recta *r* que pase por el punto P.





RELACIONES ENTRE ÁNGULOS

SESIÓN 3

>>> Para empezar

Une dos palitos o lápices con una liga, como se muestra en la foto, y manipúlalos para formar ángulos.



¿Cuántos ángulos se forman?______________________________,

¿son todos diferentes?______________________________,

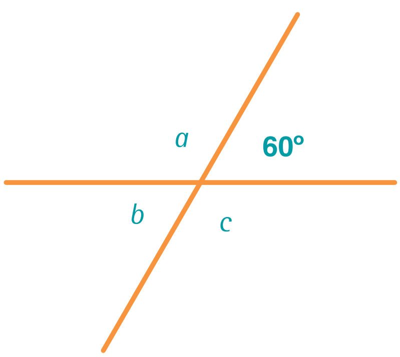
¿hay algunos que sean iguales entre sí?______________________________.

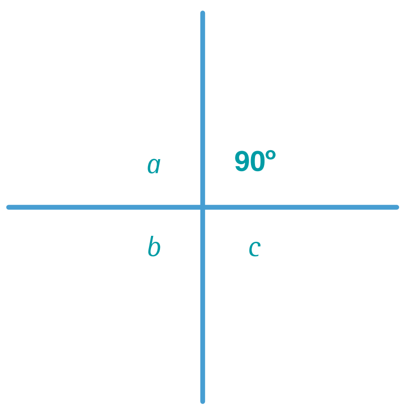
Coloca los palitos de tal manera que todos los ángulos sean iguales. Cuando los colocas de esta manera ¿cuánto mide cada ángulo? ______________________________

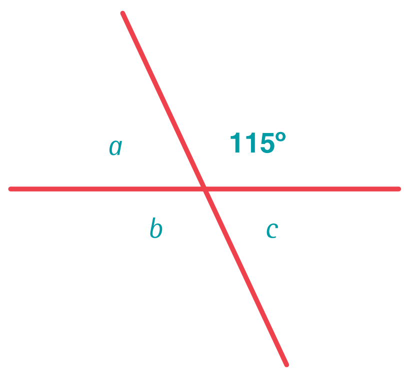
____

>>> Consideremos lo siguiente

Sin utilizar transportador, en cada pareja de rectas averigüen y anoten la medida de cada uno de los tres ángulos *a*, *b* y *c*.







Comparen sus resultados. Sólo hasta que todos estén de acuerdo podrán utilizar el transportador y medir los ángulos, para verificar sus respuestas. Comenten:

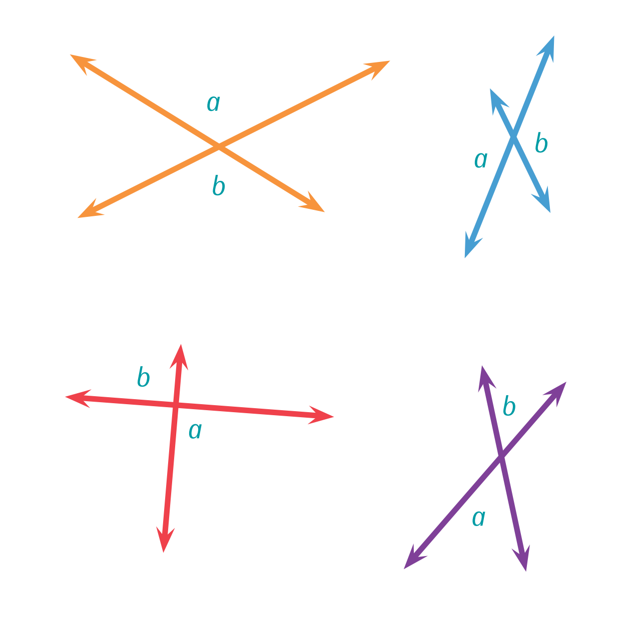
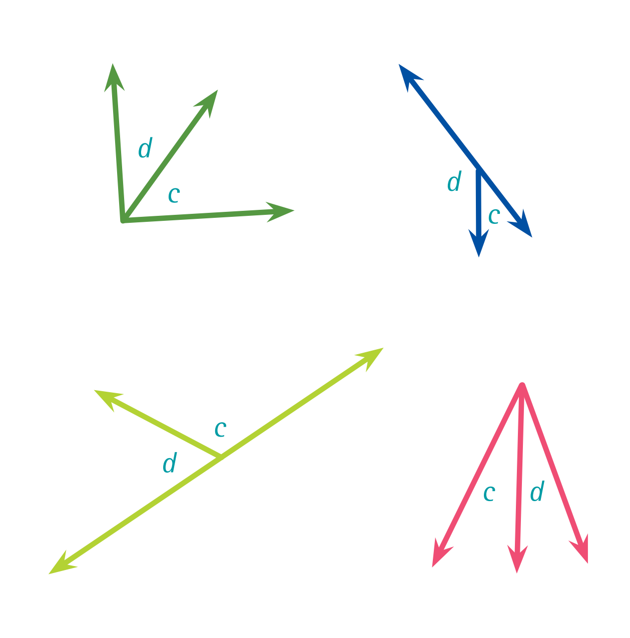
a) ¿Cómo pudieron calcular la medida de los ángulos? ______________________

b) ¿Cuál es la relación entre los ángulos ***a*** y ***c*** de cada pareja de rectas? __________

c) ¿Cuál es la relación entre los ángulos ***a*** y ***b*** de cada pareja de rectas? __________

>>> Manos a la obra

I. De acuerdo con lo ilustrado contesten lo que se pide.

Los ángulos *a* y *b* son **ángulos opuestos por el vértice**	Los ángulos *c* y *d* son **ángulos adyacentes**
	

Escriban una definición para:

Ángulos opuestos por el vértice ____

____

Ángulos adyacentes ____

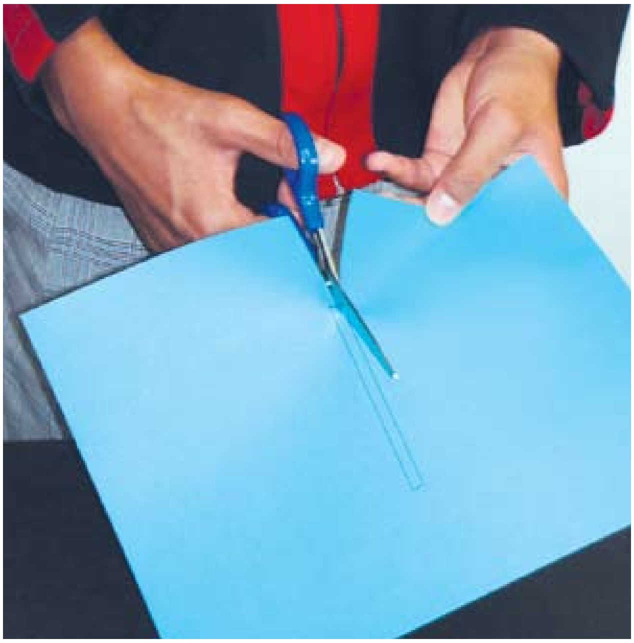
____

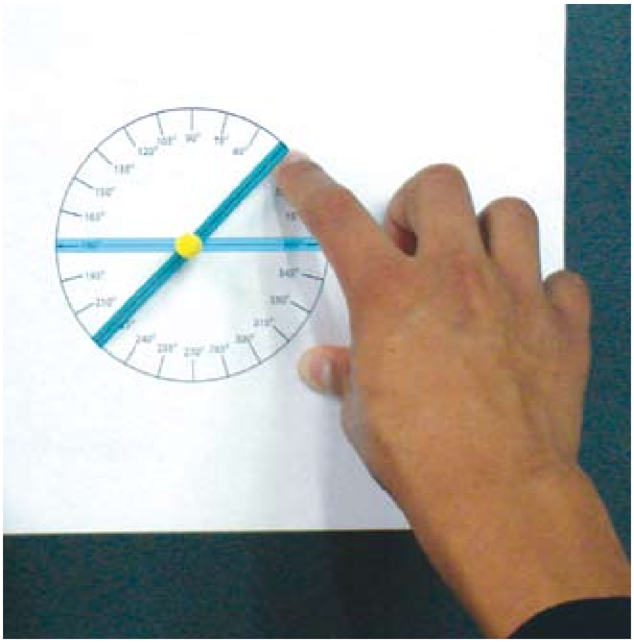
Comparen las definiciones que escribieron para ángulos opuestos por el vértice y ángulos adyacentes.

Si alguna definición les parece incorrecta traten de dar argumentos de por qué lo consideran así; por ejemplo, si algún equipo define a los ángulos opuestos por el vértice como ángulos que son iguales, pueden poner de ejemplo que los ángulos de un triángulo equilátero son iguales, pero no son opuestos por el vértice.

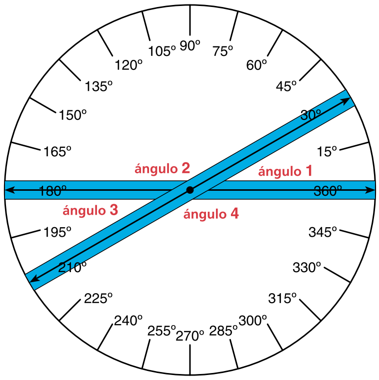
II. Realicen lo que se indica.

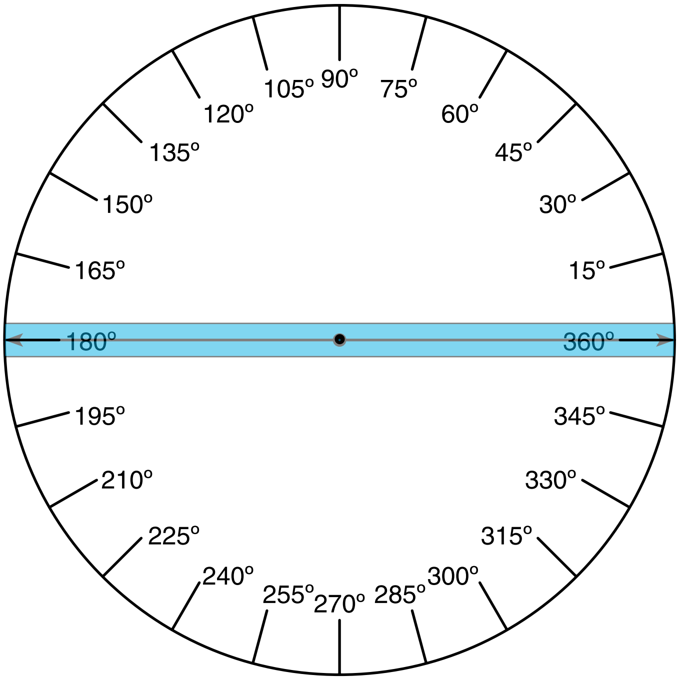
- Recorten una tira de papel de 10 cm de largo por $\frac{1}{2}$ cm de ancho; a lo largo de ella y pasando por la mitad, tracen una línea recta. Dibujen un punto en el centro de la tira.
- Coloquen la tira en el transportador como se muestra en el dibujo, de tal manera que puedan girarla.





Giren la tira de modo que el ángulo 1 mida 30°. Ayúdense del transportador para obtener las medidas de los ángulos 2, 3 y 4. Anoten esas medidas en la tabla que se muestra adelante, en el renglón del ángulo de 30°. Repitan lo mismo con las otras medidas que se indican en la tabla para el ángulo 1.





Ángulo 1	Ángulo 2	Ángulo 3	Ángulo 4
30°			
45°			
75°			
90°			
130°			
145°			

a) ¿Qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos 1 y 3? ____________

b) ¿Y entre las medidas de los ángulos 2 y 4? ____________

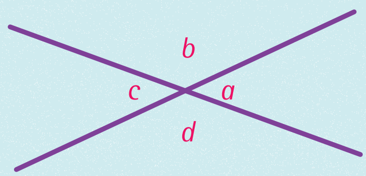
c) ¿Entre las medidas de los ángulos 1 y 2? ____________

d) ¿Y entre las medidas de los ángulos 3 y 4? ____________

e) Regresen al problema del apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen que sus respuestas coincidan con las relaciones que acaban de encontrar.

>>> A lo que llegamos

Cuando dos rectas se cortan se forman cuatro ángulos.



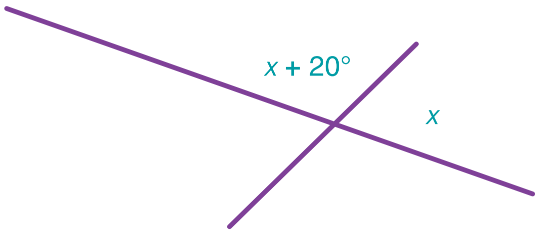
Los ángulos *a* y *c* son opuestos por el vértice, observa que tienen el mismo vértice y los lados de uno son prolongación de los lados del otro. Los ángulos *a* y *b* suman 180° y, además, son ángulos adyacentes, observen que tienen en común el vértice y un lado.

Parejas de rectas

Ahora sabes que dos rectas pueden cortarse o no cortarse. Si se cortan pueden formar ángulos rectos o ángulos no rectos.

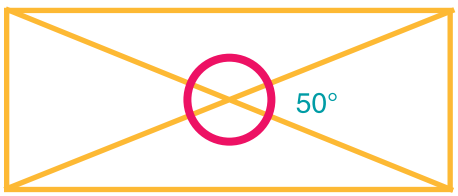
>>> Lo que aprendimos

1. Plantea una ecuación y encuentra el valor de los cuatro ángulos de la siguiente figura.



2. Si la suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es 180°, y uno de ellos mide el doble del otro, ¿cuánto mide cada uno?______________________________

3. Anota las medidas de los otros tres ángulos que forman las diagonales.



>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
De la Peña, José Antonio. “Rectas y puntos”, en *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre las ilusiones ópticas que se refieren a objetos geométricos, en particular a líneas paralelas consulta:
http://www.opticas.info/articulos/ilusiones-opticas.php
http://perso.wanadoo.es/e/ochum/ilu02.htm
[Fecha de consulta: 24 de mayo de 2007].

Ángulos entre paralelas

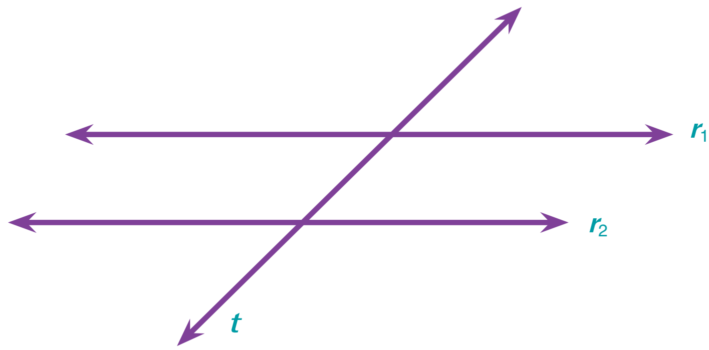
En secuencias anteriores has estudiado, por un lado ángulos, y por otro rectas paralelas, ahora seguirás explorando ambos temas: ángulos entre paralelas. También trabajarás con los ángulos interiores de triángulos y paralelogramos.

SESIÓN 1

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES

>>> Para empezar

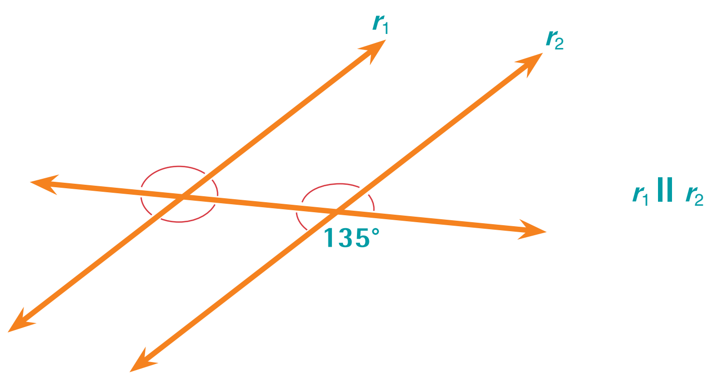
Considera las siguientes rectas paralelas, r_1 y r_2. Recuerda que esto se escribe: $r_1 \parallel r_2$



Observa que la recta t corta a las dos rectas paralelas. Esta recta recibe el nombre de **transversal** o **secante.**

>>> Consideremos lo siguiente

Sin medir, encuentren y anoten el valor de cada uno de los ángulos marcados con rojo.

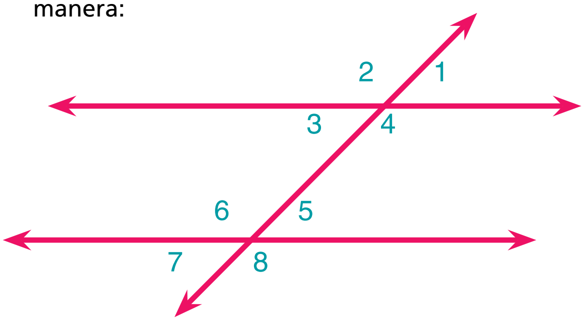


Comparen sus resultados con los del resto del grupo, y si hay resultados diferentes argumenten sus respuestas para convencer a sus compañeros.

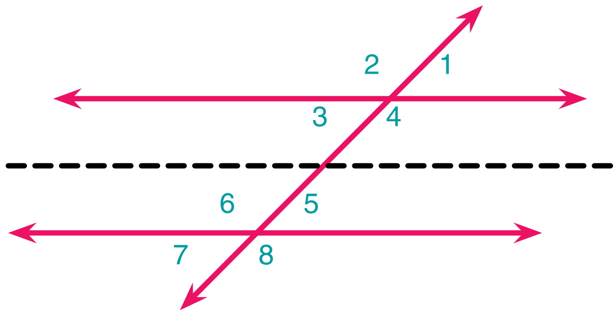
>>> Manos a la obra

I. Realicen la siguiente actividad.

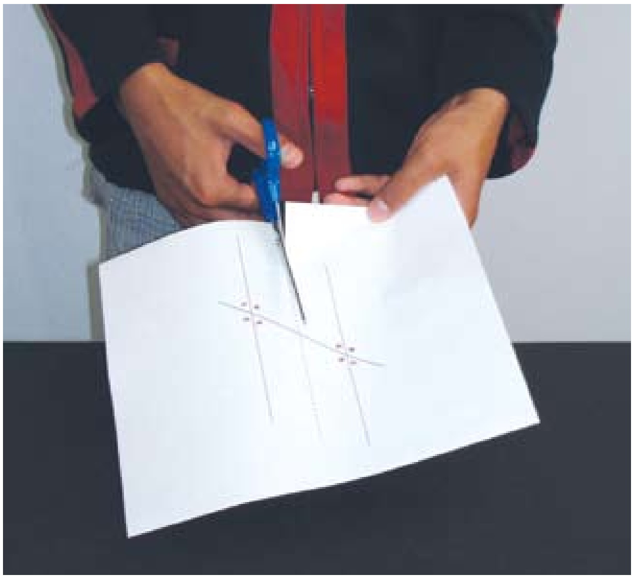
1. Tracen en una hoja blanca de papel delgado (de preferencia transparente) dos rectas paralelas y una transversal, y numeren los ángulos de la siguiente manera:



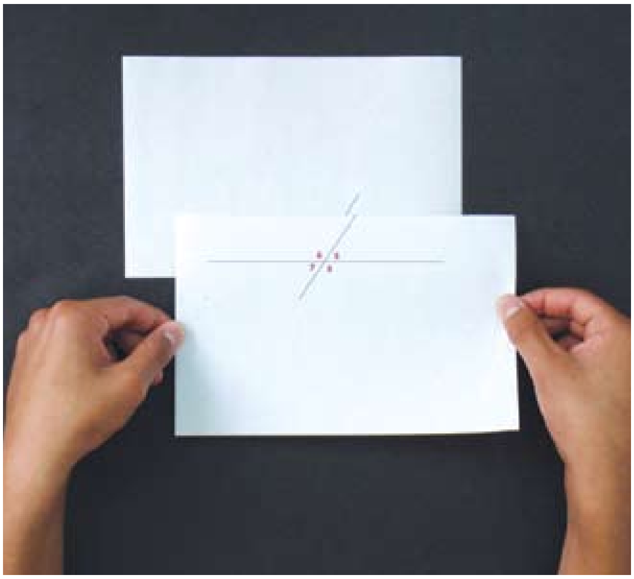
2. Marquen una línea punteada como la que se muestra en el dibujo:



3. Corten la hoja por la línea punteada.



4. Coloquen una parte de la hoja encima de la otra de tal manera que el ángulo 1 coincida exactamente con el ángulo 5.



Ahora tienen el ángulo 5 sobre el ángulo 1.

Los ángulos 1 y 5 se llaman **ángulos correspondientes**.

a) ¿Cuál es el ángulo correspondiente del 2? ______, ¿y del 3? ______ ¿ y del 4?______

b) ¿Cómo son entre sí las medidas de los ángulos correspondientes? ____________

c) Verifiquen, midiendo, que cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal los ángulos correspondientes son iguales.

II. Subrayen las afirmaciones verdaderas.

Recuerden que:
∠a se lee "ángulo a"
∡a se lee "la medida del ángulo a"

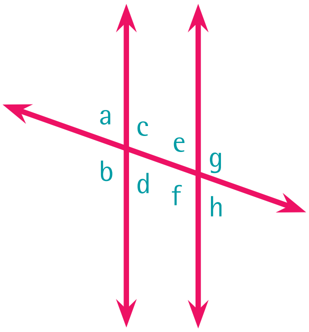
a) ∡ 2 = ∡ 6 porque son ángulos correspondientes.

b) ∡ 1 = ∡ 5 porque son ángulos opuestos por el vértice.

c) ∡ 5 = ∡ 7 porque son ángulos opuestos por el vértice.

d) ∡ 5 + ∡ 6 = 180° porque son ángulos adyacentes que se forman cuando dos rectas se cortan.

III. Completen el razonamiento para encontrar ∡ ***f*** considerando que ∡ ***a*** = 50° y que se trata de dos rectas paralelas cortadas por una transversal.



∡ ***a*** = ∡ ***e*** porque ______________________________

Entonces, el ∠ ***e*** mide ______________________________

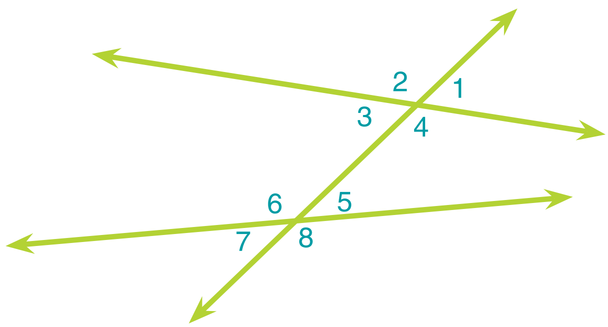
∡ ***e*** + ∡ ***f*** = 180° porque ______________________________

____

Por lo tanto, ∡ ***f*** = ______________________________

IV. Regresen al problema del apartado *Consideremos lo siguiente*, identifiquen los ángulos correspondientes y verifiquen que sus respuestas hayan sido correctas.

V. Consideren ahora dos rectas que no son paralelas y que son cortadas por una transversal.

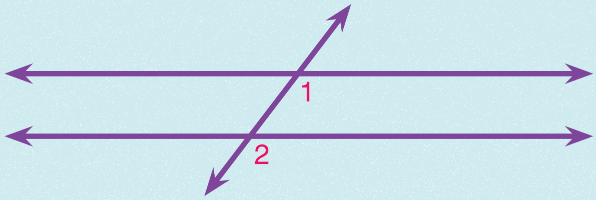


a) En este caso también se dice que el ángulo 1 es correspondiente del ángulo 5, y el 2 del 6, ¿cuál es el correspondiente del 3? ______________________________ , ¿y del 4? ______________________________

b) Comparen las medidas de los ángulos correspondientes cuando las rectas no son paralelas.

>>> A lo que llegamos

Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal se forman ángulos correspondientes iguales.

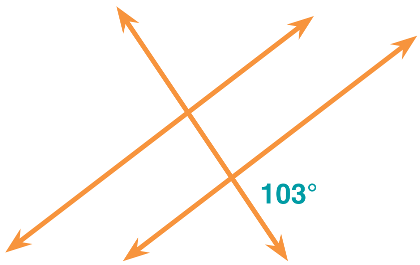


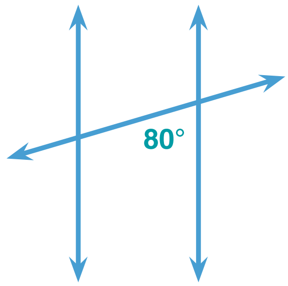
El $\angle$ 1 es correspondiente al $\angle$ 2 , por lo tanto $\measuredangle$ 1 = $\measuredangle$ 2.

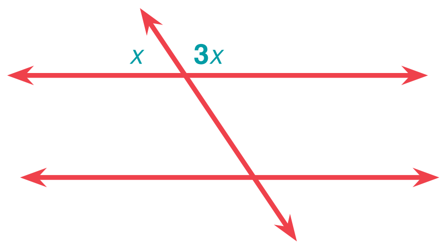
Si dos rectas que no son paralelas son cortadas por una transversal los ángulos correspondientes tienen diferente medida.

>>> Lo que aprendimos

Encuentra el valor de los ángulos que faltan en cada caso.





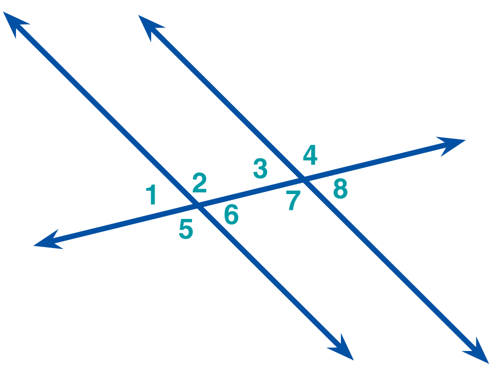


ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal se forman ocho ángulos.



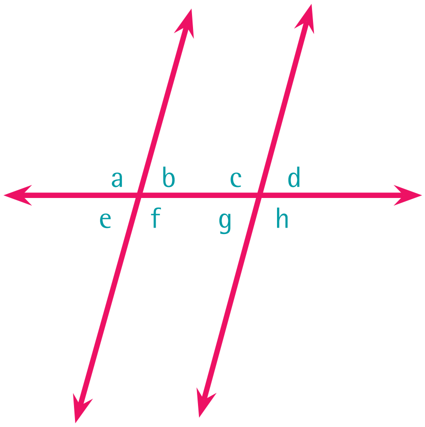
Observa que los ángulos 2, 3, 6 y 7 están dentro de las paralelas. Estos ángulos se llaman **internos**.

¿Qué ángulos quedan fuera de las paralelas? ____________

¿Cómo crees que se llaman estos ángulos? ____________

>>> Consideremos lo siguiente

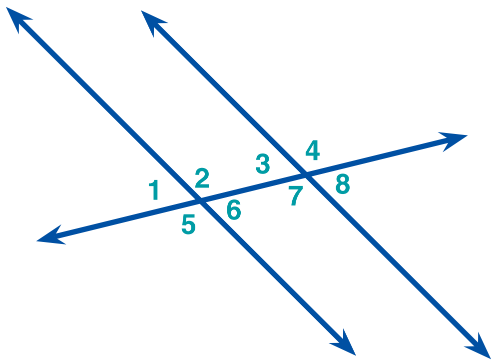
Sin medir los ángulos, ¿cómo podrían convencer a alguien de que ∡ ***a*** = ∡ ***h***? Anoten sus argumentos.



Comparen sus argumentos con los del resto del grupo, observen que hay diferentes maneras de llegar al mismo resultado.

>>> Manos a la obra

I. Lean la siguiente información:



a) Si dos ángulos están de diferente lado de la transversal, en diferente paralela y dentro de las paralelas, se llaman **alternos internos**. Por ejemplo, los ángulos 2 y 7 son alternos internos.

Hay otra pareja de ángulos alternos internos, ¿cuál es? ________

b) Si dos ángulos están de diferente lado de la transversal, en diferente paralela y fuera de las paralelas, se llaman **alternos externos**. Por ejemplo, los angulos 1 y 8 son alternos externos.

Hay otra pareja de ángulos alternos externos, ¿cuál es? ________

c) En la figura del apartado *Consideremos lo siguiente* identifiquen ángulos alternos internos o alternos externos y verifiquen que miden lo mismo.

II. Con respecto a la figura del apartado *Consideremos lo siguiente* subrayen las afirmaciones que son verdaderas.

a) ∡ ***c*** = ∡ ***f*** porque son ángulos alternos internos.

b) ∡ ***a*** = ∡ ***c*** porque son ángulos correspondientes.

c) ∡ ***e*** = ∡ ***d*** porque son ángulos alternos externos.

d) ∡ ***a*** = ∡ ***h*** porque son ángulos opuestos por el vértice.

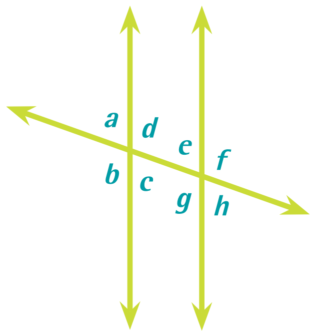
III. En la siguiente figura, los ángulos ***d*** y ***g*** son alternos internos entre dos paralelas cortadas por una transversal. Completen el razonamiento para justificar que los ángulos alternos internos siempre son iguales.

$\measuredangle$ ***d*** = $\measuredangle$ ***f*** porque ______________________________

$\measuredangle$ ***f*** = $\measuredangle$ ***g*** porque ______________________________

Entonces, como los dos ángulos, el $\angle$ ***d*** y el $\angle$ ***g*** son iguales al $\angle$ ***f***, podemos decir que ______________________________

____



IV. Escriban en su cuaderno un razonamiento parecido para justificar que dos ángulos alternos externos son iguales.

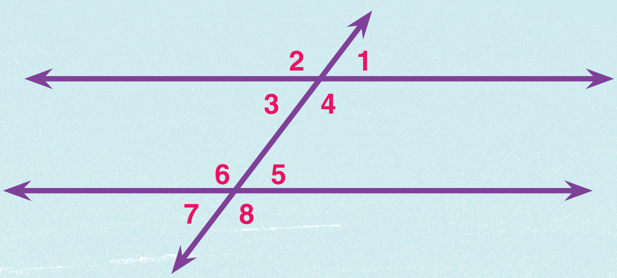
V. Regresen al problema del apartado *Consideremos lo siguiente* y revisen los argumentos que dieron para justificar la igualdad de los ángulos ***a*** y ***h***.

>>> A lo que llegamos

Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal se forman ángulos alternos internos y alternos externos que miden lo mismo.

El $\angle$ **1** es **alterno externo** del $\angle$ **7**, por lo tanto $\measuredangle$ **1** = $\measuredangle$ **7**.

El $\angle$ **4** es **alterno interno** del $\angle$ **6**, por lo tanto $\measuredangle$ **4** = $\measuredangle$ **6**.



>>> Lo que aprendimos

1. Investiguen si hay o no alguna relación entre los ángulos alternos internos y alternos externos cuando las dos rectas que corta la transversal no son paralelas.

SESIÓN 3

LOS ÁNGULOS EN LOS PARALELOGRAMOS Y EN EL TRIÁNGULO

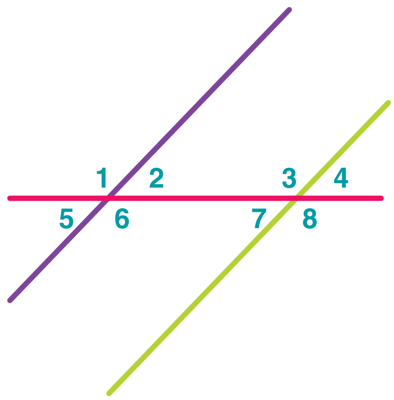
>>> Para empezar

Las relaciones entre las parejas de ángulos que se forman cuando dos rectas son cortadas por una transversal se usan para seguir explorando y descubriendo otras propiedades de las figuras.

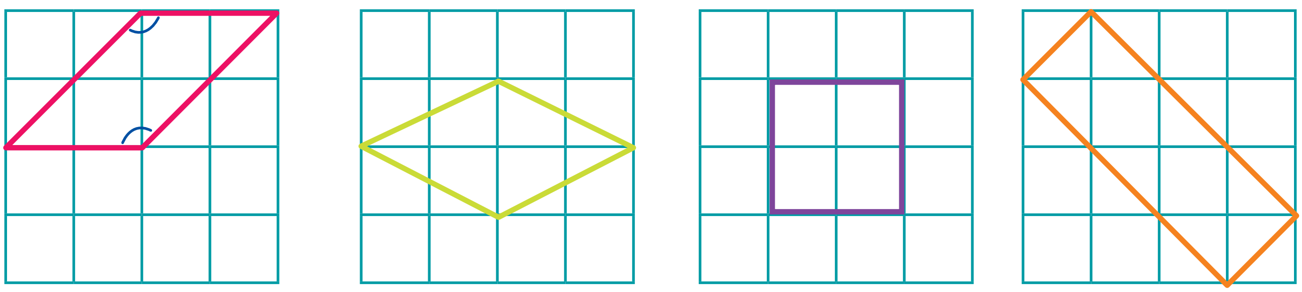
>>> Lo que aprendimos

1. Considera la figura de la derecha y anota las medidas que faltan.

∡ 1 = ______	∡ 5 = ______
∡ 2 = ______	∡ 6 = ______
∡ 3 = ______	∠ 7 = ______
∡ 4 = 45°	∡ 8 = ______



2. Considera los siguientes paralelogramos.



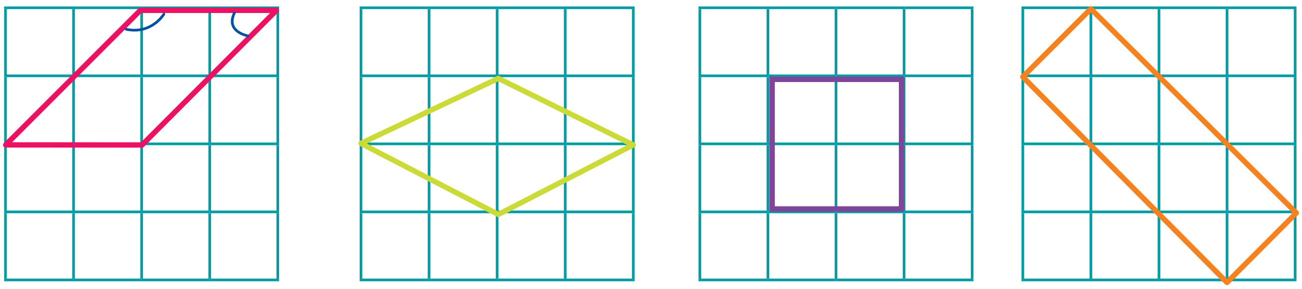
a) En el romboide se ha marcado una pareja de ángulos opuestos. Cada cuadrilátero tiene dos parejas de ángulos opuestos. Identifica y marca, con diferente color, cada pareja de ángulos opuestos en cada paralelogramo.

b) Subraya la afirmación verdadera

- Los ángulos opuestos de un paralelogramo tienen diferente medida.
- Los ángulos opuestos de un paralelogramo miden lo mismo.
- Los ángulos opuestos de un paralelogramo suman 180°.

3. Ahora, en el romboide se ha marcado una pareja de ángulos consecutivos.

a) Marca en los otros paralelogramos una pareja de ángulos consecutivos.

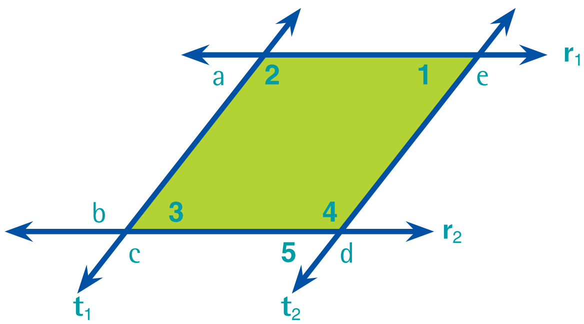


b) ¿Cuál es la relación entre las medidas de los ángulos consecutivos de un paralelogramo? ______________________________

4. Considera las rectas paralelas que resultan de prolongar los lados del paralelogramo.

$r_1 \parallel r_2$

$t_1 \parallel t_2$



a) Completa el siguiente razonamiento para demostrar que el ángulo 1 es igual al ángulo 3.

$\measuredangle 1 = \measuredangle 5$ porque ______________________________

$\measuredangle 3 = \measuredangle 5$ porque ______________________________

Si ambos ángulos, el $\angle$ 1 y el $\angle$ 3, son iguales al $\angle$ 5, entonces: ________ = ________

b) Escribe en tu cuaderno un razonamiento para demostrar que el ángulo 2 es igual al ángulo 4.

5. Responde a las preguntas, se refieren a la figura anterior.

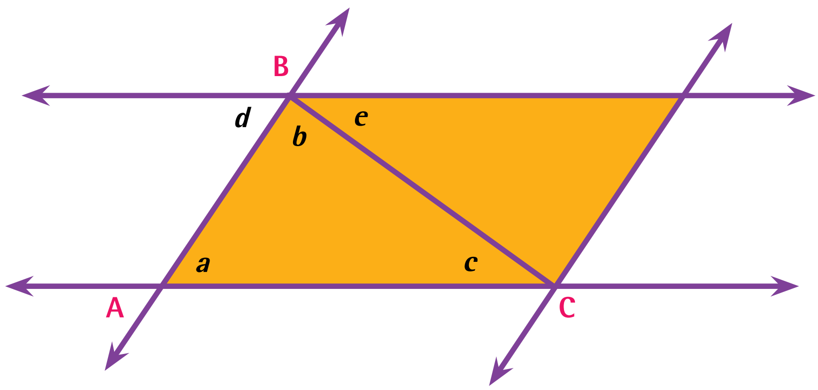
a) Considera la transversal t_1 y las rectas paralelas r_1 y r_2, ¿cuánto suman las medidas de los ángulos 2 y 3? ____________________

b) Justifica tu respuesta ____________________

6. Revisa tus conjeturas de los ejercicios 2 y 3 y verifica si corresponden a los resultados hallados en los ejercicios 4 y 5.

7. En la secuencia 4 exploraste la relación de los ángulos interiores de un triángulo, ¿cuánto suman los tres ángulos interiores de un triángulo? ____________________

8. Se tiene un romboide cualquiera y se traza una de sus diagonales, observa que se forman dos triángulos. Completa el siguiente razonamiento para justificar que la suma de los ángulos interiores del triángulo **ABC** es 180°.



$\measuredangle$ ***d*** + $\measuredangle$ ***b*** + $\measuredangle$ ***e*** = **180°** porque forman un ángulo de **180°**.

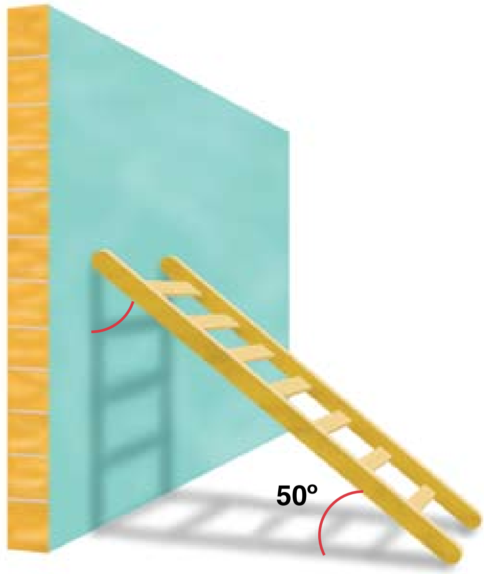
$\measuredangle$ ***d*** = $\measuredangle$ ***a*** porque ____________________

$\measuredangle$ ***e*** = $\measuredangle$ ***c*** porque ____________________

Si sustituimos $\measuredangle$ ***d*** y $\measuredangle$ ***e*** por sus iguales, que son $\measuredangle$ ***a*** y $\measuredangle$ ***c***, entonces la suma queda

______ + ______ + ______ = **180°**

9. ¿Cuánto mide el ángulo formado por la escalera y la pared? ____________



Relaciones importantes

Las relaciones de los ángulos entre paralelas y la de los triángulos y paralelogramos te permiten resolver múltiples problemas.

>>> A lo que llegamos

Los ángulos interiores de un triángulo siempre suman 180°.

En un paralelogramo:

- **Los ángulos opuestos son iguales.**
- **Los ángulos consecutivos suman 180°.**
- **Los cuatro ángulos interiores suman 360°.**

>>> Para saber más

Sobre animaciones que representan la suma de los ángulos interiores de un triángulo consulta:
http://www.geometriadinamica.cl/default.asp?dir=guias&sub
Ruta: Triángulos, prismas y pirámides → Ángulos en el triángulo
[Fecha de consulta: 24 de mayo de 2007].

Resuelve el problema 2.1 de la página de internet de Educabri Clase 5:
http://www.oma.org.ar/omanet/educabri/00-05.htm
[Fecha de consulta: 24 de mayo de 2007].