# 9

# Los problemas de tipo aditivo

Hemos visto en los capítulos precedentes que la posibilidad de sumar medidas es la propiedad más importante; la que da a la noción de número su originalidad y poderío en relación con las nociones que la anteceden. Veremos en el presente capítulo que existen varios tipos de relaciones aditivas y, en consecuencia, varios tipos de adiciones y sustracciones.

Las matemáticas consideran, a justo título, a la sustracción y a la adición como operaciones matemáticas estrechamente emparentadas. En este capítulo, por nuestra parte, vamos a estudiarlas juntas; hay pues que considerar el título del mismo en sentido amplio. Por ''problemas de tipo aditivo'' entendemos aquellos cuya solución exige adiciones o sustracciones; de la misma manera que por ''estructuras aditivas'' entendemos las estructuras o las relaciones en juego que sólo están formadas de adiciones o sustracciones.

## MEDIDAS Y TRANSFORMACIONES

Acabamos de ver en el capítulo anterior que se podía sumar una medida a otra y encontrar como resultado una medida.

Ejemplos:

– Si Pablo tiene 6 canicas de vidrio en su bolsillo derecho y 8 canicas de acero en su bolsillo izquierdo, tiene en total 14 canicas.

6 es la medida del conjunto de canicas de vidrio.
8 es la medida del conjunto de canicas de acero.
14 es la medida del conjunto-unión de los dos primeros.

– Si quiero poner a lo largo del muro de mi cocina una mesa de 1.55 m y una lavadora de vajilla de 0.60 m de ancho, necesito cuando menos una longitud total de 2.15 m.

  1.55, 0.60 y 2.15 son efectivamente las medidas de la mesa, de la lavadora y del lugar ocupado total.

Lo anterior define una primera forma de relaciones aditivas en las cuales dos números de la misma naturaleza –puesto que ambos representan medidas– son sumados uno con otro y dan por resultado un número de la misma naturaleza; igualmente una medida. En el primer ejemplo los números representan cardinales, en el segundo longitudes.

Pero en el capítulo sobre las relaciones ternarias ya habíamos encontrado una forma diferente de relaciones aditivas, cuando introdujimos el modelo estado-transformación-estado.

Ejemplos:

– Si Pablo tiene 7 monedas de un peso y pierde 3, le quedan 4.

  7 es una medida.
  4 es una medida.

  Pero –3, que representa la pérdida de 3 monedas, no es una medida, es una transformación.

– Si yo pesaba 64.600 kg antes de salir de vacaciones, y al regreso peso 69.350 kg, es que subí de peso 4.750 kg.

  64.600 y 69.350 son medidas.
  Pero +4.750 es una transformación.

Esta diferencia entre medidas-estados y transformaciones nos conducirá a distinguir varios tipos de números.

## Números naturales y números relativos

Los números más simples son aquellos que corresponden a las medidas de los conjuntos de los objetos aislables, a los cardinales: 1, 2, 3, 4, 5,..., etcétera.

Los matemáticos los llaman "números naturales", y añaden el número 0, que corresponde a la medida del conjunto vacío. Designan con una $N$ el conjunto de los números naturales:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

No vamos a extendernos sobre las propiedades matemáticas de este conjunto; sólo señalamos que los números naturales no son ni positivos ni negativos, puesto que corresponden a medidas y no a transformaciones. Los números naturales son *números sin signo.*

Si los números naturales son números sin signo, no pueden representar transformaciones, puesto que éstas son necesariamente positivas o negativas. Hay pues que introducir otro conjunto de números, dotados de signo, los "números relativos". Éstos representan adecuadamente las transformaciones aditivas (adiciones y sustracciones) que se pueden efectuar sobre la medida de un conjunto de objetos aislables, añadiendo o quitando elementos a dicho conjunto. Se designa por $\mathbb{Z}$ este conjunto de números relativos.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -n, \ldots, -5, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots, +n \ldots\}$$

Los números naturales representan las medidas de conjuntos de objetos aislables. Los números relativos representan las transformaciones que experimentan estas medidas.

## Números enteros y números decimales

Si uno se limita a las medidas de conjuntos de objetos aislables, sólo se obtienen como medidas y transformaciones números enteros. Cuando se consideran las medidas de magnitudes continuas (longitudes, áreas, masas, volúmenes...) no se obtienen como medidas números enteros, sino números que se tratan de aproximar a través de números con punto; es decir, en base diez, números decimales. En los ejemplos precedentes, 1.55 (metros) y 79.350 (kilogramos) son números decimales.

La distinción precedente entre números naturales y relativos es válida también para los números con punto; pero los matemáticos no han inventado términos particulares para tal distinción. Se podría hablar de "números con punto naturales" para representar las medidas, y de "números con punto relativos" para representar las transformaciones; pero debe saberse que esta denominación es un abuso del lenguaje: los naturales y los relativos son, en matemáticas, números enteros y no decimales. No vamos a extendernos demasiado sobre la cuestión de los números decimales. Es, sin embargo, una cuestión importante y difícil, pero el autor no la ha estudiado lo suficiente.

## LAS SEIS GRANDES CATEGORÍAS DE RELACIONES ADITIVAS

Vamos a mostrar ahora que existen varios tipos de relaciones aditivas y, en consecuencia, varios tipos de adiciones y sustracciones. Estas distinciones no se hacen habitualmente en la enseñanza elemental, tampoco en la enseñanza secundaria; sin embargo, son importantes, ya que la dificultad de los distintos casos que vamos a ver es muy diferente. Tales distinciones están igualmente justificadas desde el punto de vista matemático.

Las relaciones aditivas son relaciones ternarias que pueden encadenarse de diversas maneras y ofrecer una gran variedad de estructuras aditivas; daremos ejemplos más adelante. Pero en el análisis fundamental que sigue vamos a restringirnos a seis esquemas ternarios fundamentales.

| | |
|---|---|
| Primera categoría: | dos medidas se componen para dar lugar a una medida. |
| Segunda categoría: | una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida. |
| Tercera categoría: | una relación une dos medidas. |
| Cuarta categoría: | dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación. |
| Quinta categoría: | una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo. |
| Sexta categoría: | dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo. |

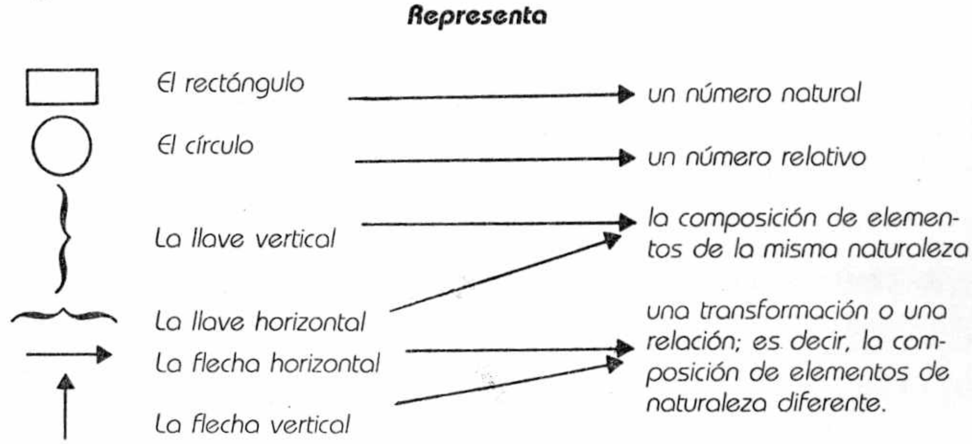
Para hacer entender estas distinciones, lo más sencillo es plantear ejemplos en el interior de un mismo dominio de referencia, escribir el esquema relacional correspondiente y analizar las ecuaciones numéricas equivalentes a dicho esquema.

Vamos a ver que la representación por ecuaciones plantea grandes dificultades y es una fuente considerable de confusión para los niños. Ésa es la razón por la cual sólo se estudia con profundidad en los primeros cursos de la secundaria. Sin embargo, numerosos maestros de primaria se sienten tentados a utilizar las ecuaciones. Ello viene de la tradición y del sentir de que la representación por ecuaciones es la representación matemática por excelencia. Por nuestra parte, estimamos que en la enseñanza elemental casi no se deberían utilizar las ecuaciones; si de todos modos se ha de hacer, que al menos sea con conocimiento de las dificultades que provocan.

Con el fin de concentrar toda la atención del lector en la cuestión de las relaciones en juego, limitamos intencionalmente los ejemplos a un solo dominio de referencia y a números enteros pequeños. Muchos puntos van a aclararse cuando estudiemos en seguida las diferentes clases de problemas para cada categoría de relaciones.

El código utilizado en los diferentes esquemas y ecuaciones no requiere mayores comentarios. Hay que entenderlo de la siguiente manera:

Esquemas




**Ecuaciones**

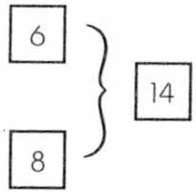
| | |
|---|---|
| $n$ $\longrightarrow$ | *un número natural* |
| $(+n)$ o $(-n)$ $\longrightarrow$ | *un número relativo* |
| $+$ $\longrightarrow$ | *la adición de dos números naturales* |
| **+** $\longrightarrow$ | *la adición de un número natural y de un número relativo* |
| $\boldsymbol{+}$ $\longrightarrow$ | *la adición de dos números relativos* |

- ***Primera categoría:*** se componen dos medidas para dar lugar a una medida.

– Pablo tiene 6 canicas de vidrio y 8 de acero. En total tiene 14 canicas.

6, 8, 14 son números naturales.

Esquema correspondiente:




Ecuación correspondiente: $6 + 8 = 14$

$+$ es la ley de composición que corresponde a la adición de dos medidas, es decir, de dos números naturales.

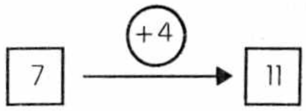
- ***Segunda categoría:*** una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.

*Primer ejemplo*

– Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Ganó 4 canicas. Ahora tiene 11.

7 y 11 son números naturales; +4 es un número relativo.

Esquema correspondiente:




Ecuación correspondiente: $7 \boldsymbol{+} (+4) = 11$

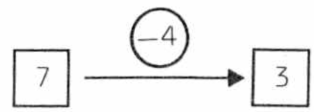
$\boldsymbol{+}$ es la ley de composición que corresponde a la aplicación de una transformación sobre una medida, es decir, a la adición de un número natural (7) y de un número relativo (+4).[1]

[1] Hubiéramos podido escribir más precisamente esta ecuación según el modelo funcional siguiente: $T(i) = f$ (la transformación $T$ opera sobre el estado inicial $i$ para dar el estado final $f$. Eso nos llevaría a: $(+4)\,(7) = 11$, pero ésta es una escritura muy poco usual como para desarrollarla aquí.

*Segundo ejemplo*

– Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Perdió 4 canicas. Ahora tiene 3.

Esquema correspondiente:

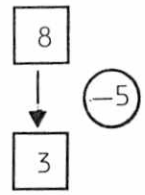



Ecuación correspondiente: $7 + (-4) = 3$

- ***Tercera categoría:*** una relación une dos medidas.

– Pablo tiene 8 canicas. Jaime tiene 5 menos; entonces tiene 3.

Esquema correspondiente:



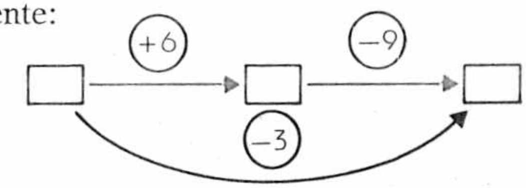

Ecuación correspondiente: $8 + (-5) = 3$

Notemos que este ejemplo corresponde a una relación estática, mientras que los dos precedentes corresponden a transformaciones.

- ***Cuarta categoría:*** dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.

– Pablo ganó 6 canicas ayer y hoy perdió 9. En total perdió 3. +6, –9, –3 son números relativos.

Esquema correspondiente:



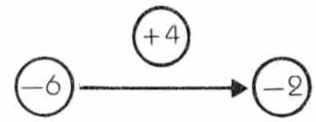

Ecuación correspondiente: $(+6) + (-9) = (-3)$

$+$ es la ley de composición que corresponde a la adición de dos transformaciones, es decir, de dos números relativos.

- ***Quinta categoría:*** una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.

  – Pablo le debía 6 canicas a Enrique. Le devuelve 4. Sólo le debe 2.

  Esquema correspondiente:

  Ecuación correspondiente: (–6) ✚ (+4) = (–2)

  ✚ es aquí la ley de composición que corresponde a la operación de una transformación sobre un estado relativo. Rigurosamente hablando, es diferente de la adición de dos transformaciones que acabamos de ver en la cuarta categoría; pero como tanto un estado relativo como una transformación son representados por números relativos, esta ley de composición corresponde a la adición de dos números relativos. No hay, pues, razón para utilizar un símbolo diferente.

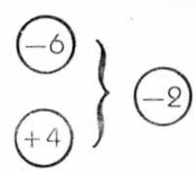
- ***Sexta categoría:*** dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.

  *Primer ejemplo:*

  – Pablo le debe 6 canicas a Enrique, pero Enrique le debe 4. Pablo le debe entonces sólo 2 canicas a Enrique.

  –6, +4, –2 son números relativos.

  Esquema correspondiente:

  Ecuación correspondiente: (–6) ✚ (+4) = (–2)

  Esta categoría está, evidentemente, próxima a la cuarta: en lugar de la transformación, son relaciones-estados que se componen entre sí; pero la diferencia entre estado y transformación justifica, en nuestra opinión, que se forme una categoría aparte. En particular, no hay ningún orden temporal entre dos estados relativos y, cuando se les compone, son considerados necesariamente como contemporáneos; no es el caso de las transformaciones.

✚ es aquí la ley de composición que corresponde a la adición de dos estados relativos, es decir, de dos números relativos. Ésa es la razón por la que utilizamos el mismo símbolo que en las dos categorías precedentes, no obstante que se trata, rigurosamente hablando, de una forma de composición diferente.

*Segundo ejemplo:*

– Pablo le debe 6 canicas a Enrique y 4 canicas a Antonio. Debe 10 canicas en total.

Esquema correspondiente:

$$\left.\begin{array}{c}-6\\[1em]-4\end{array}\right\}\ -10$$

Ecuación correspondiente: (–6) ✚ (–4) = (–10)

Notemos que este ejemplo corresponde a la composición de relaciones entre personas diferentes; Pablo y Enrique por un lado, Pablo y Antonio por el otro; mientras que el primer ejemplo correspondía a la composición de relaciones entre las mismas personas.

## DIVERSIDAD Y DIFICULTAD DESIGUAL DE LOS PROBLEMAS DE TIPO ADITIVO

Antes de abordar el estudio de los problemas que hacen intervenir varias relaciones aditivas, tenemos que desarrollar nuestro análisis. En efecto, la complejidad de los problemas de tipo aditivo varía en función, no sólo de las diferentes categorías de relaciones numéricas que acabamos de ver, sino también en función de las diferentes clases de problemas que se pueden plantear para cada categoría. Empecemos por la segunda categoría.

## Análisis detallado de los problemas concernientes a la segunda categoría de las relaciones aditivas

Recordemos el esquema:

$$\boxed{a} \xrightarrow{\;b\;} \boxed{c}$$

Distinguiremos primero seis grandes clases de problemas:

- según que la transformación $b$ sea positiva o negativa;
- según que la pregunta se refiera al estado final $c$ (conociendo $a$ y $b$), a la transformación $b$ (conociendo $a$ y $c$), o al estado inicial a (conociendo $b$ y $c$).

| | **La pregunta se refiere a** | | |
|---|---|---|---|
| | $c$ | $b$ | $a$ |
| $b > 0$ | *Ejemplo 1* | *Ejemplo 2* | *Ejemplo 3* |
| $b < 0$ | *Ejemplo 4* | *Ejemplo 5* | *Ejemplo 6* |

- *Ejemplo 1*

"Había 17 personas en el autobús, suben 4. ¿Cuántas hay ahora?"

$$\boxed{17} \xrightarrow{\;+4\;} \boxed{x}$$

- *Ejemplo 2*

"Un parisino sale de vacaciones en su automóvil. A la salida de París su contador kilométrico marca 63 809 km; a su regreso marca 67 351 km. ¿Cuántos kilómetros viajó en su automóvil durante las vacaciones?"

$$\boxed{63\ 809} \xrightarrow{\;x\;} \boxed{67\ 351}$$

- *Ejemplo 3*

"Enrique acaba de encontrarse 2.60 pesos en la banqueta. Los pone en su monedero. En total tiene 3.90 pesos. ¿Cuánto tenía en su monedero antes de encontrarse el dinero?"

$$\boxed{x} \xrightarrow{+2.60} \boxed{3.90}$$

- *Ejemplo 4*

"Juan Pedro tiene 9 caramelos. Le da 4 a su hermanita. ¿Cuántos le quedaron?"

$$\boxed{9} \xrightarrow{-4} \boxed{x}$$

- *Ejemplo 5*

"Pablo acaba de jugar a las canicas. Tenía 41 canicas antes de jugar. Ahora tiene 29. ¿Cuántas canicas perdió?"

$$\boxed{41} \xrightarrow{x} \boxed{29}$$

- *Ejemplo 6*

"En 1974 la población de París era de 2 844 000 habitantes. Disminuyó en 187 000 personas en cinco años. ¿Cuántos habitantes había en 1969?"

$$\boxed{x} \xrightarrow{-\,187\ 000} \boxed{2\ 844\ 000}$$

Además de las seis grandes clases de problemas definidos en el cuadro anterior, los ejemplos ilustran otras diferencias que tomaremos en consideración en los párrafos siguientes: facilidad más o menos grande del cálculo necesario (tamaño de los números, carácter decimal...), orden y presentación de las informaciones, tipo de contenido y de relación considerados...

Tratemos primero de precisar la significación de esta clasificación de problemas posibles en seis clases.

El cálculo relacional que implica la solución de los problemas 1 y 4 es el más sencillo que uno se pueda imaginar, puesto que basta con aplicar una transformación directa a un estado inicial. Sin embargo, en la clase 1 la transformación directa es una adición y su aplicación es siempre posible; mientras que en la clase 4, la transformación directa es una sustracción y su aplicación sólo es posible si el valor del estado inicial es suficientemente grande. Encontramos aquí una fuente eventual de dificultades para los más pequeños, sobre la cual es necesario ser muy claros: por ejemplo, no podemos dar 4 bombones si sólo tenemos 3.

Hay que subrayar, por otro lado, que la sustracción aparece en este esquema como una operación *sui generis*, que no supone de ninguna manera la introducción previa de la adición. Dar, perder, bajar, disminuir, etc., son transformaciones que tienen significado por sí mismas. Evidentemente, corren a la par de las transformaciones opuestas: recibir, ganar, subir, aumentar, etc., pero de ninguna manera están subordinadas a ellas. La sustracción no exige ser definida como la inversa de la adición, tiene una significación propia; y el problema que se plantea al maestro es el de mostrar el carácter opuesto o recíproco de la adición y la sustracción, no de la segunda en relación con la primera.

El cálculo relacional que implica la solución de los problemas de las clases 2 y 5 es ya más completo y da lugar a posteriores fracasos. Incluso con números pequeños, casi no es posible abordar este tipo de problemas antes del final del primer año o del segundo de la primaria, mientras que los problemas de las clases 1 y 4 pueden ser tratados más tempranamente. Existen dos grandes procedimientos para tener éxito con este tipo de problemas; el procedimiento del ''complemento'' y el procedimiento de la ''diferencia''. El procedimiento del ''complemento'' consiste en buscar, sin hacer una sustracción, lo que hay que añadir (o quitar) al estado inicial para llegar al estado final. Este procedimiento sólo es posible con números pequeños o aquellos que se presten al cálculo mental; pero no requiere un cálculo relacional complejo, y es utilizado muy precozmente.

El procedimiento de la ''diferencia'' consiste en buscar, por sustracción entre los dos estados inicial y final, el valor de la transformación. Este procedimiento se utiliza con todos los números, cualesquiera que éstos sean, pero supone un cálculo relacional más elaborado que el procedimiento del ''complemento'': si $b$ hace pasar de $a$ a $c$, entonces $b$ es igual a la diferencia entre $c$ y $a$.

Este modesto cálculo relacional está fuera del alcance de la mayoría de los niños de primer año de primaria, sobre todo porque el valor absoluto de la transformación no se obtiene de la misma manera si es positiva (clase 2) o negativa (clase 5):

$$\text{Clase 2, } |b| = c - a \qquad \text{Clase 5, } |b| = a - c$$

El procedimiento del "complemento" no obliga al niño a razonar sobre la transformación más que en el sentido directo: partir del estado inicial, aplicar la transformación, y llegar al estado final. Si el niño no consigue encontrar inmediatamente el complemento, puede incluso ensayar y corregir en función del resultado obtenido: en el ejemplo 5, el niño puede, así, aplicar a 41 la transformación −10, que da 31; después −11, lo que da 30; finalmente −12, para llegar a 29, el resultado buscado. De ahí la conclusión de que Pablo perdió 12 canicas.

El procedimiento de la "diferencia" obliga al niño, al contrario, a razonar de entrada sobre la transformación en las relaciones que unen el estado final con el estado inicial, y a calcular directamente por sustracción $|b| = c - a$: en el ejemplo 5, donde la transformación es negativa, se obtiene:

$$|b| = a - c = 41 - 29 = 12.$$

El cálculo relacional, que implica la solución de los problemas de las clases 3 y 6, es todavía más complejo, ya que la solución canónica (válida en todos los casos) implica la inversión de la transformación directa y el cálculo del estado inicial por aplicación al estado final de dicha transformación inversa: si $b$ hace pasar de $a$ a $c$, entonces $-b$ hace pasar de $c$ a $a$, y hay que aplicar $-b$ a $c$ para encontrar $a$. Las clases de problemas 3 y 6 son sensiblemente más difíciles que las clases 2 y 5, y mucho más difíciles que las clases 1 y 4, aun con números menores que diez; pero también aquí encontramos varios procedimientos alternativos a la solución canónica.

El procedimiento del "complemento", que consiste en buscar directamente lo que hay que añadir a $b$ para encontrar $c$, sólo es válido cuando la transformación es positiva o cuando los números que intervienen se prestan al cálculo mental.

El procedimiento del "estado inicial hipotético" consiste en plantear la hipótesis de un cierto estado inicial; aplicarle la transformación directa; encontrar un estado final, y corregir la hipótesis inicial en función del estado obtenido (comparación del estado final encontrado con el estado final dado en el problema). Los ejemplos 3 y 6 no se prestan bien para la ilustración de este procedimiento, pero el ejemplo siguiente lo ilustra mejor.

"Pascual distribuye un caramelo a cada uno de sus 7 camaradas. Distribuye así 7 caramelos. Le quedan 4. ¿Cuántos caramelos tenía antes de la distribución?"

Algunos niños razonan entonces de la manera que ilustra el ejemplo siguiente:

"Si Pascual tiene 10 caramelos y da 7, le quedan 3. No, no es eso, son más. Si Pascual tiene 11 caramelos y da 7, le quedan 4. Eso es,... tenía 11 caramelos."

Recordemos que la solución canónica consiste en aplicar la transformación (+7) (opuesta a la transformación (−7)) al estado final 4, y encontrar así 11.

Las seis clases de problemas distinguidos líneas arriba no forman, pues, un conjunto tan homogéneo como podría creerse, ya que los cálculos relacionales necesarios no son de igual complejidad. No es raro entonces que en esas condiciones los niños recurran a procedimientos no canónicos. Tales procedimientos revelan, a veces, como en el caso del procedimiento del estado hipotético, un manejo inteligente de la situación, y preparan así el descubrimiento de las soluciones canónicas.

El maestro debe estar atento para interpretar las conductas del niño y no rechazar, por malos, los caminos no clásicos que pueda utilizar. Incluso en los fracasos del niño, sobre los cuales casi no tenemos la posibilidad de extendernos, con frecuencia existen elementos que permiten ver lo que el niño comprendió y lo que no comprendió; podemos así apoyarnos en los errores mismos para aportar las explicaciones necesarias.

Ahora bien, la diversidad y la desigual dificultad de los problemas no se debe sólo a su pertenencia a una u otra de las seis clases de problemas que acabamos de definir. Otros factores intervienen igualmente.

- *La facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario*

Evidentemente, se trata de un factor de complejidad importante, que viene a sumarse al factor puramente relacional que acabamos de ver. Es así como la sustracción 67 351 − 63 809 del ejemplo 2 puede volver ese problema más difícil que el del ejemplo 5, que exige una sustracción más fácil (41−29). Sin embargo, desde el punto de vista estrictamente relacional, la clase 5 es más difícil que la clase 2.

De una manera general, la complejidad crece, al interior de una misma clase de problemas, con la dificultad del cálculo necesario. Los números grandes dan lugar a mayores dificultades que los pequeños; los números decimales implican mayor dificultad que los enteros, excepto cuando la operación necesaria se reduce a una composición de números pequeños o a operaciones mentales simples; por ejemplo, 4 000 + 9 000; 666 – 555, etcétera.

Hay que subrayar que algunos números prohíben el uso de ciertos procedimientos, porque no se prestan a un cálculo bastante simple. En este caso hay que recurrir al procedimiento canónico que supone, en general, un cálculo relacional más elaborado. La mayor dificultad de los problemas que obligan a "plantear una operación", proviene en su mayor parte del hecho de que los procedimientos de solución más inmediatos son inoperantes.

Es por ello que en el ejemplo 2 la naturaleza de los números en juego (63 809 y 67 351) no permiten recurrir al procedimiento del "complemento" y vuelve obligatoria la puesta en práctica del procedimiento de la "diferencia", que es bastante más complejo desde el punto de vista relacional, como ya lo vimos anteriormente.

Supongamos que, en lugar de 63 809 y de 67 351 el contador kilométrico indicara, respectivamente, 15 000 km y 17 000 km; la solución del problema se habría facilitado bastante, no sólo porque la sustracción 17 000 – 15 000 es más simple que la sustracción 67 351 – 63 809, sino sobre todo porque el procedimiento del "complemento" (se necesitan 2 000 para pasar de 15 000 a 17 000) hubiera sido posible, mientras que no lo es con los números 63 809 y 67 351.

- *El orden y la presentación de las informaciones*

Las informaciones pertinentes para la solución de un problema pueden estar dadas de múltiples maneras:

- Informaciones perdidas entre otras informaciones en un texto, o presentadas de tal manera que el niño reconoce que tiene frente a él las informaciones necesarias y suficientes para la solución.
- Informaciones ordenadas conforme el desarrollo temporal de hechos contados o, al contrario, proporcionadas en desorden o en un orden inverso.

La manera como se presentan las informaciones juega un papel importante en la complejidad de los problemas. Si bien es habitual en la escuela primaria el proporcionar enunciados que con-tienen apenas las informaciones necesarias y suficientes (como es el caso de los 6 ejemplos dados anteriormente), también hay que habituar al niño a recibir enunciados en donde figuren informaciones inútiles y que en consecuencia deberá saber dejar de lado, así como enunciados en donde ciertas informaciones necesarias estén ausentes Volveremos sobre este punto cuando nos toque hablar de los problemas que comportan varias relaciones, ya que será en ese momento cuando esta cuestión adquiera toda su importancia.

Sin embargo, señalemos desde ahora que el análisis de una situación real, en la cual las informaciones no son verbalizadas, siempre requiere de la búsqueda de informaciones necesarias y del filtrado de las informaciones suficientes; en efecto, una situación real lleva consigo, en general, al lado de las informaciones suficientes, informaciones inútiles e incluso perjudiciales que hay que eliminar; e informaciones que si bien son necesarias, no están manifiestas y requieren una investigación específica.

En lo que concierne al orden de las informaciones, puede observarse en el ejemplo 6 –que proporciona los datos en orden inverso al orden temporal–, que esta dificultad del orden de las informaciones se plantea ya en el caso de la relación aditiva estado-transformación-estado. De una manera general, un problema se puede complicar seriamente si se invierte el orden de las informaciones pertinentes, o si se presentan en desorden, y más todavía si están sumergidas dentro de otras informaciones.

- *El tipo de contenido y de relaciones consideradas*

El contenido de los problemas, el dominio de relaciones a las cuales hacen referencia, pueden también desempeñar un papel importante.

Canicas ganadas o perdidas, cantidades de dinero gastadas o ganadas, kilómetros recorridos, cantidades físicas consumidas o producidas, no pueden ponerse en el mismo plano en la enseñanza primaria, por la simple y sencilla razón de que las nociones que se requieren no son del mismo nivel. Ya hemos visto, en un capítulo anterior, la diferencia que existe entre las cantidades discretas y las cantidades continuas; pero también existen diferencias entre las mismas cantidades continuas: longitud, área, volumen, masa, energía eléctrica o calorífica, etc., no pueden ser puestas en un mismo plano; sin embargo, se pueden plantear problemas análogos a propósito de un recibo de la luz o de una distancia recorrida. También existen diferencias entre las cantidades discretas: el aumento (o la disminución) de una población no se entiende tan fácilmente como la ganancia (o la pérdida) de canicas, pues la referencia a la vida cotidiana del niño es distinta en cada caso.

En esas condiciones, no está de más diversificar los contenidos durante el estudio de una misma relación aditiva, y mostrar que bajo esos diferentes contenidos se encuentra una estructura idéntica.

Por otra parte, la forma misma de la relación puede desempeñar un papel. No es necesariamente equivalente para el chiquillo decir que "ganamos 12 canicas" a decir que "tenemos 12 canicas más".

En fin, aunque las relaciones ternarias estáticas o transformaciones se pueden ilustrar en la misma forma sagital o algebraica, el niño no capta de la misma manera una relación estática entre dos elementos:

"Pedro tiene 6 pesos menos que Juan."

y una transformación:

"Pedro perdió 16 pesos."

Existen pues múltiples fuentes de la diversidad y complejidad de los problemas al interior de la sola categoría estado-transformación-estado; pero la fuente principal, aquella que por lo demás aclara las otras, se debe a la existencia de seis clases de problemas y seis formas de cálculos relacionales de desigual dificultad. Ahora bien, hasta el momento sólo hemos considerado una categoría de relaciones aditivas. Estudiemos pues las otras, aunque más brevemente.

## Análisis de los problemas concernientes a las otras categorías de relaciones aditivas

- *Primera categoría de relaciones aditivas.* En ella, dos medidas son compuestas para dar lugar a otra medida. Esta categoría sólo origina dos grandes clases de problemas:

1. Siendo conocidas las dos medidas elementales, encontrar la compuesta.
2. Siendo conocidas la medida compuesta y una de las elementales, encontrar la otra.

Se les puede representar de la siguiente manera:

1. $\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \\ \boxed{b}\end{array}\right\}\boxed{x}$    2. $\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \\ \boxed{x}\end{array}\right\}\boxed{c}$

Dos ejemplos pueden ilustrar estas dos clases:

1. Hay 4 niñas y 5 niños sentados a la mesa. ¿Cuántos niños hay en total?
2. Un agricultor tiene 56 ha de tierra, de las cuales 17 son de bosque y monte; el resto es cultivable. ¿Qué área cultivable tiene a su disposición?

La primera clase de problemas se resuelve por una adición, cuya dificultad puede variar, como lo acabamos de ver, en función de los números dados, del contenido y de la forma de las informaciones. La segunda clase de problemas se resuelve normalmente por una sustracción, pero también pueden resolverse por medio del procedimiento llamado de complemento, a condición de que los números que intervengan se presten a dicho procedimiento. Una vez más, la dificultad varía en función de los factores habituales.

Nos faltaría espacio para desarrollar ampliamente el análisis de esta clase de problemas, bástenos señalar que la sustracción $x = b - a$ es entendida aquí, necesariamente, como la operación inversa de la adición $a + x = b$, y que ello constituye ya una forma de cálculo relacional. Es por ello que esta forma de sustracción es un poco más compleja que la sustracción *sui generis* que vimos a propósito de la segunda categoría de relaciones aditivas y que correspondía a una transformación negativa que operaba sobre una medida inicial (perder, quitar, dar, disminuir, etc.).

Sería un error considerar a la sustracción como una operación siempre subordinada y secundaria respecto a la adición. En la categoría de las relaciones numéricas que estamos examinando se encuentra efectivamente subordinada, ya que la búsqueda del complemento entre una medida elemental y una compuesta sólo tiene sentido si antes se le ha dado un sentido a la composición de dos medidas elementales. Pero en la segunda categoría de relaciones aditivas vimos que uno de los casos de la sustracción tiene sentido en cualquier circunstancia, y es aquel en donde uno quita una cantidad dada a una cantidad inicial también dada. El niño comprende sin dificultad esta transformación negativa, y se le puede también mostrar más fácilmente el carácter opuesto de la sustracción y la adición, sin subordinación de una a la otra.

- *Cuarta categoría de relaciones aditivas.* En ella, dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación. Esta categoría exige un análisis un poco más amplio.

  No vamos a extendernos en los factores relativamente secundarios que distinguimos líneas arriba (naturaleza de los números que intervienen, forma y contenido de las informaciones dadas, etc.), sino sólo en los aspectos fundamentalmente relacionales. Existen, al igual que para la primera categoría de relaciones aditivas, dos grandes clases de problemas.

  1. Siendo conocidas las dos transformaciones elementales, encontrar la compuesta.
  2. Siendo conocidas la transformación compuesta y una de las elementales, encontrar la otra.

La diversificación en subclases aquí es muy importante y requiere comentarios.

Como se trata de la composición de transformaciones, las cuales pueden ser positivas o negativas, la situación está muy lejos de ser la misma según los diversos casos considerados.

Tomemos primero la primera clase de problema, "siendo conocidas las elementales, encontrar la compuesta"; la dificultad no será la misma si se trata de componer dos transformaciones positivas, dos transformaciones negativas o dos transformaciones de signo contrario. En el último caso, los niños encuentran también dificultades desiguales, según la magnitud relativa de los valores absolutos de las transformaciones elementales. El cuadro que sigue resume los diversos casos posibles.

$T_1$ y $T_2$ son, respectivamente, la primera y la segunda transformación elemental. $T_3$ es la transformación compuesta:

| | $T_1 > 0$<br>$T_2 > 0$ | $T_1 < 0$<br>$T_2 < 0$ | $T_1 > 0$<br>$T_2 < 0$ | $T_1 < 0$<br>$T_2 > 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert T_1 \rvert > \lvert T_2 \rvert$ | $T_3 > 0$<br>Ejemplo 1 | $T_3 < 0$ | $T_3 > 0$<br>Ejemplo 2 | $T_3 < 0$ |
| $\lvert T_1 \rvert < \lvert T_2 \rvert$ | $T_3 > 0$ | $T_3 < 0$ | $T_3 < 0$<br>Ejemplo 3 | $T_3 > 0$ |

Sin querer ilustrar todos los casos posibles, daremos tres ejemplos en los cuales el lector podrá verificar fácilmente la desigual dificultad.

*Ejemplo 1*

"Juan jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 16 canicas. En el segundo ganó 9. ¿Qué sucedió a fin de cuentas?"

*Ejemplo 2*

"Juan jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 16 canicas. En el segundo perdió 9. ¿Qué sucedió a fin de cuentas?"

*Ejemplo 3*

"Juan jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 9 canicas. En el segundo perdió 16. ¿Qué sucedió a fin de cuentas?"

En el ejemplo 1 hay que agregar dos números positivos, lo que no plantea en general ninguna dificultad.

En el ejemplo 2 deben agregarse dos números de signo contrario, lo que se expresa de hecho por una sustracción bastante natural; en efecto, del valor absoluto de la primera transformación se reduce el valor absoluto de la segunda transformación, que es más pequeña.

Finalmente, en el ejemplo 3 también hay que agregar dos números de signo contrario, pero es necesario entonces sustraer el valor absoluto de la primera transformación, que sin embargo es positivo, del valor absoluto de la segunda. No sorprende que este problema sea más difícil que los anteriores.

Tomemos ahora la segunda clase de problema; "siendo conocidas una de las transformaciones elementales y la compuesta, encontrar la otra transformación elemental".

De una manera general, su dificultad es mayor que la de los problemas de la primera clase: su solución requiere en efecto una operación inversa de la composición que se traduce por una "sustracción" de números relativos; pero una vez más, estos problemas tampoco son de la misma dificultad, y hay que distinguir varias subclases, según el signo respectivo de las transformaciones compuesta y elemental dadas, y según la magnitud relativa de sus valores absolutos. El cuadro que sigue indica las subclases de problemas en el caso donde hay que encontrar $T_2$ estando dadas $T_1$ y $T_3$. Podría hacerse un cuadro similar para el caso en el que se trate de encontrar $T_1$.

| | $T_1 > 0$<br>$T_3 > 0$ | $T_1 < 0$<br>$T_3 < 0$ | $T_1 > 0$<br>$T_3 < 0$ | $T_1 < 0$<br>$T_3 > 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert T_1 \rvert < \lvert T_3 \rvert$ | $T_2 > 0$<br>*Ejemplo 1* | $T_2 < 0$ | $T_2 < 0$ | $T_2 > 0$ |
| $\lvert T_1 \rvert > \lvert T_3 \rvert$ | $T_2 < 0$ | $T_2 > 0$<br>*Ejemplo 2* | $T_2 < 0$<br>*Ejemplo 3* | $T_2 > 0$ |

Una vez más nos limitaremos a tres ejemplos:

*Ejemplo 1*

"En una ciudad, el excedente de los nacimientos sobre los decesos fue de 1 293 personas entre 1950 y 1960, y de 14 084 entre 1950 y 1970. ¿Qué sucedió entre 1960 y 1970?"

*Ejemplo 2*

"La reserva de oro de un banco bajó 642 lingotes en el transcurso del año 1973. Durante el primer semestre del mismo año había bajado 1 031 lingotes. ¿Qué pasó en el transcurso del segundo semestre?"

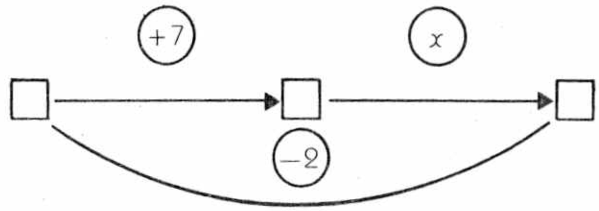
*Ejemplo 3*

"Pedro jugó dos partidos de canicas. Durante el primero ganó 7. Después jugó un segundo partido. Haciendo cuentas de los dos partidos, se dio cuenta de que en total había perdido 2 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido?"

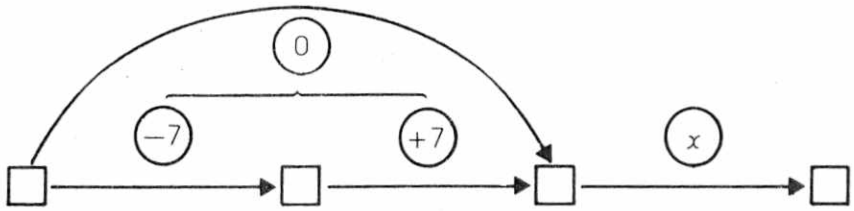
Estos tres problemas no son igualmente fáciles. El lector estará sorprendido seguramente al saber que el tercero sólo es resuelto por una pequeña proporción de niños de 10 y de 11 años (25% aproximadamente), no obstante que la operación numérica necesaria es, con todo, una adición muy simple (7 + 2). Evidentemente, es en el cálculo relacional donde hay que buscar las causas de tal dificultad.

Tratemos de representar por un esquema analítico los aspectos de este cálculo relacional:

Datos:

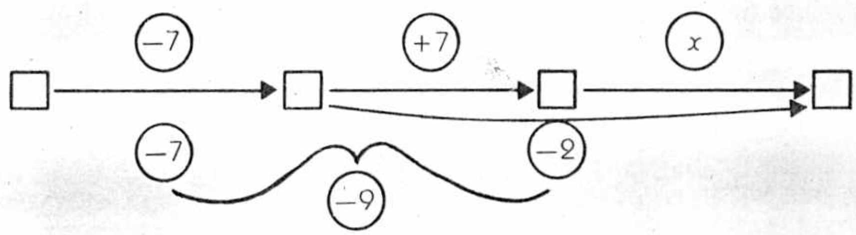



*Primer aspecto del razonamiento:*




Anulación por la transformación −7 de lo que fue ganado en el primer partido.

*Segundo aspecto del razonamiento:*




Composición de −7 y de −2 para encontrar el valor de *x*.

En efecto, el primer aspecto del razonamiento conduce a escribir la cadena

$$(-7) + (+7) + x$$

y el segundo aspecto a escribir la cadena

$$(-7) + (-2)$$

La igualdad de las dos cadenas:

$$(-7) + (+7) + x = (-7) + (-2)$$

permite escribir, por simplificación de la primera:

$$x = (-7) + (-2) = (-9)$$

La mayoría de los niños apenas son capaces de asimilar este razonamiento antes de los doce años. No hay que dudar en explicárselos a partir de numerosos ejemplos. Es decir, que dicho razonamiento está muy por encima del nivel de la primaria y sólo una minoría de niños de 9 a 10 años puede efectuarlo.

¿Por qué entonces los problemas 1 y 2, que parecen requerir un razonamiento idéntico, pueden ser resueltos? Es que, una vez más, existen varios procedimientos para resolver tales problemas y, al lado del procedimiento canónico ilustrado por el procedimiento anterior, existe el procedimiento de "complemento", que funciona eficazmente cuando las transformaciones $T_1$ y $T_3$ son del mismo signo, como en los ejemplos 1 y 2. (Este procedimiento es completamente inoperante cuando las transformaciones $T_1$ y $T_3$ son de signo contrario, como en el ejemplo 3.)

Este procedimiento del "complemento" surge naturalmente en el ejemplo 1, puesto que hay que buscar lo que hay que agregar a la transformación elemental $T_1$ para encontrar la compuesta $T_3$. Pese a que los números son demasiado complejos para que el complemento sea buscado directamente sin hacer operaciones, los niños de 9 a 10 años e incluso de 8 años imaginan muy fácilmente que hay que hacer una sustracción: 4 084 − 1 253.

Resulta menos natural el aplicar el mismo procedimiento en el ejemplo 2, en donde la compuesta $T_3$, no obstante que es del mismo signo que la transformación elemental $T_1$, es más pequeña en valor absoluto. Hay pues que buscar lo que se necesita agregar a $T_3$ para encontrar $T_1$ y considerar que se trata de una transformación de signo opuesto: si la reserva de lingotes bajó más en el transcurso del primer semestre que en todo el año, es que aumentó en el transcurso del segundo semestre. No es raro que, en esas condiciones, este problema sea todavía difícil para ciertos niños de 9 y 10 años.

A pesar de tales dificultades, no está de más hacer ejercicios sobre la composición y la descomposición de las transformaciones en la escuela primaria, y aprovechar tales ocasiones para desarrollar explicaciones de un mayor grado de dificultad, como en el esquema visto anteriormente. Los niños obtendrán provecho, cuando menos parcialmente, y ello les preparará para recibir en la escuela secundaria la enseñanza de los números relativos. Pero no hay que hacerse ilusiones de que puedan asimilarlo por completo.

Sería fácil describir las clases de problemas que se pueden plantear con las dos últimas categorías de relaciones aditivas. No lo haremos aquí, aunque ciertas clases de problemas puedan ser planteadas sin inconveniente desde la escuela primaria. El lector reconstituirá fácilmente, con la ayuda del análisis anterior, las principales clases de problemas.

Para la quinta categoría, en la cual una transformación opera sobre un estado relativo, volvemos a encontrar las clases estudiadas a propósito de la segunda categoría (búsqueda del estado final, de la transformación, del estado inicial) con subclases más numerosas, debido a las diversas posibilidades que existen para el signo y el valor absoluto.

Para la sexta categoría, en la cual dos estados relativos se componen en un estado relativo, volveremos a encontrar, con numerosas subclases, las clases ya estudiadas a propósito de la primera categoría.