2

Cambian los problemas, cambian los procedimientos de resolución

En el artículo anterior ha sido planteada la diversidad de problemas que presenta Vergnaud a partir de la distinción realizada entre medidas, estados relativos y transformaciones. Se analizaron las distintas dificultades que presentan dichos problemas para los niños, a pesar de la equivalencia desde el punto de vista matemático de los mismos.

En el análisis de las clases de problemas hemos incluido los posibles procedimientos y errores de los niños, éstos últimos vinculados con el reconocimiento de la operación involucrada.

Abordaremos ahora otros aspectos que hacen variar los problemas para el punto de vista de los niños y los posibles procedimientos a utilizar para su resolución.

Los problemas pueden ser más fáciles o más difíciles

Existen cierto tipo de variables (Brousseau, 1987; Vergnaud, 1986, 1996, etc.) en las tareas presentadas a los alumnos, cuya elección influye en las estrategias de resolución que pueden usar los niños y en el grado de complejidad conceptual que involucran. Estas variables pueden ser comandadas por los docentes intencionalmente con el objetivo de provocar cambios en las estrategias de resolución.

Ha sido analizada, para ciertos problemas que presentan mayor dificultad para los alumnos, la estrategia didáctica de presentar inicialmente situaciones con números pequeños para que los niños puedan desplegar diferentes estrategias de resolución, controlar las acciones que realizan, despreocuparse de los cálculos y centrarse en los problemas.

Un ejemplo de problemas que los niños pueden resolver si se trata de números muy pequeños es el siguiente:

"Andrés tenía 7 figuritas antes de jugar. Después de jugar tenía 11 figuritas. ¿Cuántas ganó?"

En este caso, los niños pueden resolver este problema contando a partir de 7. Posiblemente puedan decir 8, 9, 10 y 11. Ganó 4. Es decir que a través de un procedimiento vinculado con el conteo pueden resolver el problema. Otros niños se preguntarán cuánto hay que agregarle a 7 para llegar a 11 y podrán apelar al resultado memorizado de 7 + 4 = 11, encontrando el 4 como solución al problema, o bien pensar 7 + 3 = 10 y 10 + 1 = 11; 3 + 1 = 4.

Pero seguramente, si se presenta este mismo problema con números como 46 y 189, el procedimiento de conteo con una diferencia tan grande los lleve a obtener un resultado que no sea correcto. ¿Por qué? Es posible que muchos alumnos tengan dificultades para controlar simultáneamente el conteo a partir de 46 y a la vez la cantidad de números que van nombrando. Por otra parte, no disponen en memoria de ninguna relación numérica que vincule dichos números, como sí podrían tenerla para 46 y 146.

Puede suceder que algunos niños intenten llegar a 189 a partir de 46 por medio de sumas sucesivas. Por ejemplo, que agreguen 10 sucesivamente al 46 y que cuenten: 56, 66, etcétera. Para ello deberán simultáneamente contar cuántos "dieces" van agregando y a cuánto van llegando.

Tanto el problema que tiene números pequeños como el que tiene números grandes pertenecen a la categoría de problemas de búsqueda de una transformación positiva a partir del conocimiento del estado inicial y del estado final. Sin embargo, para resolver el segundo problema -dado el tamaño de los números- se torna "casi necesario" reconocer que se resuelve por medio de una resta.

Partir de situaciones con números pequeños permite a los alumnos desplegar procedimientos no expertos. Aumentar su tamaño permite al docente provocar en los niños la necesidad de reconocer y utilizar una operación.

Analicemos el siguiente problema:

"Andrés está leyendo un libro que tiene 25 páginas. Si va por la página 20, ¿cuántas le faltan leer?"

Niños de primero o de segundo año frente a dicho problema posiblemente utilicen el conteo (21, 22, 23, 24 y 25) o un cálculo memorizado (20 + 5 = 25).

En el artículo anterior se ha planteado la importancia de la fase colectiva de trabajo para instalar nuevos procedimientos y resaltar las conclusiones a las que se arriba luego del debate, como así también la importancia de la reflexión posterior a la resolución del problema. En este caso será necesario abordar en el aula la diversidad de formas de averiguar la respuesta del problema y, entre otras, resaltar que "también se podía resolver con una resta".

Luego el docente podrá aumentar el tamaño de los números y plantear el problema con números "no redondos". El aumento del tamaño de los números tiene el objetivo de provocar el abandono de los procedimientos de conteo; y el que los números que se presenten no sean redondos se dirige a lograr que a los alumnos no les resulte suficiente con ciertas operaciones memorizadas. Para resolverlo, los niños deberán evocar el análisis posterior a la resolución del problema, es decir, apelar al conocimiento de que "este tipo de problemas también se podía resolver restando". Para poder invertir lo aprendido, en este nuevo problema los alumnos, anteriormente, deberán haber podido realizar un cierto recorrido que les permita ahora "confiar" en la operación.

Es decir, que el tamaño de los números y su "redondez" pueden variarse para posibilitar la aparición u obstaculización de ciertos procedimientos. En algunos casos, los números pequeños posibilitarán que los niños puedan resolver problemas complejos. En otros casos, posteriormente al abordaje de una clase de problemas en el aula, aumentar el tamaño de los números permitirá inhibir la utilización de aquellos mismos procedimientos que en otro momento se intentó que los alumnos desplegaran para provocar el avance hacia otros más económicos.

A estas variables que producen modificaciones en los procedimientos de los niños se las llama variables didácticas (Brousseau, 1987).

El concepto de variables didácticas permite profundizar en el análisis de los problemas. Dicho análisis permite anticipar cuáles podrían ser los procedimientos a ser utilizados por los alumnos en cada situación y evaluar las diferencias entre los mismos.

Algunas de las variables que se pueden comandar intencionalmente y tener en cuenta para comprender la complejidad de un problema son las siguientes.

Los números en juego

Un aspecto a considerar es el rango de números involucrados en la situación. Los números pueden ser grandes o pequeños; evidentemente, los últimos permiten a los niños un mayor grado de control de las acciones que realizan. También los números pequeños permiten apoyarse en procedimientos ligados al conteo.

La proximidad de los números involucrados es otro aspecto a considerar. Por ejemplo, en el siguiente problema:

"Estoy leyendo un libro que tiene 132 páginas y voy por la página 129. ¿Cuántas me faltan leer?"

En este caso, los números no son tan pequeños, pero la corta distancia entre ambos favorece también los procedimientos de conteo (130, 131 y 132).

Para evaluar el posible grado de dificultad que puede presentar a los niños una situación, es preciso considerar también si los números son «redondos» o de manejo muy cotidiano (10, 100, 250, 12; etc.). Todos sabemos que es más fácil operar con ciertos números grandes «redondos» que con números más pequeños. Por ejemplo, es más sencillo:

"Estoy leyendo un libro que tiene 250 páginas y voy por la página 100. ¿Cuántas me faltan leer?"

que el mismo problema con los números 64 y 17.

El análisis de esta variable permite anticipar los procedimientos a utilizar por los niños y el grado de control de los cálculos que realizan. Los números pequeños y los números redondos favorecen el uso de procedimientos de conteo, de cálculos mentales sencillos o bien de relaciones memorizadas. El uso de ciertos recursos memorizados permite a los niños «despreocuparse» de los cálculos y centrarse mejor en el desafío de la resolución del problema. Permiten una mayor facilidad para la estimación previa de los resultados y el control posterior.

Es importante analizar esta variable en el marco de una secuencia del trabajo con un cierto tipo de problemas y la intencionalidad de cada clase. ¿Se trata de los primeros problemas que los niños van a resolver de este tipo? ¿Se pretende que reconozcan la operación porque esto ha sido objeto de trabajo durante algunas clases? ¿Se darán problemas similares con diferentes números a distintos alumnos según los procedimientos que hasta ese momento utilizaron?

Los tipos de magnitudes

El rol de los contenidos evocados también es importante al analizar un problema. Para los niños no son equivalentes problemas que involucren figuritas, litros, monedas, centavos, animales o años. Los problemas pueden referirse a magnitudes continuas o discretas. Las magnitudes *discretas* se refieren a aquéllas en las que es posible contar (figuritas, animales, etc.). Las magnitudes *continuas* a aquéllas en las que es necesario medir (tiempo, capacidad, peso, etc.). Operar con magnitudes discretas permite una representación más inmediata de la situación (Documento número 4, Matemática, GCBA, 1997).

Dos problemas aparentemente iguales no lo son para los niños.

Por ejemplo:

"Me dijeron que en esta granja hay 47 animales. Si ya vi 18, ¿cuántos me faltan ver aún?"

"Un señor se va de viaje por 47 días. Si ya pasaron 18, ¿cuántos le faltan aún para volver?"

Evidentemente, el primero les es más sencillo. Especialmente en los primeros años, en los que aún muchas veces recurren a representaciones gráficas para resolver un problema. ¿Cómo representar los días? ¿El de hoy como se cuenta? ¿Vuelve de mañana o de noche?, etcétera.

El análisis de las magnitudes involucradas permite, por lo tanto, realizar un estudio más completo en términos didácticos de las situaciones planteadas a los alumnos. La variable numérica y estas otras aparecen combinadas en cualquier situación. Se trata de combinarlas según el objetivo de la clase.

El orden de presentación de las informaciones

Las informaciones pertinentes para la solución de un problema pueden estar dadas de diferentes maneras: en forma ordenada conforme al desarrollo temporal, en orden inverso a cómo se "produjeron los hechos", o bien "desordenadas".

Por ejemplo, estos dos problemas:

"Ana tenía una caja con varios alfajores. Le regaló 8 a Camila. Se quedó con 10. La caja tenía .... alfajores."

"Calculá cuántos alfajores tenía Ana si le regaló a su hermana 8 y le quedaron 10."

Estas situaciones no son equivalentes para los niños, aunque ambas pertenezcan a una misma categoría (cálculo del estado inicial dado el estado final y la transformación negativa), se resuelvan con la misma operación (8+10=18) e involucren las mismas magnitudes (alfajores).

Especialmente en los primeros años, los niños experimentan más dificultades en la resolución del segundo problema. Éste no presenta un orden cronológico de la información, a diferencia del primero, donde se anuncia que "tenía una cierta cantidad de alfajores", la cual, a pesar de ser desconocida, es organizadora para el alumno. Es una marca temporal (Brissiaud, 1984). Quien empieza a leer el enunciado ya sabe que tenía algo antes, y que posiblemente deba averiguar cuántos.

Es importante tener en cuenta los aspectos vinculados a cómo se organizan las informaciones verbales, dónde está la pregunta, si es una pregunta explícita o es un "lugar para llenar" como en el primer problema, etcétera. Se han observado cambios importantes en niños pequeños en la posibilidad de resolver los problemas frente a modificaciones muy pequeñas del enunciado. El análisis puede permitir comprender la dificultad que tienen ciertos problemas para los niños y abordarlos en la clase como aspectos fundamentales de la comprensión de enunciados.

Las formas de representación

El mismo problema matemático puede estar representado de diferentes formas (Vergnaud, 1991). Quien dispone de un cierto conocimiento matemático reconoce un mismo problema en dos situaciones con diferentes formas de representación, pero esto no siempre sucede con los niños.

Algunas situaciones están representadas en lenguaje natural, otras en un diagrama o esquema, por medio de un dibujo, otras mediante una escritura algebraica. Cada una de ellas exige desafíos diferentes.

Los problemas pertenecientes a la misma categoría, con los mismos números y magnitudes, pueden ser distintos entonces para los niños. Es preciso incluir en el análisis de un problema las formas de representación involucradas. Este aspecto está vinculado a la lectura y al tratamiento de la información.

Comparemos por ejemplo estos dos problemas:

Completar la siguiente tabla:

Libros	libros forrados	libros sin forrar
30	8	....

Estos dos problemas se resuelven con el mismo cálculo, tienen los mismos números, las mismas magnitudes. Sin embargo, el segundo es de mucha mayor dificultad, pues la forma de representación utilizada es más abstracta y formalizada. Comprender qué es lo que se les solicita y averiguar e interpretar la información provista es, para los niños, más complejo que en el primer caso.

El tipo de realidad a que se hace referencia

Es evidente que un problema planteado a los niños sobre objetos totalmente desconocidos para ellos genera un obstáculo para la comprensión del enunciado. Según Brissiaud (1984), frente a la lectura de un problema deben responder a dos preguntas: ¿de qué habla? y ¿qué debo hacer? Para tratar la primera les es preciso utilizar conocimientos generales sobre el mundo.

Si el alumno lee el enunciado de un problema sobre un contexto desconocido, no podrá interpretar siquiera cuál es el problema matemático que debe resolver. Para poder construir una respuesta posible de un problema, es necesario tener ciertos conocimientos que permitan estimar una respuesta como plausible.

La preocupación por producir contextos conocidos y significativos para los problemas matemáticos en una clase llevó a considerar que éstos se debían referir a la vida cotidiana o al mundo circundante de los alumnos, siendo así "interesantes" para ellos. Se hablaba de "problemas concretos", "problemas de la realidad de los niños", "temas de su interés". Esta concepción, postulada por las corrientes de la Escuela Nueva y tomadas por la Reforma de la Matemática Moderna, se basó principalmente en la valoración de los intereses de los alumnos.

Ahora bien, considerar como interés de los alumnos a su vida cotidiana tiene algunos riesgos. En principio, deja afuera de la enseñanza problemas planteados en términos puramente matemáticos, por ejemplo:

"Estoy en el número 36 y quiero llegar al 78. ¿Cuántos me faltan?" o bien *"¿Cuántos números hay entre el 26 y el 95?"*

Son llamados también problemas internos y resultan bien interesantes para los alumnos por el desafío intelectual que les provoca.

Brissiaud (1984) describió algunas dificultades que aparecen en las producciones de los niños con los problemas de un mundo muy conocido. Por ejemplo, qué sucede cuando una maestra propone a sus alumnos de segundo año el siguiente problema:

"En un lugar de alquiler de caballos, hay 5 ponys en la caballeriza verde y 12 ponys en la caballeriza naranja. 19 chicos llegan juntos para alquilar. ¿Pueden montar todos en el mismo momento?"

Un niño contesta que no pueden "porque los niños son muy pequeños para montar solos", otro niño contesta que no pueden montar los 19 al mismo tiempo porque "es peligroso, se pueden caer".

El autor muestra que la referencia a una experiencia vivida, lejos de ayudarlos a resolver el problema, los aleja de la situación planteada en él. Sus conocimientos sobre el peligro de muchos niños cabalgando simultáneamente no les permiten considerar el problema como una situación hipotética. Los niños, para resolver este problema, deben ignorar de algún modo su experiencia personal y ubicarse ante él "matemáticamente".

Otros aspectos que influyen en la complejidad de los problemas

La pertinencia de la información presentada para responder a la pregunta

Los problemas pueden incluir informaciones no necesarias para su resolución, en cuyo caso la selección de los datos es parte de la tarea de resolver el problema. Tradicionalmente, los problemas que se les planteaban a los niños en la escuela eran todos similares, con los datos justos, para aplicar una operación aprendida. Evidentemente, es diferente resolver un problema con los datos justos que tener que seleccionar los necesarios según la pregunta planteada.

La intención de incluir en la escuela problemas con datos de más es que los niños tengan que seleccionar cuál es la información pertinente para la pregunta planteada.

Podemos comparar estos dos problemas:

"Analía tiene 18 pesos y quiere comprarse un juego que cuesta 13. ¿Cuánto le sobra?"

"Analía es una nena que recibió para su cumpleaños $ 18 de regalo. Su tía le dio un billete de $10, un billete de $5 y 3 monedas de $1. Ella quiere comprarse un juego para 4 jugadores que cuesta $13. ¿Cuánto le sobra?"

En el segundo planteo, el niño tiene que realizar una lectura de la información provista en el enunciado, determinar cuáles son los datos pertinentes y cuáles innecesarios. Posiblemente muchos niños utilicen los datos innecesarios y esto deba ser abordado en la clase como tema de trabajo. En este sentido, dicho aspecto otorga mayor o menor complejidad a un problema y puede influir en el tipo de respuestas que aparezcan. Su inclusión en el aula permite ampliar el tipo de decisiones que los niños tienen que tomar en el momento de resolver un problema.

Además de las variables recientemente analizadas, se han investigado también cómo influyen otros aspectos sobre el punto de vista infantil en un problema. Algunas otras variables estudiadas (De Corte y Verschaffel, 1985, 1987, citados en Fayol, 1990) son: el vocabulario, la longitud del enunciado, el lugar de la pregunta, el tiempo verbal utilizado (Bovet, 1978, mencionado en Brun, 1990), etcétera.

Se han dado diversos criterios para examinar los problemas de suma y resta teniendo en cuenta, por un lado, el aspecto semántico de los problemas, es decir, el significado de cada uno de los números en juego (en el primer artículo) y por otro lado algunas variables que siempre están presentes en un problema. Éstas son el tamaño de los números, el tipo de magnitudes, la forma de presentar y organizar las informaciones y las preguntas. Todas ellas generan mayores o menores dificultades en los niños en la resolución de un problema.

Sin embargo, comprender la cantidad de factores que influyen en la complejidad no significa que debamos evitarla, proponiendo a los niños problemas siempre con los datos justos, con números pequeños y redondos, con la información ordenada. Se trata, por el contrario, de plantear diversos tipos de enunciados, manejando las variables de tal manera que se gradúen o compensen las dificultades entre ellas.

Además, es conveniente establecer secuencias de problemas que provoquen avances en los conocimientos de los niños.

Al incrementar la variedad de los componentes o las relaciones involucradas en un problema asumimos el "riesgo" de que los niños tengan dificultades en su resolución. Pero es un riesgo que vale la pena correr. Desde esta modalidad de trabajo se espera que los niños lleguen a diferentes respuestas y obtenidas por diferentes caminos. El trabajo posterior a la resolución de los problemas será el que permita una fase de reflexión y análisis sobre los mismos. El rol del docente cobra sentido justamente con aquellos problemas en los que aparece una variedad de respuestas y una variedad de procedimientos.

Este análisis permite diversificar el tipo de problemas de suma y resta a ser planteados a nuestros alumnos de primero, segundo y tercer año y favorece la interpretación del origen de algunas dificultades que experimentan los niños frente a ciertos problemas. (Es frecuente que los maestros piensen: "Este problema hoy a los chicos no les salió y era igual que el que habíamos hecho la semana pasada". Es posible que los problemas fueran muy similares, equivalentes para el docente, pero no para el punto de vista de los niños.)

Procedimientos de resolución para los problemas de suma y resta

Se ha señalado que muchos niños están en condiciones de resolver algunos de los problemas más complejos si el tamaño de los números les permiten utilizar diferentes estrategias de resolución. Hay estudios acerca de la diversidad de procedimientos que utilizan los niños (Fayol, 1990).

En las clases, estos procedimientos pueden ser objeto de análisis y de discusión y es importante aclarar que no son "niveles" que los niños deben atravesar. Por el contrario, los mismos niños utilizan uno u otro según el problema. Se ha mostrado que existe una fuerte correlación entre el tipo de problema y el procedimiento que la mayoría de los niños utiliza.

Anticipar los procedimientos posibles exige un análisis del problema. De tal modo, no es posible plantear procedimientos en forma general para todos los problemas de suma y resta. Es un trabajo a realizar frente a cada uno, pues, como hemos intentado mostrar, influyen numerosos factores.

Por otra parte, es imposible anticipar los procedimientos que utilizarán los niños sin saber cuáles son aquellos conocimientos de los cuales disponen. Por ejemplo, en un problema puede ser un procedimiento apelar a la suma memorizada de 5 + 5 = 10. Obviamente, esto es posible en un grupo de niños que dispone de dicho conocimiento.

De todos modos, se han estudiado algunos tipos de procedimientos que suelen utilizar los niños y que -ya hechas las aclaraciones acerca de los límites de su generalidad- creemos útil compartir. En esta enumeración se incluyen procedimientos no algorítmicos para resolver problemas de suma y de resta.

La construcción del conocimiento del campo de problemas sobre la suma y la resta se hace simultáneamente con la construcción de las estrategias de cálculo. Los niños son capaces de resolver gran cantidad de problemas de suma y resta sin conocer la "cuenta" de sumar o de restar. En otros casos, aunque conozcan las cuentas, utilizan otros procedimientos, porque no reconocen cuál es la operación que resuelve el problema, o bien porque en ocasiones es más sencillo recurrir a otros caminos.

Algunos procedimientos para las sumas son:

a. Reunir físicamente las colecciones y contar los elementos a partir de uno.

b. Representar las colecciones con ayuda de los dedos, gráficamente o con símbolos (palitos, por ejemplo) y luego contar el total. Hay una imitación o simulación de la situación descripta.

c. Tanto para el procedimiento "a" como para el "b" es posible contar a partir del primer cardinal (en este caso se realiza un sobreconteo).

d. Sumar, es decir, realizar una recuperación directa de resultados ya conocidos (por ejemplo, disponer directamente que 5 + 5 = 10) o bien apoyarse en un resultado conocido para averiguar uno desconocido (por ejemplo, para 6 + 5 pensar en 5 + 5 = 10 y 10 + 1 = 11).

Para las restas:

a. Separar físicamente. A partir del conjunto mayor contar y separar los elementos de la colección menor.

b. Descontar de 1 en 1 a partir del número mayor.

c. Agregar. Partir del número menor e ir contando de 1 en 1 hasta llegar al número mayor. Este procedimiento implica contar simultáneamente a partir del menor número y a la vez controlar cuántos se van agregando.

d. Sumar. Puede ser recuperar en memoria una suma o bien tantear con números e ir probando si al sumar se obtiene el mayor. Puede ser una suma única (por ejemplo, para encontrar la diferencia entre 35 y 50 encontrar el 15 directamente) o bien ir haciendo sumas sucesivas y controlar simultáneamente cuánto se va sumando y cuánto todavía falta (por ejemplo, para encontrar la diferencia entre 35 y 97 pensar 45 -agregué 10- ; 55 -agregué 20-; 65 -agregué 30-; etc.).

e. Restar. Recuperación directa en memoria de restas con resultados conocidos (por ejemplo, recordar que 10 – 2 es 8), o bien apoyarse en una resta conocida para averiguar una desconocida (por ejemplo, para hacer 25 – 11 pensar en 25 – 10 = 15 y 15 – 1 = 14).

¿Qué hacer frente a la diversidad de procedimientos?

La difícil tarea de provocar avances

Luego de la fase de resolución -individual o por parejas- de los problemas, el docente propone una fase de trabajo colectiva. Su intervención estará dirigida, en primer lugar, a la comunicación de procedimientos. Se trata de que los niños tomen conciencia de la diversidad de procedimientos utilizados y de que posteriormente puedan hacerlos evolucionar. No se trata de "enseñar" los procedimientos más avanzados, sino de generar un espacio de comparación y análisis de los mismos que les permita a los niños utilizar otra estrategia más económica en una nueva situación.

Se ha hecho referencia, en la clasificación de problemas del primer artículo, a algunos de gran complejidad para los niños. En dichos problemas es esperable que la mayoría utilice los procedimientos más "primitivos". Sin embargo, el trabajo en el aula puede estar dirigido al reconocimiento de un cálculo posible: "este problema también se podía resolver con esta resta", por ejemplo.

El trabajo en el aula sobre los procedimientos de resolución presenta un gran desafío para el docente: por una parte, debe favorecer la diversidad y por la otra provocar evoluciones. Se trata de un proceso en el que es necesario gestar condiciones de trabajo en la clase propicias tanto para la creación o elección personal de estrategias, como para que los niños abandonen procedimientos construidos y se apropien de nuevos recursos. La construcción de nuevos sentidos de las operaciones es una tarea progresiva y colectiva y la apropiación individual no será inmediata ni en el mismo momento para todos los niños.

Como suele suceder al analizar cualquier objeto de estudio matemático, se abre con respecto a la enseñanza de la suma y la resta una diversidad de aspectos y relaciones que sugieren un aprendizaje a largo plazo. Parece que no hay un modo "sencillo" ni breve de abordar un objeto de estudio "complejo".

que es necesa-
ɔara la creación
abandonen pro-
-a construcción
a y colectiva y la
ɔmento para to-

lio matemático,
ıa diversidad de
ɔ. Parece que no
io "complejo".

3

Diferentes estrategias de cálculo para sumas y restas

Los artículos anteriores han tratado los diferentes tipos de problemas de suma y resta, así como la influencia de cierto tipo de variables sobre los procedimientos de resolución de los niños.

En este artículo se enfatizarán algunos aspectos vinculados con la enseñanza de las estrategias de cálculo. En la enseñanza no se plantean en forma independiente el campo de problemas y la construcción de las estrategias de cálculo, ambos aspectos están interrelacionados y están implicados en la construcción del sentido de la suma y de la resta. A pesar de ello, analizaremos aquí los aspectos vinculados con la construcción de recursos de cálculo con el fin de tratar aspectos didácticos específicos para ciertas clases.

Acerca de la enseñanza de las cuentas

Tradicionalmente, la enseñanza de la suma se realizaba mediante una secuencia de operaciones que iban de una supuesta menor a una mayor complejidad. Así, por ejemplo, se introducían inicialmente cuentas de un solo dígito en forma vertical:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 5 \\ \hline 9 \end{array}$$

Luego, sumas de un dígito cuyo resultado fuera un bidígito:

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\ 8 \\ \hline 15 \end{array}$$

Luego, sumas de bidígitos:

$$\begin{array}{r} 35 \\ +\ 23 \\ \hline 58 \end{array}$$

Y, por último, sumas de bidígitos en los que la suma -de las unidades primero y luego de las decenas- superara el 9, llamadas "cuentas con dificultad".

$$\begin{array}{r} 38 \\ +\ 24 \\ \hline 62 \end{array}$$

La idea era graduar las dificultades, teniendo en cuenta algunos aspectos:

- El tamaño de los sumandos: primero con números menores que diez y luego mayores.
- La cantidad de cifras del resultado de cada una de las sumas parciales: primero que sumaran hasta 9, y luego que las dos unidades o las dos decenas sumaran más que diez.

El abordaje de las operaciones se realizaba con cuentas verticales, comunicando el procedimiento que comienza por sumar las unidades y luego las decenas. En las cuentas llamadas "sin dificultad" es indistinto comenzar a operar por las unidades o por las decenas, pero se enseñaba comenzando por las unidades para que los alumnos, al abordar las cuentas llamadas "con dificultad", no tuvieran inconvenientes relativos a la ubicación de los números.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 23 \\ +\ 68 \\ \hline 8..... \end{array} \quad 6+2=8 \text{ y } 3+8=11$$

Aunque en realidad bien podría realizarse del siguiente modo:

$$\begin{array}{r} 23 \\ +\ 68 \\ \hline 80 \\ +\ 11 \\ \hline 91 \end{array}$$

Una secuencia similar era propuesta para las cuentas de resta. Sin embargo, hoy estamos en condiciones de preguntarnos: ¿dicha progresión respeta las dificultades desde el punto de vista de los niños?

Sabemos que para los niños -y también para los adultos- es más sencillo realizar, por ejemplo, 15 + 15 que 15 + 14, a pesar de que la primera operación tradicionalmente sería considerada como una cuenta "con dificultad" y la segunda no. Disponer en la memoria del resultado del cálculo 5 + 5 facilita la operación y torna innecesario utilizar el algoritmo convencional.[2] Por otra parte, la "facilidad" de este cálculo muestra la innecesariedad de considerarlo una cuenta "con dificultades".

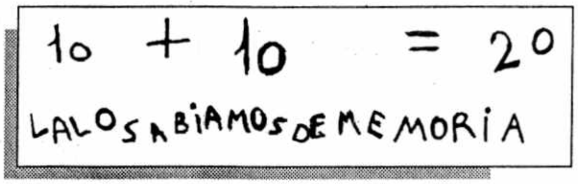
Para ciertos cálculos -como 5 + 5 o 10 + 10- es conveniente utilizar procedimientos no algorítmicos y basarse en ciertas propiedades de los números o en ciertos recursos memorizados.

No tiene sentido escribir verticalmente:

$$\begin{array}{r} 10 \\ + \\ 10 \end{array}$$

y realizar una descomposición en 0 + 0 y 1 + 1. De hecho, cuando los niños escriben estas cuentas en los años superiores, los docentes se preocupan de cómo no pueden hacer mentalmente esta operación de suma.

Este niño nos "muestra" por qué no es necesario para él escribirlo de otro modo:



Con frecuencia se observan dificultades y errores en los cálculos que realizan los niños. Parece no ser suficiente con enseñarles cómo se hace la cuenta y ejercitarla para que los alumnos dominen la operación, aunque intenten reproducir el modelo enseñado -pero numerosos errores aparecen-, ya que no dominan con seguridad el algoritmo convencional sino varios años más tarde.

Muchas veces observamos errores que ilustran que los niños utilizan el algoritmo sin realizar ningún control acerca del resultado posible de la cuenta.

En numerosos trabajos se muestra cómo los niños, en situaciones de cálculo oral, obtienen resultados correctos, pero al ser formulados por escrito, utilizando el algoritmo aprendido, obtienen resultados lejanos a los posibles (Ferreiro, 1986; Lerner, 1992).

Por ejemplo, algunos niños que frente a un problema en una situación extraescolar en la que hay que sumar 10 + 10 + 5 +5 no tienen dificultades en realizar la cuenta mentalmente:

$$10 + 10 = 20; \quad 5 + 5 = 10 \quad y \quad 20 + 10 = 30$$

frente al pedido de escritura de la operación en una situación escolar, realizan lo siguiente:

2. Consideramos "algoritmo convencional" al procedimiento utilizado en la escuela para sumas y restas verticales, en el cual se inician las sumas o restas parciales a partir de las unidades de menor orden.

$$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ + \quad 5 \\ 5 \\ \hline 120 \end{array}$$

porque han "ubicado" mal los 5, en el "lugar de las decenas".

En este caso, los niños han intentado utilizar un método aprendido para resolver las cuentas sin ningún grado de control sobre aquello que están realizando. No realizan una estimación previa ni un control posterior sobre el resultado al que han arribado. Sin embargo, el tamaño y la "redondez" de los números les permitirían realizar fácilmente un cálculo mental.

Generalmente, estas dificultades demuestran una comprensión inacabada del procedimiento algorítmico, como así también ponen de manifiesto dificultades vinculadas con la enseñanza del sistema de numeración. La enseñanza del algoritmo de la suma y de su representación escrita como una "casita" de unidades y decenas,[3] supone las descomposiciones multiplicativas (considerar el 15 como una decena y 5 unidades implica 1 x 10 +5).

Las investigaciones (Lerner, 1992) han mostrado cómo los niños realizan los algoritmos de la suma y de la resta muchas veces sin comprender las descomposiciones que realizan y cómo para ellos, a pesar de haber aprendido a iniciar las cuentas por la suma de las unidades, es más sencillo realizar cálculos mentales iniciando las sumas parciales por las decenas. Para los niños son más evidentes las descomposiciones aditivas de los números (15 como 10 + 5) que la descomposición en unidades y decenas (Lerner, 1992 ; Lerner-Sadovsky, 1994).

En realidad, tampoco los adultos inician los cálculos mentales por las unidades. Por ejemplo, en 56 + 34, muchos hacen primero 50 + 30 y luego la suma de las unidades.

El tratamiento de las cifras por separado hace perder de vista la comprensión global de los números. Así resulta más difícil realizar estimaciones. Por ello, basta con olvidarse de anotar un número para que el resultado de la cuenta resulte muy alejado del intervalo posible.

Otros problemas aparecen por el énfasis puesto en la utilización del algoritmo como único procedimiento enseñado en la escuela para resolver las operaciones. Muchas veces, los niños en la escuela, para sumar 20 + 20, escriben una cuenta vertical, cuando les sería mucho más económico recurrir a un cálculo mental que les permitiera escribir directamente el resultado 40, sin recurrir a procedimientos de descomposición en unidades y decenas (0 + 0, 2 + 2).

3. La "Casita" es una representación gráfica que se ha presentado en numerosos libros de texto para que los alumnos escriban las cuentas verticales.

Pero en muchos casos, también, los niños no han tenido oportunidades de aprender a realizar un control posterior de la operación, a estimar previamente el resultado o a realizar cálculos aproximados.

Estos conocimientos –que son utilizados en forma espontánea por muchos adultos, por algunos niños y por algunos maestros al corregir las cuentas de los niños- no han sido siempre considerados como objeto de enseñanza.

Se trata de uno de los conocimientos que durante años la escuela ha esperado que los alumnos utilicen, pero sobre los que no siempre se ha efectuado una enseñanza sistemática.

Habitualmente sucede con los conocimientos exigidos por la escuela, pero no enseñados, que sólo algunos niños parecen disponer de ellos. Al no garantizar el aprendizaje a través de la enseñanza, queda a cargo de cada alumno descubrir procedimientos de cálculo mental que le permitan controlar los algoritmos.

Desde hace algunos años se ha empezado a revalorizar la enseñanza de estos conocimientos con la intención de instalarlos como contenidos (Saiz, s/f; Parra, 1994; MCyE, 1995). Esto implica ampliar el concepto de cálculo no reduciéndolo exclusivamente a la utilización de un procedimiento único y convencional para resolver todas las operaciones.

¿Cómo puede la escuela hacerse cargo de que el cálculo mental sea un aprendizaje de todos los niños?

Las "ilusiones" de la enseñanza

Se puede considerar que la enseñanza del algoritmo convencional, como punto de partida y como prioridad para el aprendizaje del cálculo, esconde algunas ilusiones.

Ilusión 1: "El saber puede ser transmitido directamente"

Ilusión 2: "El algoritmo convencional es suficiente para el dominio del cálculo"

Ilusión 3: "La reproducción del modelo por parte de los alumnos evitará la aparición de los errores"

Analizaremos cada una de estas afirmaciones:

Ilusión 1: "El saber puede ser transmitido directamente"

Los algoritmos son construcciones sociales que resultan de varios siglos de elaboración. Son, básicamente, conjuntos de pasos que tienen la ventaja de servir para todos los casos. El algoritmo convencional es la síntesis de un conjunto de operaciones en las que se ponen en juego propiedades de los números y de las operaciones. Sus ventajas son, a la vez, las causas de muchas dificultades para los niños: la síntesis no deja al descubierto las razones de cada paso.

En la enseñanza tradicional se creyó ilusoriamente que los conocimientos a aprender por los alumnos podían ser comunicados desde el inicio y esto era suficiente para que se produjera el aprendizaje. Posteriormente, como consecuencia de las propuestas basadas en supuestos de aprendizaje conductista, se propusieron estrategias didácticas tendientes a reducir y graduar la enseñanza a sus partes más simples.

Para una perspectiva constructivista del aprendizaje de la matemática, existen diferentes aproximaciones sucesivas a un objeto de conocimiento. Es decir, que aun cuando sea importante el conocimiento y dominio del algoritmo convencional, no habría por qué suponer que éste debería ser el punto de partida del proceso de enseñanza. Pueden generarse en el aula condiciones para un proceso de construcción que tenga en cuenta los procedimientos espontáneos de los niños.

¿Qué otros procedimientos pueden aprender los niños sobre los cálculos antes de aprender a usar el procedimiento más sintético, eficaz y económico? ¿Qué procedimientos son, para los niños, aunque más largos, menos costosos, y más transparentes?

Ilusión 2: "El algoritmo convencional es suficiente para el dominio del cálculo"

Esta creencia se basa en la utilidad evidente del algoritmo para resolver todos los casos, de modo eficaz y sintético. Sin embargo, existen prácticas sociales del cálculo mental no algorítmico que para muchos casos son más económicas que el algoritmo convencional.

El aprendizaje de las estrategias de cálculo incluye muchos otros aspectos además del dominio del algoritmo. Los niños pueden aprender en la escuela, además de "a hacer bien las cuentas", a estimar resultados, a realizar cálculos aproximados, a utilizar estrategias diferentes de cálculo según el tamaño de los números involucrados, a utilizar y controlar la calculadora, etcétera.

Es decir, se plantea la enseñanza del "cálculo reflexionado" (Parra, 1994).

Lo dicho no implica abandonar la enseñanza de los algoritmos, ya que nadie duda hoy de su eficacia. Es muy importante que los niños aprendan en la escuela a usarlos, pues sirven para resolver cualquier cuenta con éxito y en un tiempo breve.

Tampoco se trata de proponer "un método de enseñanza largo" para enseñar lo mismo, sino que se amplía aquello que se enseña. El objeto de estudio no se restringe desde esta perspectiva al algoritmo, sino a la enseñanza de diversas estrategias de cálculo.

¿Qué otros recursos de cálculo son útiles para realizar cálculos aproximados? ¿Qué estrategias pueden utilizar los niños para controlar lo que realizan cuando ya saben los algoritmos convencionales? ¿Para qué casos conviene usar cálculos no algorítmicos?

Ilusión 3: "La reproducción del modelo por parte de los alumnos evitará la aparición de los errores"

Así como la creencia de que la descomposición del algoritmo en partes permitiría a los alumnos comprender las razones de cada paso, también hubo una fuerte confianza ilusoria basada en la repetición. El modelo conductista de aprendizaje suponía el refuerzo como un componente esencial del mismo. Específicamente en el terreno del cálculo, el supuesto de que si se les propone a los niños ejercitar y repetir numerosas veces la tarea de realizar cuentas, podrían aprenderlas. De ahí el origen de las prácticas repetitivas durante todos los años de la escolaridad primaria.

Sin embargo, los niños tienen sus propias ideas. Y las ponen en juego en lo que realizan. Han recibido numerosas veces la explicación del algoritmo, han ejercitado durante años las mismas cuentas y aún a fines de la escolaridad siguen apareciendo errores que muchas veces no consisten simplemente en equivocaciones.[4]

Se puede, entonces, revisar el énfasis puesto hasta ahora en los procedimientos mecanizados en general, y en particular aquéllos que resaltan la separación de las unidades, decenas y centenas por sobre la comprensión de la globalidad del número.

Desde este punto de vista, hay errores de los niños que no pueden ser concebidos como un fracaso individual del aprendizaje, por lo tanto, habrá que preguntarse qué aspectos no han sido considerados desde la enseñanza.

¿Qué actividades de cálculo se pueden proponer a los alumnos que no sean reproducir cuentas enseñadas? ¿Cómo trabajar en la clase con los errores de cálculo?

---

4. Distinguimos entre errores y equivocaciones, considerando que entre las producciones de los niños podemos encontrar errores que pueden ser interpretados como errores constructivos, que denotan una concepción errónea, una dificultad recurrente, y las equivocaciones que el mismo niño puede revisar, debidas a distracciones u olvidos.

Los cálculos no se reducen al algoritmo

Se ha señalado la importancia de que en el proceso de aprendizaje de las operaciones los alumnos tengan la posibilidad de estimar previamente y controlar posteriormente los resultados, de utilizar diversos procedimientos de cálculo, de tomar decisiones sobre la necesidad de realizar un cálculo exacto o aproximado.

Proponemos un abordaje de las operaciones en el que no se limite el aprendizaje de los alumnos a "hacer bien las cuentas", sino que también aprendan:

- a elegir diferentes procedimientos de cálculo según los números involucrados;
- a decidir si es necesario utilizar procedimientos de cálculo exacto o aproximado según la situación;
- a disponer de diferentes recursos de estimación previa;
- a tener práctica de control posterior de resultados;
- a usar la calculadora para operar, controlar resultados, investigar relaciones;
- a utilizar las propiedades de las operaciones para inventar procedimientos o probarlos;
- a incorporar procedimientos de cálculos inventados por otros.

De este modo, se enfoca la enseñanza del cálculo mental. Éste se puede concebir como un conjunto de procedimientos no algorítmicos, es decir, en donde no hay una serie de pasos estables a seguir. Los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones. Pueden ser cálculos realizados con lápiz y papel. El cálculo mental no necesariamente es más veloz que el cálculo algorítmico, ni memorístico, aunque se utilicen ciertos cálculos memorizados. Su característica principal es la de ser un cálculo reflexionado (Parra, 1994).

El cálculo mental puede ser exacto o aproximado. En numerosos casos, los adultos estamos ante una situación en la que tenemos que evaluar si una cantidad nos alcanza para comprar ciertos objetos, y realizamos un cálculo mental aproximado. La aproximación es también un importante recurso de estimación previa al cálculo exacto y de control posterior.

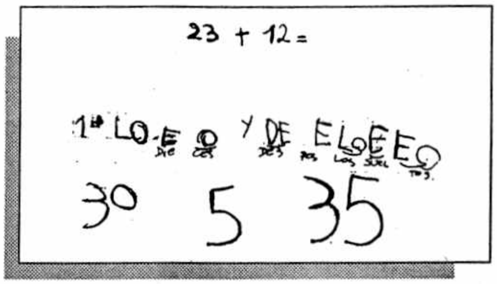
La enseñanza del cálculo mental no reemplaza el cálculo algorítmico. En la escuela se puede aprender a realizar cálculos reflexionados y también a aplicar correctamente los algoritmos. Estos últimos tienen la ventaja de poder ser aplicados en todos los casos y funcionar correctamente, pero es importante que los niños aprendan en la escuela a evaluar en cuáles casos les es más conveniente utilizarlo, en qué casos lo es el cálculo mental, a manejar la calculadora para realizar operaciones, etcétera.

Se trata de que el aprendizaje del cálculo no se reduzca a una técnica de aplicación mecánica. Es posible aprender a hacer las cuentas, a automatizarlas, a usar la calculadora sin sacrificar la comprensión de las operaciones.

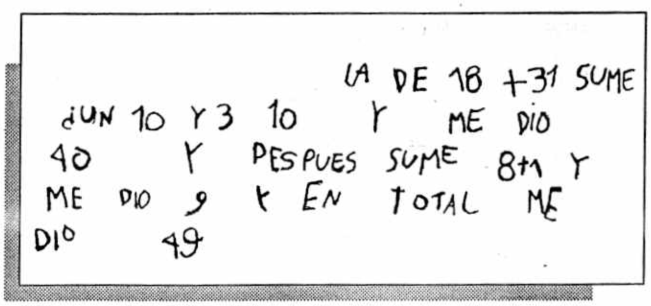
Procedimientos no algorítmicos para la resolución de operaciones

Los niños pueden resolver operaciones aun cuando no hayan aprendido un algoritmo para resolverlas. Veamos estos ejemplos de los primeros años.

Este niño, para hacer 23 + 12, descompone ambos números y registra 30, resultante de la suma de 10+20, y 5, obtenido a partir de 2 + 3, y luego suma ambos resultados parciales.



Para resolver este cálculo, este niño descompone el 18 en 10 y 8 y el 31 en 30 y 1 y suma el 10 y el 30 por una parte y el 8 y el 1 por la otra.



Estos niños no disponen de un procedimiento experto para resolver el problema, ya que no se les ha enseñado hasta el momento la "cuenta vertical", pero los conocimientos que tienen les permiten resolverlo.

¿Cuál es el objetivo de que los alumnos utilicen procedimientos diferentes para resolver una operación que nadie les enseñó, si muchos de ellos realizan procedimientos que desde nuestro punto de vista son más costosos y largos? (Documento 4 EGB, GCBA, 1997).

Los alumnos pueden -a partir de los cálculos correctos e incorrectos que realizan- analizar cuáles son las propiedades que utilizan, preguntarse acerca de si el procedimiento que usaron para una cuenta servirá para otras. Un objetivo es que los alumnos puedan reconocer las propiedades de los números y de las operaciones a partir de su uso y luego, en un trabajo colectivo, sistematizar las conclusiones obtenidas.

Tanto los procedimientos "espontáneos" de los alumnos para resolver las operaciones, como así también ciertos cálculos con números «redondos», son parte importante de la enseñanza del cálculo. Relativizamos la idea de que son "espontáneos", ya que para que aparezcan son necesarias ciertas condiciones de trabajo en el aula y ciertos conocimientos disponibles. Abordar las operaciones como un problema a resolver exige, por parte del docente, la tarea inicial de alentar en sus alumnos la invención y utilización de procedimientos.

Estas producciones de los niños muestran conocimientos que han construido sobre los números. Lerner y Sadovsky (1994) se preguntan al respecto:

"¿Cuál es la naturaleza de la relación entre los procedimientos infantiles para obtener los resultados de las operaciones y el conocimiento que los niños van elaborando acerca del sistema de numeración?

"Se trata de una relación recíproca: por una parte, los procedimientos de los chicos ponen en acto –además de las propiedades de las operaciones- lo que ellos saben del sistema y, por otra parte, la explicitación de esos procedimientos permite avanzar hacia una mayor comprensión de la organización decimal" (Lerner y Sadovsky, 1994).

Si bien los conocimientos sobre el sistema de numeración se ponen en juego para producir estos procedimientos de cálculo, no se trata de "esperar" a que los niños dominen las propiedades del sistema de numeración para poder resolver cálculos mentales. Será necesario proponer simultáneamente en el aula situaciones que favorezcan la reflexión y la sistematización de conocimientos sobre los números y sobre las operaciones.

Ha sido señalado, en los primeros artículos, un modo de organización de la clase para trabajar en la resolución y reflexión sobre los problemas. Del mismo modo, la organización de las clases sobre los cálculos también pasa por diferentes momentos. Luego de una fase de resolución individual, el docente propone a los niños que cada uno explique el "método" que ha utilizado para resolver un cálculo. Se realiza una puesta en común en la que se exponen tanto los procedimientos correctos como los incorrectos. Luego, o bien en otra clase, se les propone a los alumnos comparar los diversos procedimientos, ver en qué se parecen, analizar cuáles fueron más largos y más cortos, descubrir aquéllos que combinan dos o más procedimientos e inventar nuevos entre todos.

A partir de las estrategias de resolución por parte de los alumnos, a partir del uso de las propiedades de la suma y la resta, y de las actividades de reflexión y de sistematización de lo realizado, los niños podrán avanzar hacia la utilización de estrategias más económicas de cálculo y hacia la sistematización de algunas propiedades.

Los procedimientos de cálculo se instalan en la clase como un objeto de reflexión. Se realiza un "estudio" en el aula en el que se comparan y analizan los diferentes procedimientos.

Si bien se parte de los diferentes procedimientos de los niños, a lo largo de las clases se van instalando avances necesarios para todos, se realizan acuerdos que permiten ir aproximándose al algoritmo convencional.

Estos acuerdos permiten al docente ir provocando avances en los procedimientos de todos los niños, de tal modo que haya una cierta homogeneización de la clase. Es decir, dichos procedimientos son en primer lugar espontáneos, y luego están influidos intencionalmente por la producción colectiva y la intervención docente.

Por ejemplo, en una clase se puede resaltar que para hacer 45 + 32 se pueden hacer diferentes cálculos en los que los números se descompongan en partes y que con todos se obtiene el mismo resultado:

$45 + 32 =$

$45 + 2 = 47$ y $47 + 30 = 77$

o bien:

$45 + 32 =$

$32 + 5 = 37$ y $37 + 40 = 77$

o también :

$45 + 32 =$

$40 + 5 + 30 + 2$

$70 + 7 = 77$

La casa de mi abuela tiene 2 pisos. El otro día me regaló ..25.. pesos para que me comprara 2 buzos y 1 pantalón. Después mi tía me trajo 12 pesos. ¿Cuántos pesos tengo ahora?

¡SE 26 + 10 + 2 = 38
CON LA CUENTA

La casa de mi abuela tiene 2 pisos. El otro día me regaló .... pesos para que me comprara 2 buzos y 1 pantalón. Después mi tía me trajo ..38.. ¿Cuántos pesos tengo ahora?

EN LA CABESPUSE 25 Y LE SUMÉ 25 + 2 ± 10
2 Y LESME 10 MASY MEQUDÓ 37

Los niños utilizan algunos de esos procedimientos que están "estudiando".

En algún momento se intenta que todos puedan realizar estas sumas descomponiendo los números en "dieces" y "unos" –más allá de que no es necesario que todos registren de esta forma el procedimiento de descomposición aditiva de los números–.

Los procedimientos comunes –que han sido resaltados en la clase para homogeneizar– permiten provocar avances, pero se trata de que los chicos no pierdan el control de los pasos que realizan. Si bien son estrategias compartidas, queda a cargo de cada alumno decidir qué descomposiciones hacer y cómo registrarlas.

Este trabajo se propone a los niños durante todo primer año y durante parte de segundo, previamente a la enseñanza del algoritmo vertical convencional de la suma y la resta. Esto significa una postergación en el tiempo de la utilización de cálculos mecanizados, pero hay que advertir que el adelanto en su enseñanza provoca la aparición de errores y obstaculiza el despliegue de procedimientos de cálculo mental.

La enseñanza de diversas estrategias de cálculo no finaliza cuando los niños ya conocen el procedimiento convencional. Por el contrario, el cálculo mental es uno de los caminos hacia la construcción del algoritmo y es luego su herramienta de control (Parra, 1994). Este trabajo se extiende a lo largo de todos los años de la escolaridad, proponiendo a los alumnos constantemente situaciones en las que sea necesario investigar y utilizar diversas relaciones y propiedades de los números y las operaciones.

Para hacer cálculos mentales hace falta disponer de algunos conocimientos

El cálculo mental es un cálculo reflexivo, en el sentido de que, cada vez que lo realizan, los alumnos deben tomar decisiones, no se aplica automáticamente un mismo método para todos los casos. Desde esta perspectiva, cada operación es un problema a resolver. Para realizar cálculos mentales y decidir en cada caso un procedimiento que permita controlar lo que se está haciendo y a la vez tener una cierta economía en la obtención del resultado, es necesario disponer en memoria de ciertos recursos. Para realizar cualquier tipo de cálculos mentales se precisa disponer de resultados parciales.

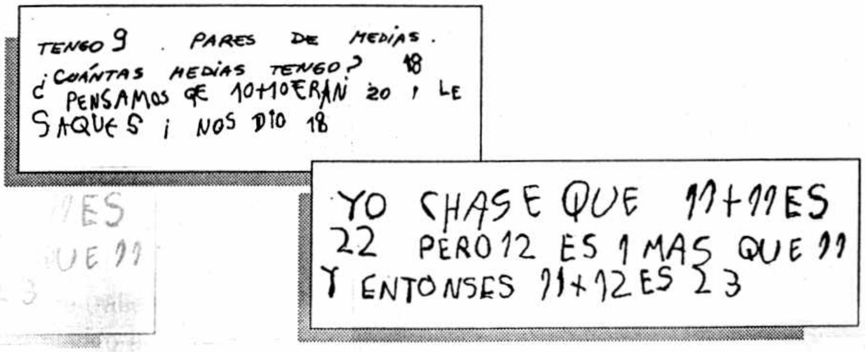
Por ejemplo, para poder hacer 125 + 135 pensándolo como 100 + 100= 200, 20 + 30 = 50, 5 + 5 = 10 y 200 + 50 + 10 = 260, utilizamos sumas de números redondos de unidad seguida de ceros (100 + 100, 20 + 30, etc.), sumas de dobles (5 + 5 = 10), etcétera.

No se conoce a priori el resultado de 125 + 135, pero se dispone de otros conocimientos a los cuales apelar que permiten descomponer estos números y realizar un cálculo mental.

Para que estos conocimientos estén disponibles es preciso realizar un trabajo sistemático de memorización de ciertas sumas y restas (Guillaume, 1988).

El aprendizaje de ciertos resultados puede permitir a los niños apoyarse en aquello que saben para averiguar lo que no saben. Se propicia, en la clase, un trabajo de construcción colectiva de un repertorio[5] memorizado. Esta tarea, lejos de ser un mero ejercicio de repetición de ciertos números, puede ser abordada a partir de un trabajo de reflexión y análisis de las relaciones entre los números.

Por ejemplo, este niño utiliza la suma memorizada de 10 + 10 para resolver un problema de 9 +9:



Una consecuencia de lo anterior es la necesidad de abordar en cada año la memorización de ciertos cálculos, y de propiciar la toma de conciencia de los mismos. Se les pueden proponer a los niños actividades donde deban utilizar recursos memorizados y donde se les pida explicitar cuáles cálculos memorizados les permitieron averiguar lo desconocido.[6]

El cálculo mental y la calculadora

El uso de la calculadora ha sido muy cuestionado. Se suele oponer el uso de la calculadora al del cálculo escrito y al cálculo reflexionado. Existen temores de que el uso de la calculadora en la escuela pueda provocar un aumento en las dificultades ya habituales al hacer las cuentas.

5. Se denomina repertorio aditivo o sustractivo al conjunto de relaciones numéricas de las que se dispone en memoria (Guillaume,1988).

6. En el artículo citado anteriormente se incluye una distribución de cálculos mentales sugeridos por año realizada por Irma Saiz para la provincia de Corrientes.

Por el contrario, consideramos que la calculadora es una herramienta que los niños pueden utilizar para realizar cálculos mentales en variadas situaciones de enseñanza. Más allá de todos los posibles argumentos a favor de dejar entrar en la escuela los avances tecnológicos -que ya justificarían la importancia de que los niños dispusieran entre sus útiles escolares de una calculadora-, es una herramienta útil para aprender. La calculadora no reemplaza los aprendizajes de los niños sobre estrategias de cálculo, sino que puede ser utilizada en la escuela para investigar relaciones entre números.

Por ejemplo, problemas como el siguiente:

"Tengo en la pantalla de la calculadora el número 154. ¿Qué cuenta tengo que hacer para que aparezca el número 104?" (Lerner, Sadovsky, 1994).

En este problema, la calculadora ofrece la posibilidad de provocar una situación de análisis de las relaciones entre los números. Posiblemente muchos niños intentarán restarle el 5, que es aquello que quieren que desaparezca de la pantalla. Probar diferentes números, reflexionar y llegar, luego del trabajo colectivo, a la conclusión "ése 5 vale 50", reflexionar acerca de por qué restarle 5 no es lo mismo que sacar un 5 de la pantalla, son claramente situaciones en las cuales la calculadora no reemplaza los conocimientos de los alumnos. Por el contrario, es un instrumento para poder buscar regularidades, encontrar leyes sobre el funcionamiento de la serie numérica y de las operaciones.

Los chicos en la escuela pueden aprender a evaluar en qué casos es realmente conveniente usar la calculadora, en qué casos pueden resolver la operación mediante algún procedimiento de cálculo mental y en cuáles conviene hacer la cuenta convencional escrita. Por ejemplo, a partir de ejercicios como el siguiente:

"¿En cuál te parece más conveniente usar la calculadora? Justifica tu elección".

23 + 34=

35 + 56 + 67 + 55 + 54=

100 + 100 + 30 +10 + 10 +20 +25=

Se trata de provocar en el aula un análisis acerca de los números involucrados en cada cálculo. Posiblemente, algunos niños dirán que los dos últimos "conviene hacerlos con la calculadora porque son muchos números", y otros niños argumentarán a favor del cálculo mental en el tercer caso, "porque son números redondos". Se puede discutir con ellos acerca de la economía de tiempo en cada caso, acerca de tener en cuenta tanto la cantidad de los números como cuáles son, etcétera.

Otro uso de la calculadora es para verificar cálculos aproximados.

Por ejemplo: *"¿Cuánto dará aproximadamente 128 + 135 + 160?"*. Se espera que los alumnos puedan pensar 120 + 130 + 160 y anticipar que el resultado rondará el número 400. Seguramente, algunos niños pensarán que el resultado está cerca de 300, habiendo tomado solamente 100 + 100 +100. La calculadora podrá mostrarles la distancia con el resultado exacto y será necesario analizar qué ha sucedido.

Por supuesto, la calculadora también permite que los niños controlen o corrijan autónomamente el resultado de las cuentas realizadas, o puedan en algunos problemas despreocuparse de las cuentas y centrarse en el tipo de operaciones que es conveniente hacer. Ya en los primeros años, la calculadora puede ser una herramienta de análisis, un instrumento para investigar relaciones numéricas y también un elemento de control.

En este artículo han sido planteadas algunas ideas respecto de la enseñanza de estrategias de cálculo, explicitando los objetivos de aprendizaje a los que se apunta. Desde esta perspectiva de la enseñanza de la matemática también son aprendizajes para los niños:

- analizar cuáles procedimientos son correctos y cuáles no;
- decidir cuáles son las formas más económicas de resolver cada operación;
- debatir acerca de la posibilidad de utilizar varias formas para la misma operación;
- reflexionar acerca de lo que es fácil o difícil para unos y para otros;
- aprender a usar lo que se sabe para averiguar lo que no se sabe;
- comunicar a los otros lo realizado en forma oral y escrita;
- incorporar procedimientos de los otros como propios;
- reflexionar y tomar conciencia de lo que saben y de lo que no saben.

Los supuestos didácticos del enfoque presentado claramente se distinguen de los que hemos analizado críticamente para la enseñanza del algoritmo convencional como punto de partida y como prioridad. Nos hemos referido a las "ilusiones" –en el sentido de creencias que se denotan ahora falsas- que subyacían a dicha enseñanza.

Planteamos ahora, en cambio, desde esta concepción de la enseñanza de la matemática, otras "ilusiones" -pero en un sentido de la palabra diferente, esta vez como ideas que guían la acción hacia un futuro deseable- con respecto a la importancia de generar, incluso en el controvertido terreno del cálculo, una experiencia colectiva de quehacer matemático en el aula.