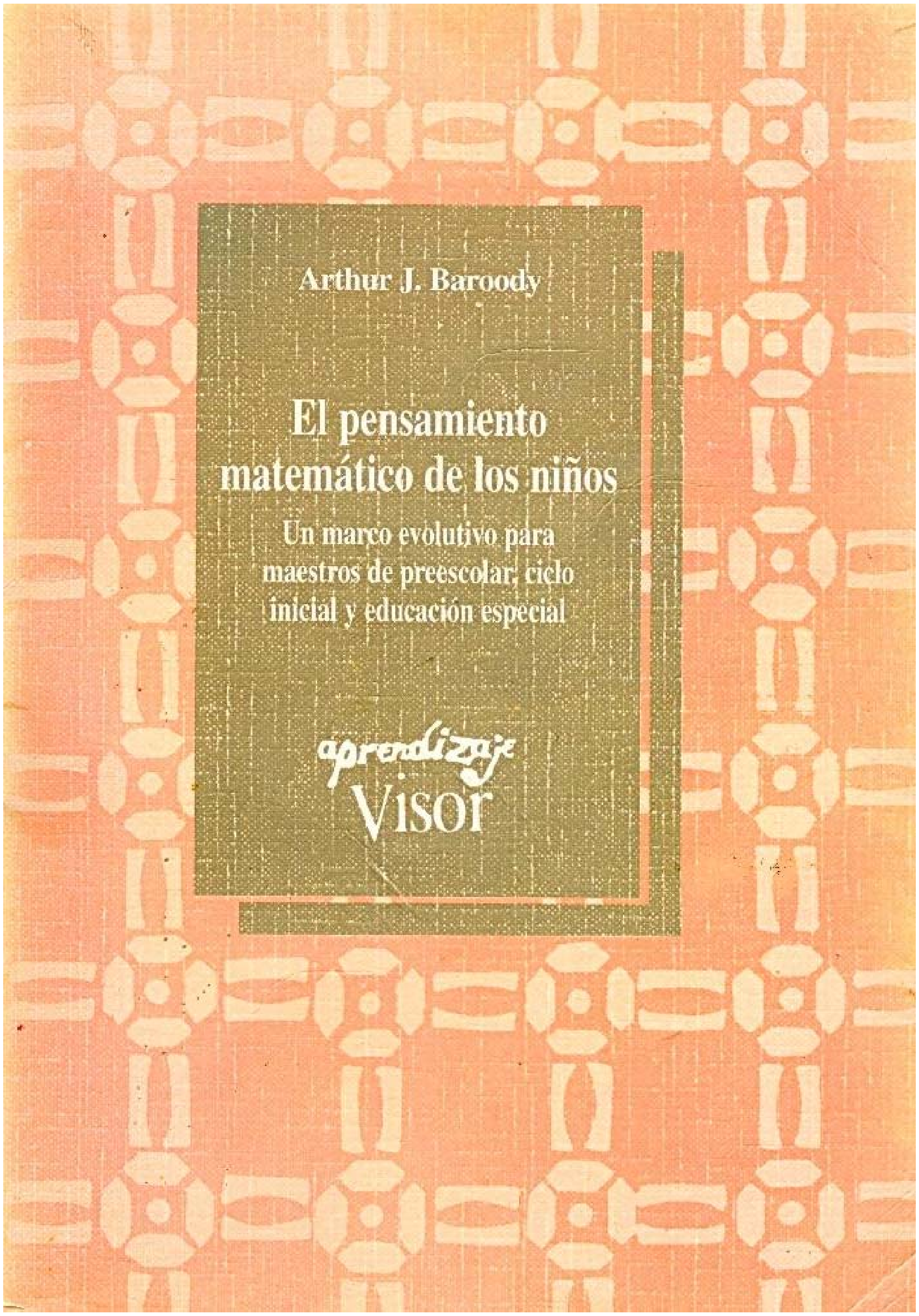


Baroody, Arthur J. (1997), “Matemática informal: el paso intermedio esencial”, “Técnicas para contar” y “Desarrollo del número”, en El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial, Genís Sánchez Barberán (trad.), 3ª.ed., Madrid, Visor (Aprendizaje, 42), pp. 33-47, 87-106 y 107-148.

Matemática informal:
El paso intermedio esencial

¿Llegan los niños a la escuela con unos conocimientos matemáticos significativos? ¿Qué papel ha desempeñado la experiencia concreta, especialmente el contar, en el desarrollo histórico del conocimiento matemático? ¿ Cuál es la naturaleza y el alcance de la matemática natural de los niños? ¿Por qué es importante que los niños dominen la matemática formal y cuál es la mejor manera de abordar la instrucción inicial? ¿Cuáles son las consecuencias de pasar por alto la matemática de los niños?

A) EL CONOCIMIENTO MATEMATICO DE LOS PREESCOLARES

Toda comprensión teórica de una materia debe basarse en la realidad y verificarse en la práctica. Para que teoría y práctica estén sólidamente enlazadas, a lo largo de este libro se presentarán diversos estudios de casos concretos. Por tanto, el examen de los conocimientos de los preescolares se inicia con una mirada a un caso real.

El caso de Alison

Alison, que contaba con tres años y medio de edad, se hallaba celebrando el segundo aniversario de su hermana.

PADRE:	Alison, ¿cuántos años hace hoy Arianne?
ALISON:	[Levanta dos dedos.]
PADRE:	¿Cuántos años tiene Alison?
ALISON:	[Levanta tres dedos.]
PADRE:	¿Cuántos años tiene papá?
ALISON:	[Tras unos instantes, levanta cuatro dedos.]

Varias semanas más tarde se produjo la siguiente conversación

PADRE:	[Levantando tres dedos.] ¿Cuántos dedos hay?
ALISON:	[Va señalando con un dedo mientras cuenta.] 1, 2, 3.
PADRE:	[Levantando dos dedos.] ¿Cuántos dedos hay?
ALISON:	Es como Eanne [la edad de Arianne]
PADRE:	¿ Cuántos dedos son?
ALISON:	2.
PADRE:	[Saca tres monedas.] ¿Me puedes decir con los dedos cuántas monedas tengo aquí?
ALISON:	[Levanta tres dedos y se pone a contar.] 1, 2, 3, 4.

Aunque sin perfeccionar, las aptitudes matemáticas de esta niña preescolar ya tienen cierta importancia. Alisan es muy experta en contar colecciones de uno, dos y, con frecuencia, hasta tres objetos.

Lo cierto es que hasta puede reconocer automáticamente colecciones de uno o dos objetos como «uno» y «dos», respectivamente. Si se le presenta un pequeño conjunto de objetos como, por ejemplo, tres monedas, es capaz de crear un modelo con sus dedos. En realidad, para Alison los dedos son un medio natural para expresar ideas matemáticas (los usaba, por ejemplo, para representar edades). Además, parecía escoger deliberadamente cuatro dedos para representar la edad de su padre, en una representación distinta de la empleada para la edad de su hermana y la suya propia. Aunque de manera inexacta, pudo haber elegido un número mayor para indicar una comparación entre edades: papá es mayor. ¿Es Alison una niña preescolar típica? ¿Llegan a la escuela la mayoría de los niños con técnicas matemáticas básicas como contar, reconocer, emparejar y comparar conjuntos?

La matemática de Alison se basa en experiencias concretas, como contar y emplear los dedos. ¿Qué importancia tienen estas experiencias concretas para el desarrollo matemático de los niños? La matemática de Alison tiene claras limitaciones. Por ejemplo, contaba con exactitud y reconocía conjuntos muy pequeños, pero no conjuntos mayores. ¿Cuáles son las limitaciones de la matemática concreta de los niños? La matemática de Alison es muy práctica. Por ejemplo, conecta las representaciones con los dedos con acontecimientos importantes en su vida (usaba dos dedos para representar la edad de su hermana) y los emplea para comunicar sus ideas y necesidades. ¿Qué importancia tiene la necesidad práctica para el desarrollo matemático?

Dos puntos de vista sobre el niño preescolar

La teoría de la absorción parte del supuesto de que los niños llegan a la escuela como pizarras en blanco sobre las que pueden escribirse directamente las matemáticas escolares. Aparte, quizá, de algunas técnicas de contar aprendidas de memoria, se considera que los preescolares carecen de técnicas matemáticas. De hecho, el famoso teórico asociacionista E. L. Thorndike (1922) consideraba a los niños pequeños tan ineptos, matemáticamente hablando, que afirmaba: «Parece poco probable que los niños aprendan aritmética antes de segundo curso por mucho tiempo que se dedique a ello, aunque hay muchos datos aritméticos que se pueden aprender durante el primer curso» (p. 198). Además, la teoría de la absorción indica que la técnica para contar que tienen los niños cuando se incorporan a la escuela es esencialmente irrelevante o constituye un obstáculo para llegar al dominio de la matemática formal. Con la instrucción formal, la adquisición del conocimiento matemático real vuelve a partir básicamente desde cero.

La teoría cognitiva sostiene que los niños no llegan a la escuela como pizarras en blanco. La reciente investigación cognitiva demuestra que, antes de empezar la escolarización formal, la mayoría de los niños adquiere unos conocimientos considerables sobre contar, el número y la aritmética. Además, este conocimiento adquirido de manera informal actúa como fundamento para la comprensión y el dominio de las matemáticas impartidas en la escuela. En pocas palabras, las raíces de las aptitudes matemáticas llegan hasta la época preescolar y el éxito de la enseñanza escolar se funda en este conocimiento aprendido de manera informal. Para apreciar mejor la importancia de este elemento básico, examinaremos cómo ha evolucionado el conocimiento matemático en el transcurso de la historia humana.

B) BREVE HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Inicios concretos

Sentido numérico básico. El ser humano, como algunas otras especies, parece estar dotado de un sentido numérico primitivo. Podemos percibir fácilmente la diferencia entre un conjunto de un elemento y una colección de muchos elementos, o incluso entre una colección pequeña y otra grande. Podemos ver si se añade o se quita algo de una colección. Esta percepción directa puede ser muy útil en determinadas circunstancias pero no en otras, como en el caso de distinguir una bandada de ocho aves de otra de nueve.

Métodos concretos de contar. Para llevar la cuenta del tiempo y de sus pertenencias, nuestros antepasados prehistóricos idearon métodos basados en la equivalencia y la correspondencia biunívoca. La equivalencia podía ofrecer un registro de los días transcurridos, por ejemplo, desde el último plenilunio: añadir un guijarro cada noche hasta que la luna llena volviera a aparecer. De la misma manera, para llevar la cuenta de una colección de pieles animales, un cazador podía tallar una muesca en un palo o un hueso por cada piel añadida al montón. Este proceso de equivalencia crea una correspondencia biunívoca: ni más ni menos que un elemento del conjunto de muescas por cada elemento del conjunto de pieles. Más adelante, para comprobar si todavía estaban todas las pieles (si seguía habiendo una correspondencia biunívoca), éstas podían emparejarse una a una con ·las muescas del palo para contar.

Restos del pasado. Nuestras lenguas todavía tienen restos de las épocas prenuméricas. Por ejemplo, en castellano hay varias formas de expresar «dos»: *par, pareja, dúo, doble, día da,* etc. En épocas más primitivas, estos términos pueden haberse usado para designar una pluralidad de objetos o categorías de objetos específicos: un par de ojos, una pareja de personas, un dúo musical, una bifurcación. De la misma manera, los diversos términos para expresar «muchos» (por ejemplo, *multitud, masa, banda, manada)* describían en su día colecciones específicas de más de dos o tres elementos (por ejemplo, un *cardumen* de peces, una *bandada* de aves). Inicialmente, el número no era más que una cualidad o una característica de un objeto determinado (Churchill, 1961).

Más allá de lo puramente concreto

A medida que las sociedades cazadoras-recolectoras daban paso a comunidades sedentarias basadas en la agricultura y el comercio, llevar la cuenta del tiempo (por ejemplo, las estaciones) y las posesiones fue haciéndose cada vez más importante. En consecuencia, también fue en aumento la necesidad de métodos más precisos de numeración y medición basados en contar. *Contar* es la base sobre la que hemos edificado los sistemas numérico y aritmético, de papel tan esencial en nuestra civilización avanzada. A su vez, el desarrollo de contar está íntimamente ligado a nuestros diez dedos. Dantzig (1954, p. 7) afirma:

A sus *diez dedos articulados* debe e! hombre su éxito en e! cálculo. Estos dedos le han enseñado a contar y, en consecuencia, a extender infinitamente e! alcance de! número. Sin este instrumento, la aptitud numérica del hombre no podría haber ido mucho más allá del sentido rudimentario del número. y es razonable aventurar que, sin nuestros dedos, el desarrollo del número y, en consecuencia, el de las ciencias exactas a las que debemos nuestro progreso material e intelectual, se hubiera visto irremediablemente menguado.

Contar con los dedos es el trampolín que permite superar las limitaciones de nuestro sentido numérico natural. Donde los antropólogos no han encontrado señales del empleo de los dedos para contar, la percepción del número es muy limitada (Dantzig, 1954). Por ejemplo, en unos estudios realizados con aborígenes de Australia que no habían alcanzado la etapa de contar con los dedos sólo se encontraron unos pocos que pudieran identificar el 4 y ninguno que pudiera distinguir el 7. En este estado natural, los aborígenes no desarrollan conceptos básicos de la cantidad y la medida (Dasen, 1972; De Lemos, 1969).

Número abstracto. Es probable que contar fuera el medio por el que nuestra civilización desarrolló un concepto abstracto del número: un concepto que hace posible la matemática (Dantzig, 1954). El matemático Bertrand Russell afirmaba que pudieron haber transcurrido eras antes de que se reconociera que las distintas dualidades (por ejemplo, un par de ojos, una pareja de personas, una bifurcación) eran casos del número 2. Nuestros dedos constituyen la base común para designar distintas dualidades concretas como casos del número 2. Los dedos proporcionan modelos fácilmente asequibles de colecciones de uno a diez objetos. Pueden levantarse dos dedos, por ejemplo, para indicar un par de ojos o una yunta de caballos. Con el tiempo, el nombre de esta colección modelo (<<dos») pudo aplicarse a *cualquier* colección concreta que se correspondiera con dos dedos.

Durante un largo período de la historia, los términos para «dos», «tres» y «muchos» sirvieron adecuadamente (Smith, 1923). A medida' que fue creciendo la necesidad de una precisión mayor, contar se convirtió en un instrumento esencial. Contar coloca los nombres de las colecciones modelo en un orden y ofrece una alternativa conveniente a la equivalencia para asignar nombres numéricos. Podía hacerse una petición directamente con la palabra *siete* y cumplirse posteriormente contando siete objetos.

Conectar los dos aspectos del número. El número tiene dos funciones: nombrar y ordenar. El aspecto nominal, o cardinal, trata de los elementos que contiene un conjunto dado. Nombrar un conjunto no requiere contar necesariamente. Como acabamos de ver, un conjunto puede clasificarse como «cinco», por ejemplo, si sus elementos se corresponden exactamente (es decir, pueden formar una correspondencia biunívoca) con los elementos de una colección modelo (por ejemplo, los dedos de una mano) denominada «cinco». Por tanto, nombrar conjuntos sólo requiera colecciones modelo como los ojos para representar dos, una hoja de trébol para representar tres, las patas de un caballo para el cuatro, etc.

El aspecto de orden, u ordinal, del número, está relacionado con contar y se refiere a colocar colecciones en sucesión por orden de magnitud. Contar proporciona una secuencia ordenada de palabras (la serie numérica) que puede asignarse a colecciones cada vez mayores. Para contar una colección, una persona asigna sucesivamente términos de la serie numérica a cada elemento de la colección hasta que ha asignado un nombre a cada uno de los elementos. El número asignado a la colección especifica la magnitud relativa del conjunto. Por ejemplo, si se ha contado una colección y se le ha asignado la palabra «cinco», será mayor que otras designadas con uno, dos, tres o cuatro y menos que las designadas con seis o más.

Contar con los dedos puede enlazar los aspectos cardinal y ordinal del número. Para representar una colección como, por ejemplo, el número cardinal 4, una persona sólo tiene que levantar cuatro dedos simultáneamente. Para contar la misma colección, la persona levanta cuatro dedos en sucesión. Los resultados de contar son idénticos a los de levantar simultáneamente cuatro dedos (la representación cardinal). Por tanto, nuestros dedos son un medio para pasar sin esfuerzo de un aspecto del número al otro (Dantzig, 1930-1954).

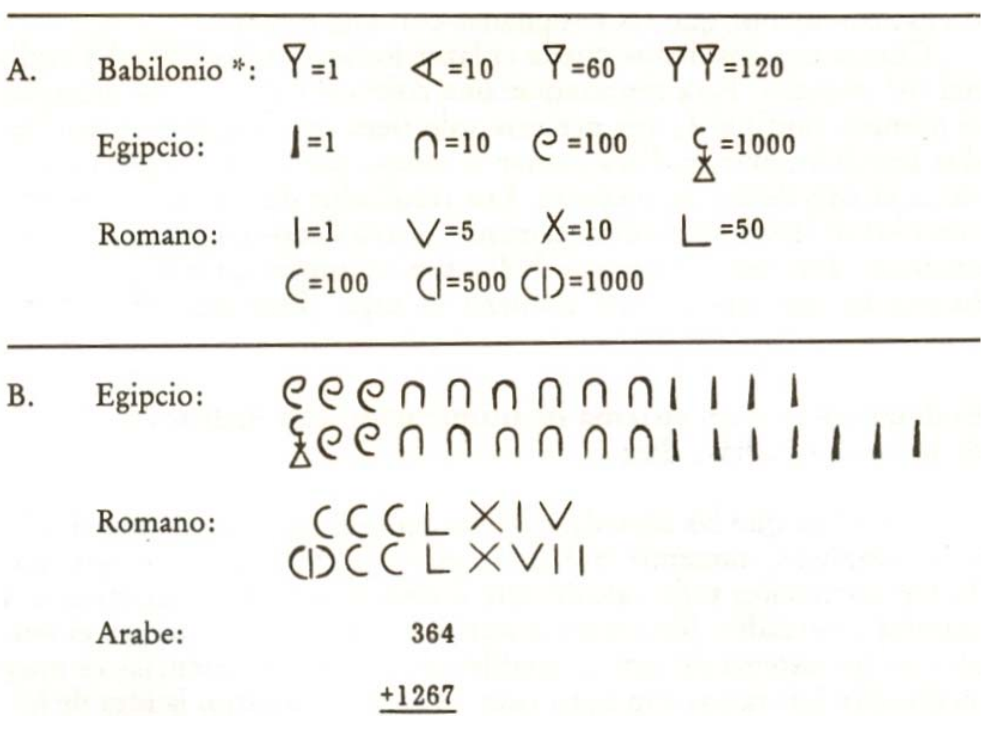
El desarrollo de un sistema de numeración con órdenes de unidades de base diez

A medida que las sociedades y las economías se fueron haciendo más .complejas, aumentó la presión encaminada a concebir sistemas de representación y de cálculo que pudieran aplicarse con eficacia a grandes cantidades. Para representar un rebaño de 124 ovejas, el empleo de un sistema de contar estableciendo correspondencias es muy incómodo. Las tareas con cantidades grandes inspiraron la idea de hacer agrupamientos, y nuestros diez dedos ofrecieron una base natural para ello (Churchill, 1961). Por ejemplo, cuando una oveja pasaba junto al pastor, éste la contaba con los dedos. Cuando llegaba a diez, podía representar esta cantidad con un guijarro. Con las manos libres otra vez, podía proseguir el recuento. A medida que se iban acumulando los guijarros, podía haber simplificado aún más el proceso sustituyendo diez guijarros por una piedra. Por tanto, la piedra pasaría a representar 10 decenas, o sea 100. Como estos agrupamientos se basan en el 10 y en múltiplos de 10, el sistema empleado por el pastor se denomina sistema de base diez. Si tuviéramos doce dedos, es probable que hubiéramos hechos estas agrupaciones de doce en doce y hoy tendríamos un sistema de base doce. Nuestro sistema de base diez es, simplemente, un «accidente fisiológico» (Dantzig, 1930-1954).

El primer sistema numérico conocido apareció hacia el año 3500 a. de C. e incorporaba un concepto de base diez (Bunt, Jones y Bedient, 1976). El sistema cuneiforme de los sumerios y el sistema jeroglífico de los egipcios empleaban una colección de trazos para representar los números del 1 al 9 (véase la fig. 2.1.A). Un agrupamiento de decenas se representaba con un símbolo especial. Más adelante, los griegos y los romanos desarrollaron sistemas diferentes. Sin embargo, ninguno de estos sistemas numéricos antiguos se prestaba con facilidad al cálculo aritmético, como demostrará rápidamente el intento de realizar la suma de la figura 2.1.B.

Aunque los símbolos escritos se han usado para representar números desde tiempos prehistóricos, el desarrollo de unos procedimientos de cálculo eficaces tuvo que esperar hasta la invención de un sistema de numeración *posicional.* En un sistema posicional o de órdenes de unidades, el lugar de una cifra define su valor. Por ejemplo, en el número 37 el 3 ocupa el lugar de las decenas y de ahí que represente tres decenas, y no tres unidades. Esto elimina la necesidad de símbolos especiales para representar 10 y múltiplos de 10, como ocurre con los jeroglíficos egipcios. En un sistema con órdenes de unidades, pueden usarse diez cifras (del 0 al 9) para representar cualquier número, aun los números grandes, de una manera compacta. ¡Piénsese, por ejemplo, en lo que haría falta para representar 9.999.999 con jeroglíficos!

Figura 2.1 Comparación de distintos sistemas numéricos



* El sistema babilonio se adoptó a partir del anterior sistema sumerio. Obsérvese que la numeración babilonia empezó como un sistema de base diez pero juego cambió a agrupamientos basados en 60 y múltiplos de 60. Nótese que los símbolos para 1 y 60 son idénticos (Bunt *et al.,* 1976). La posición se usaba para indicar el

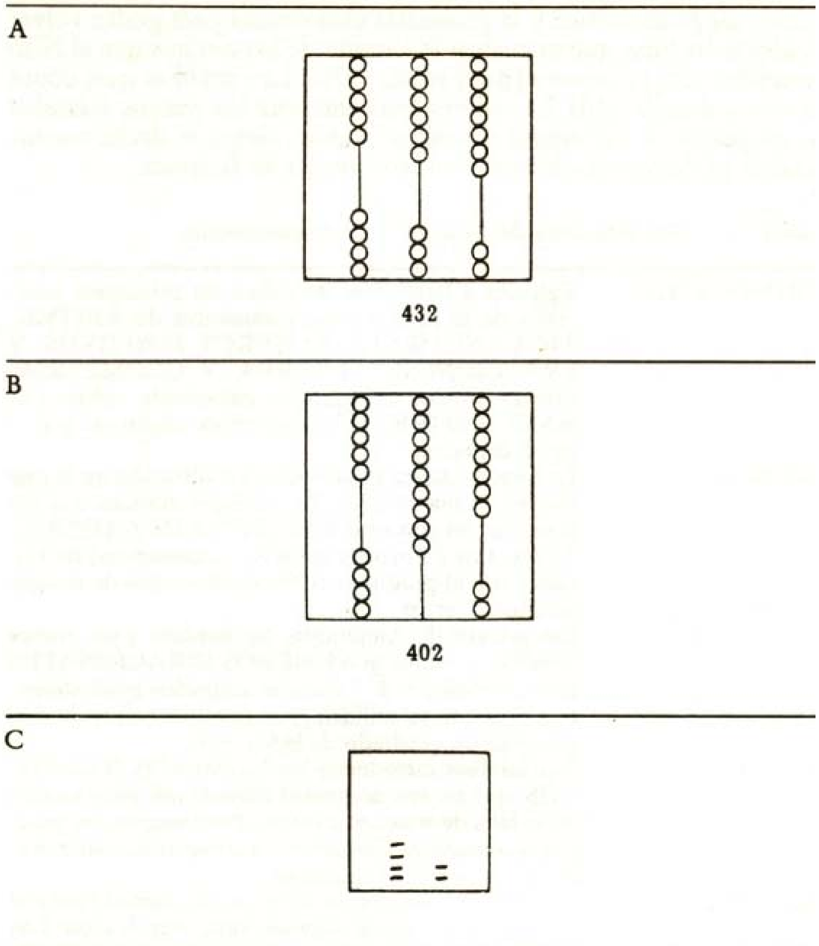
valor (por ejemplo, 63 se escribía Ȳ Ȳ Ȳ Ȳ). Al igual que el sistema babilonio, la numeración romana no era un sistema puro de base diez.

Con todo, la numeración posicional es una idea relativamente abstracta y no se improvisó con rapidez. Es probable que el impulso para un sistema posicional fuera producido por la necesidad de anotar por escrito las operaciones realizadas con un ábaco. El ábaco ilustrado en la figura 2.2 utiliza un modelo de base diez: la columna de la derecha representa las unidades, la siguiente representa grupos de diez y la siguiente grupos de cien. De acuerdo con esto, la figura 2.2.A representa el número cuatrocientos treinta y dos (432) Y la figura 2.2.B el cuatrocientos dos (402).

Los usuarios de ábacos no debieron tener dificultades con las columnas vacías hasta que tuvieron que hacer un registro permanente de sus cuentas. El registro de la figura 2.2.C, por ejemplo, ¿representa 42,402 ó 4.002? Parece ser que el 0 se inventó para simbolizar una columna vacía y evitar esta confusión (por ejemplo, Englehardt, Ashlock y Webe, 1984). Parece que, al principio, el 0 significaba algo vacío o en blanco, no la nada (ningún objeto). Con la invención del 0 fue posible la concepción de un sistema numérico posicional (con órdenes de unidades). Esto hizo posible la elaboración de algoritmos aritméticos que podían ser aprendidos por casi todo el mundo. La invención del 0 es uno de los mayores logros de la historia humana, y fue un hito crucial que hizo posible la ciencia y el comercio modernos (Dantzig, 1954).

En realidad, los procedimientos de cálculo escrito sólo se han venido usando durante los últimos trescientos años de la historia de la humanidad. Hace sólo unos centenares de años, lo normal en Europa Occidental era contar con los dedos. En los libros y las universidades se enseñaba a hacer cálculos aritméticos con los dedos. «El arte de emplear los dedos para contar y realizar las operaciones aritméticas sencillas era, en aquellos tiempos, uno de los logros de la persona cultivada» (Dantzig, 1954, p. 11). .

Figura 2.2 Representaciones concretas y escritas de números en un ábaco.



El desarrollo de la matemática formalizada

Como la historia del número, la historia de la matemática en general (véase la tabla 2.1) indica que los métodos y las formulaciones de cariz informal o intuitivo preceden a la matemática exacta y formalizada y actúan como base para la misma (Kline, 1974). Lo normal es que las pruebas deductivas rigurosas (el empleo de principios generales para demostrar proposiciones de una manera lógica) sigan a ideas inductivas (descubrimiento de relaciones mediante el examen de casos). Básicamente, los matemáticos utilizan pruebas para comprobar sus ideas intuitivas o informales. Las pruebas pueden determinar si una idea es lógicamente coherente o no. También pueden demostrar si una idea se aplica a un caso aislado o a una amplia gama de casos.

La perspectiva histórica indica que la matemática se encuentra en permanente evolución. Nuestros sistemas numérico y aritmético son la culminación de literalmente miles de años de inventiva y perfeccionamiento. El conocimiento matemático se ha construido lentamente, idea tras idea. El conocimiento que el adulto medio de nuestra cultura da por sentado no estaba disponible hace unos miles de años y ni siquiera cientos de años atrás. Con frecuencia se inventaban nuevos métodos a partir de necesidades prácticas y se adoptaban a causa de su utilidad. Por ejemplo, los egipcios se vieron forzados a inventar la aritmética y la geometría elementales para poder volver a colocar las hitas que marcaban los límites de los campos que el Nilo inundaba cada primavera (Bunt *et al.,* 1976). La verdad es que, como se muestra en la tabla 2.1, no era frecuente que los nuevos métodos se adoptaran de inmediato ya que no «caían bien», es decir, no encajaban en las pautas de pensamiento propias de la época.

Tabla 2.1 Breve historia del desarrollo de la matemática

3.000-300 a. de C.	Egipcios y babilonios conciben los principios esenciales de la matemática: rudimentos de ARITMETICA (NUMEROS ENTEROS POSITIVOS Y FRACCIONES), ALGEBRA Y GEOMETRIA. Los resultados se aceptan puramente sobre una BASE EMPIRICA. Los números negativos y el 0 no se conocen.
600-300 a. de C.	La Grecia clásica es la primera civilización en la que florece la matemática. Los griegos clásicos son los primeros en concebir la MATEMATICA DEDUCTIVA. Los *Elementos* (pruebas geométricas) de Euclides son el producto de trescientos años de ensayo intuitivo y error. Los griegos de Alejandría, los hindúes y los árabes conciben y emplean NUMEROS IRRACIONALES (por ejemplo, $\sqrt{2}$) que son aceptados gradualmente a causa de su utilidad (por ejemplo, $\sqrt{2}$ = la diagonal de un cuadrado de lados = 1).
600 d. de C.	Los hindúes introducen los NUMEROS NEGATIVOS, que no son aceptados durante mil años a causa de su falta de soporte intuitivo. Por ejemplo, los grandes matemáticos Descartes y Fermat rechazaron trabajar con números negativos.

700 d. de C. aprox.	Los hindúes inventan, o adoptan, un símbolo para el «0» para indicar una columna vacía o en blanco. Los árabes adoptan la numeración hindú y, después de centenares de años, las cifras arábigas llegan a ser de uso común.
1540 d. de C. aprox.	Aparecen los NUMEROS COMPLEJOS (por ejemplo, $\sqrt{-1}$) pero no son aceptados hasta cerca de doscientos años más tarde.
1650-1725 d. de C.	Newton y Leibniz crean el CALCULO. Cada una de las tres ediciones de *The Mathematical Principies of Natural Philosophy* de Newton ofrece una explicación distinta del concepto básico (las derivadas). El primer artículo de Leibniz recibió el nombre de «enigma» en vez de «explicación». A pesar de sus fundamentos vagos e incluso incorrectos, el cálculo encontró muchas aplicaciones a través de enfoques intuitivos.
Finales del s. XIX	Se establecen los fundamentos lógicos del sistema numérico, el álgebra y el análisis (el cálculo y sus ampliaciones).

Véase en Burn et al (1976, pp 226-230) una explicación más detallada.

C) DESARROLLO MATEMÁTICO DE LOS NIÑOS

En muchos aspectos, el desarrollo matemático de los niños corre paralelo al desarrollo histórico de la matemática: el conocimiento matemático impreciso y concreto de los niños se va haciendo cada vez más preciso y abstracto. Parece ser que, al igual que los seres humanos primitivos, los niños poseen algún sentido del número. Con el tiempo, los preescolares elaboran una amplia gama de técnicas a partir de su matemática intuitiva. Recapitulando la historia, la matemática no escolar o *matemática informal* de los niños se desarrolla a partir de necesidades prácticas y experiencias concretas. Como ocurrió en el desarrollo histórico, contar desempeña un papel esencial en el desarrollo de este conocimiento informal. A su vez, el conocimiento informal de los niños prepara el terreno para la *matemática formal* que se imparte en la escuela. Además, y reproduciendo la historia cultural, el dominio de la numeración posicional y de los algoritmos de cálculo basados en este concepto constituye un paso gigantesco para los niños. En realidad, los niños no aceptan y aprenden de inmediato la matemática formal que se imparte en la escuela ya que, en general, choca con *sus* pautas actuales de pensamiento.

Conocimiento intuitivo

Sentido natural del número. Durante mucho tiempo se ha creído que los niños pequeños carecen esencialmente de pensamiento matemático. En una ocasión, William James caracterizó el mundo infantil como una confusión resplandeciente y rumorosa. Sin embargo, investigaciones recientes (por ejemplo, Starkey y Cooper, 1980; Starkey, Spelke y Gelman, en prensa) indican que incluso los niños de seis meses de edad pueden distinguir entre conjuntos de uno, dos y tres elementos, y entre conjuntos de tres y cuatro elementos.

¿Cómo pueden determinar los psicólogos que los niños pequeños poseen este sentido numérico básico? Para ver si un niño pequeño puede discriminar entre conjuntos de cantidades distintas, el psicólogo le presenta, por ejemplo, una imagen con tres objetos (por ejemplo, Starkey y Cooper, 1980). Interesado por este nuevo estímulo, e bebé fija su mirada en la imagen. Sin embargo, tras varias presentaciones seguidas de tres, la novedad desaparece y la atención disminuye. En este momento, el psicólogo introduce un conjunto de cuatro (o dos) objetos. Si el niño no se percata de la diferencia, seguirá sin prestar atención. Sin embargo, los niños tienden a prestar atención otra vez, indicando que se dan cuenta de la diferencia.

¿Realmente presta atención el niño a los cambios de cantidad? En el ejemplo anterior, los niños se van aburriendo paulatinamente con el «tres» aun cuando se introduzcan objetos distintos o se modifique la posición de los tres objetos. La distribución de los objetos no influye en la atención. En realidad, y tras ver varios ejemplos de tres objetos, los niños se interesan menos en oír una secuencia de tres sonidos que una secuencia de dos o cuatro. Parece que es la *cualidad de tres* lo que dejan de encontrar interesante. Al parecer, los niños pequeños poseen un proceso de enumeración o correspondencia que les permite distinguir entre pequeños conjuntos de objetos.

El alcance y la precisión del sentido numérico de un niño pequeño son limitados. Los niños pequeños no pueden distinguir entre conjuntos mayores como cuatro y cinco. Además, el hecho de que parezcan capaces de tratar, por ejemplo, los conjuntos de tres y cuatro elementos de una manera distinta, no significa necesariamente que sepan que 4 *es más que* 3. Es decir, aunque los niños pequeños distinguen entre números pequeños, quizá no puedan ordenarlos por orden de magnitud.

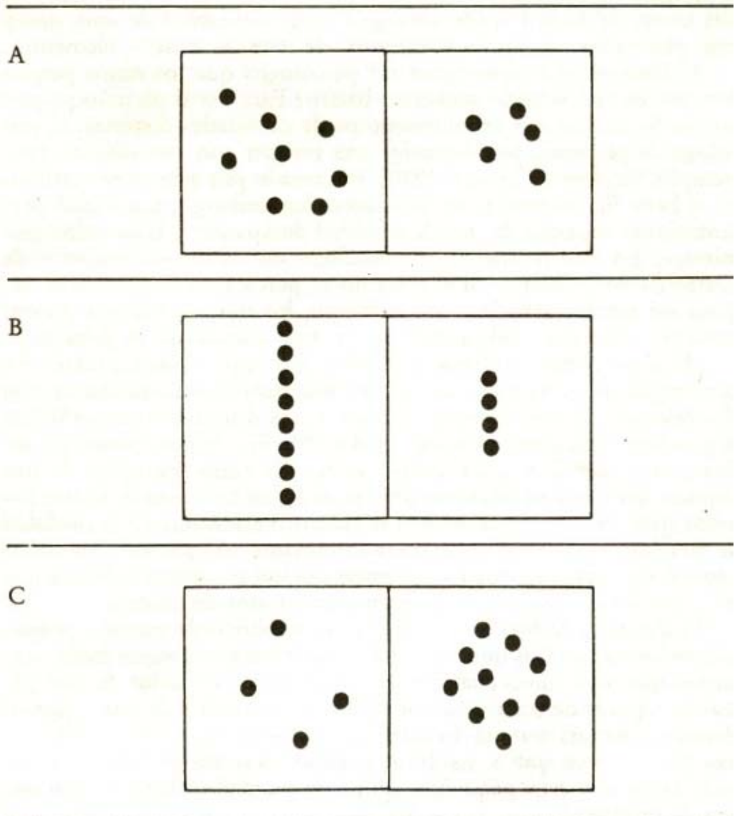
Nociones intuitivas de magnitud y equivalencia. A pesar de todo, el sentido numérico básico de los niños constituye la base del desarrollo matemático. Los preescolares parten de este sentido del número y desarrollan conocimientos intuitivos más sofisticados. Es a partir de la experiencia concreta de la percepción directa que los niños empiezan a comprender nociones como la magnitud relativa. Concretamente, se da una diferencia evidente entre el uno y colecciones mayores (Von Glasersfeld, 1982). Un niño, por ejemplo, puede tomar un bloque con una mano. Tomar dos bloques requiere las dos manos o dos intentos sucesivos con la misma mano. Tres bloques no se pueden tomar simultáneamente con las dos manos. Aunque estas diferencias pueden parecer triviales para un adulto, son de importancia fundamental para el niño pequeño que juega, y ofrece otra base concreta para distinguir y ordenar el 1, el 2 y muchos.

Cuando empiezan a andar, los niños no sólo distinguen entre conjuntos de tamaño diferente sino que pueden hacer comparaciones gruesas entre magnitudes. A los dos años de edad aproximadamente, los niños aprenden palabras para expresar relaciones matemáticas (Wagner y Walters, 1982) que pueden asociarse a sus experiencias concretas. Pueden comprender «igual», «diferente» y «más». Por ejemplo, Alfred Binet (1969), el padre de las modernas pruebas de inteligencia, preguntó a su hija de cuatro años de edad, Madeleine, que comparara los tamaños de conjuntos parecidos a los dos que se muestran en la figura 2.3. Aunque Madeleine sólo podía contar hasta tres, pudo señalar con mucha exactitud los conjuntos que tenían más elementos.

Posteriores pruebas demostraron que los juicios intuitivo s de Madeleine sobre los conjuntos que tenían más elementos se basaban en indicios perceptivos como la zona abarcada por cada conjunto (Ginsburg, 1982). De manera intuitiva, Madeleine escogía como «más» el conjunto que abarcaba más extensión. Otros indicios perceptivos, como la longitud, también pueden ofrecer una base para las evaluaciones intuitivas. En muchos casos, la más larga de dos hileras suele tener más objetos.

Investigaciones recientes confirman los resultados de Binet. Cuando se les pide que determinen cuál de dos conjuntos tiene «más», los niños de tres años de edad, los preescolares atrasados y los niños pequeños de culturas no alfabetizadas pueden hacerlo rápidamente y sin contar (Baroody y Ginsburg, 1982b). Casi todos los niños que se incorporan a la escuela deberían ser capaces de distinguir y nombrar como «más» el mayor de dos conjuntos *manifiestamente* distintos. (Usar correctamente «menos» es mucho más difícil y puede que no se aprenda antes de la escuela). El niño que no pueda usar «más» de esta manera intuitiva puede presentar considerables problemas educativos.

Figura 2.3 Elementos de una prueba para la noción «más»



Sin embargo, como los niños basan sus juicios en las apariencias, las comparaciones que hacen entre magnitudes pueden ser incorrectas. Aunque es frecuente que el aspecto refleje fielmente la cantidad, los indicios perceptivos como el área y la longitud no siempre son indicadores precisos de la cantidad. Por ejemplo, dos bandejas de caramelos pueden ocupar la misma superficie pero pueden contener cantidades diferentes porque los caramelos están agrupados más densamente en una que en otra. Por otra parte, podemos tener dos bandejas con el mismo número de caramelos pero que ocupan una superficie distinta porque los caramelos están más juntos en una que en otra.

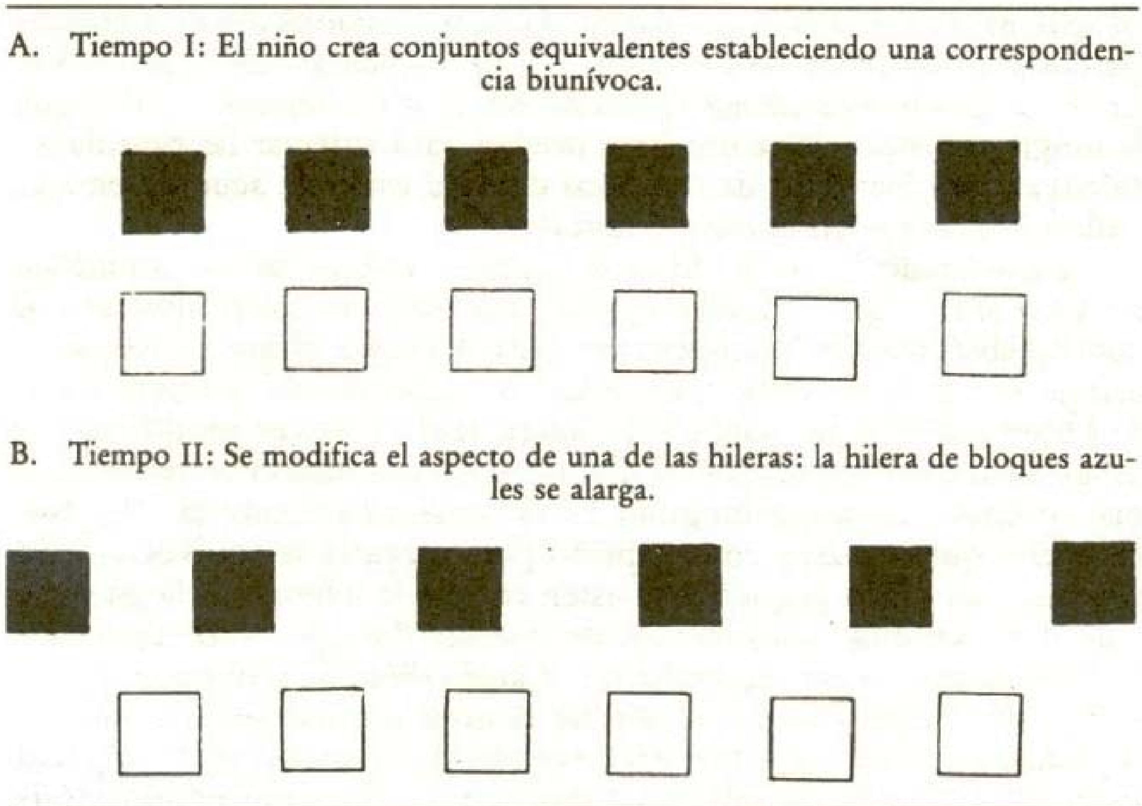
La tarea de conservación de la cantidad (por ejemplo, Piaget, 1965) demuestra de forma concluyente las limitaciones del conocimiento intuitivo de los niños. En primer lugar, se establece la igualdad de dos conjuntos por equivalencia. El examinador forma una hilera de, digamos, siete bloques blancos y pide al niño que coloque la misma cantidad de bloques azules. Se insta al niño a que haga corresponder un bloque azul a cada bloque blanco. Una vez establecida esta correspondencia biunívoca (véase la fig. 2.4.A) se pide al niño que confirme si las dos hileras tienen el mismo número de objetos. Puesto que la longitud proporciona una base precisa para apreciar las cantidades relativas, aun los niños de tres años de edad están de acuerdo en que ambas hileras tienen la misma cantidad.

A continuación se modifica el aspecto de uno de los conjuntos para ver si el niño continúa creyendo o no que los dos conjuntos son coordinables (tienen la misma cantidad). Mientras el niño observa, se alarga o se acorta una de las hileras. Por ejemplo, en la figura 2.4.B se observa que se ha alargado la hilera azul. Una vez modificada la longitud se vuelve a preguntar al niño si las dos hileras tienen la misma cantidad. Como la longitud ya no refleja fielmente la cantidad, los niños que se basan en el aspecto para juzgada se equivocan. ¡En realidad, los niños pequeños insisten en que la hilera más larga tiene más! Parecen estar convencidos de que los dos conjuntos de longitudes distintas no son equivalentes. Piaget (1965) denominó «no conservación» a este fenómeno porque el niño no mantiene (conserva) la relación de equivalencia inicial tras una transformación del aspecto (irrelevante para la cantidad). Es evidente que la comprensión intuitiva que tienen los niños de la magnitud y de la equivalencia es Imprecisa.

Nociones intuitivas de la adición y la sustracción. El sentido del número también permite a los niños reconocer si una colección ha sido alterada. Los niños reconocen muy pronto que añadir un objeto a una colección hace que sea «más» y que quitar un objeto hace que sea «menos». En un estudio (Brush, 1978) se mostraban dos recipientes a unos preescolares. Se colocaban pantallas delante de los recipientes para que el niño examinado no los pudiera ver. Mediante un proceso de correspondencia, se colocaba el mismo número de objetos en cada recipiente: al tiempo que se colocaba un objeto en uno de los recipientes se colocaba otro en el otro recipiente. Cuando el niño había manifestado que los dos recipientes ocultos contenían la misma cantidad de objetos, se le hacía observar cómo se añadía o se quitaba un objeto de uno de los recipientes. Los niños no tenían dificultades para reconocer que la adición o la sustracción de objetos modificaba la cantidad de un recipiente y, como resultado, modificaba la relación de equivalencia entre ambos recipientes. Por ejemplo, los niños identificaban fácilmente como «más» el recipiente al que se había añadido un objeto. Parece que los preescolares ya poseen una base intuitiva para comprender la adición y la sustracción.

Sin embargo, la aritmética intuitiva se limita a modificaciones evidentes. Si los recipientes contienen inicialmente cantidades desiguales, la aritmética intuitiva fracasa. Por ejemplo, si al principio se colocan cinco objetos en uno de los recipientes y nueve en el otro, los niños identificarán correctamente a este último como «más». Pero si a continuación se añaden dos objetos al recipiente que tiene nueve y cuatro al que tiene cinco, los niños piensan que ahora es éste el que tiene más. Para los niños pequeños, 5 + 4 es «más que» 9 + 2 porque han visto que se añadían más objetos al primer recipiente. Evidentemente, la aritmética intuitiva es imprecisa.

Figura 2.4. Tarea de conservación de la cantidad.



Conocimiento informal

Una prolongación práctica. Los niños encuentran que el conocimiento intuitivo, simple y llanamente, no es suficiente para abordar tareas cuantitativas. Por tanto, se apoyan cada vez más en instrumentos más precisos y fiables: numerar y contar. En realidad, poco después de empezar a hablar, los niños empiezan a aprender los nombres de los números. Hacia los dos años de edad, emplean la palabra «dos» para designar todas las pluralidades: dos o más objetos (Wagner y Walters, 1982). Hacia los dos años y medio, los niños empiezan a utilizar la palabra «tres» para designar «muchos» (más de dos objetos). Al igual que Allison, muchos niños de tres años usan «uno», «dos» y «tres» correctamente y emplean un término mayor que tres (por ejemplo, «cuatro») para indicar «muchos». Al etiquetar colecciones con números, los niños poseen un medio preciso para determinar «igual», «diferente» o «más». Los preescolares incluso llegan a descubrir que contar puede servir para determinar exactamente los efectos de añadir o sustraer cantidades, al menos si son pequeñas, de una colección.

Por tanto, contar se basa en el conocimiento intuitivo y lo complementa en gran parte. Por ejemplo, contar proporciona una etiqueta común «<tres») a tripletas de objetos distintos y distribuciones diferentes que los niños ven como equivalentes a una edad tan corta como los seis meses. Mediante el empleo de la percepción directa juntamente con contar, los niños descubren que las etiquetas numéricas como «tres» no están ligadas a la apariencia de conjuntos u objetos y son útiles para especificar conjuntos equivalentes. Con el tiempo, esta comprensión proporciona la base para el empleo de etiquetas numéricas como «siete» o «diecinueve» para identificar como equivalentes conjuntos que no pueden verse como tales. Contar ofrece a los niños el vínculo entre la percepción directa concreta, si bien limitada, y las ideas matemáticas abstractas, pero generales. Contar coloca el número abstracto y la aritmética elemental al alcance del niño pequeño.

Limitaciones. Aunque la matemática informal representa una elaboración fundamentalmente importante de la matemática intuitiva, también presenta limitaciones prácticas. El contar y la aritmética informal se hacen cada vez menos útiles a medida que los números se hacen mayores. El tiempo y el esfuerzo mental requeridos par~ contar o calcular de una manera informal se hacen enormes y llegan a ser prohibitivos. A medida que los números aumentan, los métodos informales se van haciendo cada vez más propensos al error. En realidad, los niños pueden llegar a ser completamente incapaces de usar procedimientos informales con números grandes. Más aún: aunque los métodos informales proporcionan una solución inmediata, no pueden proporcionar registros a largo plazo.

Conocimiento formal

La matemática escrita y simbólica que se imparte en las escuelas supera las limitaciones de la matemática informal. La matemática formal puede liberar a los niños de los confines de su matemática relativamente concreta. Los símbolos escritos ofrecen un medio para anotar números grandes y trabajar con ellos. Los procedimientos escritos proporcionan medios eficaces para realizar cálculos aritméticos con números grandes. Más aún, los símbolos y las expresiones escritas pueden ofrecer registros claros y permanentes que pueden ampliar enormemente la capacidad de la memoria.

Es esencial que los niños aprendan los conceptos de los órdenes de unidades de base diez. Para tratar con cantidades mayores es importante pensar en términos de unidades,' decenas, centenas, etc. (Payne y Rathmell, 1975). Pensar en decenas y múltiplos de diez ofrece a los niños flexibilidad y facilidad para abordar una amplia gama de tareas matemáticas, incluyendo ordenar (comparar) números grandes y realizar aritmética mental con números de varias cifras. Los órdenes de unidades proporcionan el razonamiento subyacente a muchas técnicas básicas como escribir números de varias cifras y sumar o restar con acarreo («llevando») (Resnick, 1982-1983). En pocas palabras, la matemática formal permite a los niños pensar de una manera más abstracta y poderosa, y abordar con eficacia los problemas en los que intervienen números grandes.

Aunque la matemática formal puede potenciar mucho la capacidad de los niños, comporta aprender nuevas técnicas y conceptos que, al principio, les pueden parecer extraños y difíciles. Los niños llegan a acostumbrarse a pensar en los números y en la aritmética en términos de contar. Un número como el 14 se contempla como 14 unidades o como 13 unidades y una más. Los niños pequeños no captan de inmediato la notación posicional. Como ocurrió en la historia, la comprensión de la notación posicional en los niños es el resultado de una lenta evolución. Así, los niños pueden tardar bastante tiempo en ver, por ejemplo, que 14 es una decena y cuatro unidades. La idea del 0 como cifra significativa (representante de una columna vacía) puede tardar mucho tiempo en desarrollarse. De hecho, muchos niños pueden continuar aferrándose a los métodos informales o concretos bastante después de habérseles presentado los órdenes de unidades y los algoritmos para realizar operaciones con acarreo.

D) IMPLICACIONES EDUCATIVAS: LOS CONOCIMIENTOS INFORMALES COMO BASE

La teoría cognitiva indica que los niños que acaban de incorporarse a la escuela no son simples recipientes vacíos que deben llenarse de conocimientos. La mayoría de los niños, incluyendo los procedentes de familias de bajo nivel económico, llega a la escuela con una gran cantidad de conocimientos matemáticos informales (Russell y Ginsburg, 1984). En realidad, muchos niños de educación especial tienen, al menos, algunos conocimientos informales (Baroody, 1983a; Baroody y Ginsburg, 1984; Baroody y Snyder, 1983). Los preescolares aprenden mucha matemática informal de la familia, los compañeros, la TV y los juegos antes de llegar a la escuela.

. La matemática informal de los niños es el paso intermedio crucial entre su conocimiento intuitivo, limitado e impreciso y basado en su percepción directa, y la matemática poderosa y precisa basada en símbolos abstractos que se imparte en la escuela. Como ocurrió en la historia, la experiencia práctica y relativamente concreta de contar ofrece a los niños una base para adquirir técnicas numéricas y aritméticas. Puesto que el aprendizaje implica una construcción a partir de conocimientos anteriores, el conocimiento informal desempeña un papel crucial en el aprendizaje significativo de la matemática formal. Como el aprendizaje es un proceso activo de asimilar nueva información a lo que ya se conoce, el conocimiento informal es una base fundamental para comprender y aprender las matemáticas que se imparten en la escuela. La investigación cognitiva indica que, independientemente de cómo se introduzcan las técnicas, símbolos y conceptos matemáticos en la escuela, los niños tienden a interpretar y a abordar la matemática formal en función de su matemática informal (Hiebert, 1984). Por tanto, la matemática informal es fundamental para el dominio de las técnicas básicas y para enfrentarse con éxito a la matemática más avanzada. A continuación se describen dos implicaciones educativas de este punto de vista que tienen una importancia clave.

1. La enseñanza formal debe basarse en el conocimiento matemático informal de los niños. Es esencial que la planificación educativa tenga en cuenta el conocimiento matemático informal de los niños. Los maestros deben explotar las potencialidades informales para que la enseñanza formal sea significativa e interesante. Además de aumentar la probabilidad de que el aprendizaje escolar tenga éxito, la explotación de los puntos fuertes informales puede tener importantes consecuencias afectivas. El principio de relacionar la instrucción formal con el conocimiento informa es aplicable a toda la gama de temas de nivel primario, desde el dominio de las combinaciones numéricas básicas hasta el aprendizaje de conceptos y procedimientos relacionados con los órdenes de unidades como el cálculo con acarreo. También veremos que este principio se aplica a niños con una gran variedad de aptitudes, incluyendo los que tienen problemas de aprendizaje y los que presentan retraso mental.

2. En general, las lagunas existentes entre el conocimiento informal y la instrucción formal pueden explicar las dificultades de aprendizaje. Cuando la enseñanza formal se introduce con demasiada rapidez y no se basa en el conocimiento informal que ya poseen los niños, el resultado es un aprendizaje memorístico y la aparición de problemas de aprendizaje y/o de creencias destructivas. Incapaces de conectar la matemática formal con algo significativo, muchos niños se limitan a memorizar y utilizar mecánicamente las matemáticas que se imparten en la escuela. Muchos niños incluso llegan a no poder memorizar ni datos ni técnicas. Otros pierden interés en la materia, desarrollan un sentimiento de rechazo hacia la misma e incluso llegan a temerla.

Sobre todo es muy probable que las lagunas existentes entre la instrucción formal y el conocimiento informal de los niños provoquen dificultades de aprendizaje de las técnicas y los conceptos, relativamente abstractos, relacionados con los órdenes de unidades de base diez. Como consecuencia, muchos niños tienen problemas para captar la notación posicional y experimentan dificultades con las técnicas de acarreo. Otros tienen problemas con la representación en base diez y no pueden desarrollar técnicas eficaces para manejar números grandes. Sobre todo, son los niños de educación especial los que pueden tener grandes dificultades para franquear la transición entre la aritmética informal basada en contar y la aritmética formal basada en la notación posicional.

Técnicas para contar

Contar oralmente, ¿implica aptitudes numéricas? ¿Qué técnicas de contar se suelen desarrollar durante los años preescolares? ¿Podemos suponer que los niños de educación especial adquirirán técnicas básicas para contar de una manera informal? ¿Qué técnicas suelen requerir instrucción durante los primeros cursos escolares?

A) EL DESARROLLO DE TECNICAS PARA CONTAR

El caso de Alexi

Hacia los veintiséis meses de edad, Alexi podía contar de palabra del 1 al 10 y había empezado a experimentar con los números hasta el 20. Cuando se le pidió que contara los tres puntos de una formación triangular, Alexi señaló los puntos y soltó a toda prisa: «1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.» Cuando se le pidió que contara tres puntos en fila, señaló al azar y varias veces e conjunto mientras decía: «8, 9, 10.» Aun después de poder contar con exactitud conjuntos de hasta cinco objetos, Alexi se desconcertaba cuando se le preguntaba cuántos había contado. Si se le enseñaban dos conjuntos (por ejemplo, una tarjeta con nueve puntos y otra con ocho) también le sorprendía que se le pidiera que señalara la tarjeta que tenía «más».

La técnica de Alexi para contar oralmente no garantizaba una capacidad para contar con exactitud conjuntos de objetos o para el empleo de otras técnicas numéricas. Sin embargo, hacia los cinco años de edad [1], los niños no sólo pueden contar de palabra casi hasta 29, sino que inmediatamente determinan que ••• y ••• son «tres». Además, para un niño típico de cinco años es evidente *cómo* se debe resolver el problema de determinar cuál de dos conjuntos (por ejemplo, uno de nueve y otro de ocho) tiene más elementos: sólo hay que contar cada conjunto y comparar las cantidades resultantes. Después de contar cada conjunto de puntos, la *solución* del problema también es fácilmente visible para los niños de cinco años: «El conjunto con 9 es más.» Por tanto, en cuestión de pocos años los niños aprenden una variedad de técnicas para contar y muchas maneras de aplicarlas (Fuson y Hall, 1983). Lo complicado que pueda ser este desarrollo, o en qué medida llegan a darlo por sentado los adultos, queda revelado por un examen detallado de las técnicas mencionadas en el párrafo anterior.

1 Las conductas que se describen más adelante se basan en las normas de la prueba *Early Mathematical Ability* (Ginsburg y Baroody, 1983) y representan la capacidad -media» de un niño de 4 años y 11 meses de edad.

Una jerarquía de técnicas

En su mayor parte, la capacidad de contar se desarrolla jerárquicamente (Klahr y Wallace, 1973). Con la práctica, las técnicas para contar se van haciendo más automáticas y su ejecución requiere menos atención. Cuando una técnica ya puede ejecutarse con eficiencia, puede procesarse simultáneamente o integrarse con otras técnicas en la memoria de trabajo (a corto plazo) para formar una técnica aun más compleja (por ejemplo, Schaeffer, Eggleston y Scott, 1974). Consideremos qué se necesita para realizar la tarea aparentemente sencilla de determinar si un conjunto de nueve puntos es «más" o «menos" que otro de ocho. Realizar esta comparación entre magnitudes numéricas requiere la integración de cuatro técnicas.

En primer lugar, la técnica más básica es generar sistemáticamente los nombres de los números en el orden adecuado. A los dos años de edad, Alexi ya había empezado a dominar *la serie numérica oral* y, a veces, podía contar hasta 10 de uno en uno. Sin embargo, cuando se le pedía que contara objetos, aún no podía decir los números en el orden correcto de forma coherente. Por ejemplo, a veces no empezaba a contar desde «uno". Hacia los tres años de edad, los niños suelen empezar a contar un conjunto a partir de «uno» y al empezar párvulos ya pueden usar la secuencia correcta para contar conjuntos de 10 elementos como mínimo (Fuson, Richards y Briars, 1982).

En segundo lugar, las palabras (etiquetas) de la secuencia numérica deben aplicarse una por una a cada objeto de un conjunto. La acción de contar objetos se denomina *enumeración.* Aunque Alexi podía generar la serie numérica hasta 10 correctamente, no podía enumerar un conjunto de nueve elementos, y ni siquiera de tres, porque todavía no había aprendido que debe aplicarse una, y sólo una, etiqueta a cada elemento de un conjunto. La enumeración es una técnica complicada porque el niño debe coordinar la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada elemento de una colección para crear una correspondencia biunívoca entre las etiquetas y los objetos. Como los niños de cinco años pueden generar correctamente la serie numérica y señalar una vez cada uno de los elementos de una colección, pueden coordinar con eficacia las dos técnicas para ejecutar el acto complejo de la enumeración (al menos con conjuntos de hasta 10 elementos).

En tercer lugar, para hacer una comparación, un niño necesita una manera conveniente de representar los elementos que contiene cada conjunto. Esto se consigue mediante la *regla del valor cardinal:* la última etiqueta numérica expresada durante el proceso de enumeración representa el número total de elementos en el conjunto. En otras palabras, un niño de cinco años puede resumir la serie «1,2, 3, ... , 9", con «nueve» y la serie «1, 2, 3, ... , 8" con «ocho». Como Alexi no podía ni enumerar conjuntos, no había descubierto que la última etiqueta de este proceso tiene un significado especial. A sus dos años de edad, Alexi todavía no asociaba la serie numérica con la definición de la cantidad de un conjunto.

En cuarto lugar, las tres técnicas acabadas de describir son indispensables para comprender que la posición en la secuencia define la *magnitud.* A los dos años de edad, los números no definían tamaños relativos para Alexi. Sin embargo, los niños pequeños llegan a aprender, tarde o temprano, que la serie numérica se asocia a una magnitud relativa. Aun los niños muy pequeños pueden realizar comparaciones gruesas entre magnitudes como «10 es más grande que 1», quizá porque saben que el 10 viene mucho más tarde en la secuencia de enumeración. Hacia los cinco años, los niños pueden llegar a hacer con rapidez comparaciones precisas entre magnitudes de números seguidos como el 8 y el 9, porque están muy familiarizados con las relaciones de sucesión numérica («cuando me pongo a contar, el 9 viene después del 8, así que el 9 es más grande»).

Por tanto, contar para determinar que un conjunto de nueve puntos es más que un conjunto de ocho no es, cognoscitivamente hablando, un acto trivial. Aunque los adultos pueden dar por sentadas las cuatro técnicas implicadas, éstas constituyen un reto intelectual imponente para los niños de dos años de edad. Cuando lleguen a los cinco años, la mayoría de los niños habrán dominado estas técnicas básicas y estarán listos para enfrentarse a nuevos desafíos.

Algunos de ellos -sobre todo los que proceden de entornas con carencias, los que tienen lesiones cerebrales o los mentalmente atrasados- pueden no haber llegado a dominar estas técnicas básicas y necesitarán una atención especial. En lo que resta de capítulo se describirán con mayor detalle las cuatro técnicas básicas para contar y otras técnicas más elaboradas que se desarrollan durante las primeras etapas de la escolarización.

Contar oralmente

Serie numérica. A una edad tan corta como los dieciocho meses, los niños empiezan a contar oralmente de uno en uno («1, 2, 3 ... »). La mayoría de los niños de dos años pueden contar «1, 2» pero luego empiezan a omitir términos (Fuson *et al.,* 1982). Al principio, los niños pueden aprender partes de la serie numérica hasta 10 para unirlas más adelante. Por ejemplo, Alexi (hacia los veinte meses de edad) empezó a usar, de una manera regular, la serie «8, 9, 10». Más adelante añadió «2, 3, 4» para hacer «2, 3, 4, 8, 9, la». Después añadió el 5 y el 6 y, finalmente, el 1 y el 7 para completar la serie hasta 10. A los veintiséis meses, Alexi añadió los números de dos cifras 19 y 20 r' muy poco después, insertaba la ristra «11, 12, 13» entre el 10 y el 9.

Contar oralmente suele equipararse con «contar de memoria».
Como ilustra el caso de Alexi, contar de memoria es una buena descripción de las primeras técnicas orales que emplean los niños para contar. Su manera de contar era, simplemente, una cantinela verbal sin sentido. La serie numérica inicial de Alexi parecía no ser más que una cadena de asociaciones aprendidas de memoria y enlazadas gradualmente entre sí. Sin embargo, contar de memoria es una descripción menos adecuada de los posteriores intentos de contar. Con demasiada frecuencia, este término se emplea para indicar que los niños aprenden toda la serie numérica por memorización. Aunque la memorización desempeña un papel determinado, sobre todo durante las etapas iniciales, el aprendizaje regido por reglas tiene una importancia fundamental para ampliar esta serie. Aunque es probable que los términos hasta el 15 [2] se aprendan de memoria, la mayor parte de la serie numérica posterior puede generarse mediante reglas (Ginsburg, 1982). Los restantes números hasta el 20 pueden generarse continuando con la secuencia original (6, 7, 8, 9) Y anteponiendo «la y>; (por ejemplo, «dieciséis, diecisiete ... »). Los números de la segunda decena (21,22, 23, ... , 29) se pueden generar mediante la regla de anteponer «20,> a cada una de las unidades (del 1 al 9) una por una. En realidad, para contar de uno en uno hasta 99 el niño sólo tiene que aprender esta regla y el orden de las decenas (10, 20, 30..., 90).

Los errores que cometen los niños al contar son una buena señal de que existen reglas que subyacen a su cuenta oral, sobre todo de 20 para arriba. Muchos niños -incluyendo los que presentan retraso mental- se inventan términos como «diecicinco» por 15, «diecidiez» por 20, o «veintidiez, veintionce», para 30 y 31 (Baroody y Ginsburg, 1984; Baroody y Snyder, 1983; Ginsburg, 1982b). Estos errores indican claramente que los niños no se limitan a imitar a los adultos, sino que tratan de construir sus propios sistemas de reglas (Baroody y Ginsburg, 1982). Se trata de errores razonables porque son ampliaciones lógicas, aunque incorrectas, de las pautas de la serie numérica que el niño ha abstraído. Así, aun los niños mentalmente atrasados parecen ser capaces de ver, emplear y, a veces, aplicar mallas pautas de la serie numérica.

2 En el original se hace refencia al número 13. Debido a las características que presentan los nombres de los números 11 a 19 en inglés, se ha optado por adaptar la traducción a las características de los nombres de estos números en castellano. Véase también la nota número 12 (N. del T.).

Aunque la mayoría de los niños que se acaban de incorporar a la escuela ya hacen progresos con la parte de la serie numérica regida por reglas, muchos no se dan cuenta de que las decenas (<<10, 20, 30,... , 90») siguen una pauta paralela a la secuencia de las unidades (Fuson *et al.,* 1982). Aún no se sabe con certeza cómo llegan los niños a resolver el «problema de las decenas», es decir, su orden correcto para contar hasta 100 de uno en uno. Una hipótesis es que los niños aprenden las decenas de memoria en forma de extremos finales de cada serie (por ejemplo, el niño forma la asociación entre «29-30» o «39-40»). Hay algunos datos que respaldan esta conjetura. Algunos niños no pueden contar por decenas pero pueden contar hasta 30 ó 39 porque parecen haber aprendido que 30 va después de 29, pero no han aprendido qué va después de 39 (Baroody y Ginsburg, 1984). Otra hipótesis es que los niños aprenden las decenas (contar de diez en diez) de memoria y emplean este conocimiento para rellenar la secuencia de contar de uno en uno. Otra hipótesis, completamente distinta, es que los niños aprenden las decenas como una versión modificada de la secuencia del 1 al 9 y emplean esta pauta (repetir la secuencia de las unidades y añadir *-enta)* para rellenar la cuenta de uno en uno. Un ejemplo de esta última hipótesis es el caso de Teri, una niña levemente atrasada que cuando llegaba al final de una decena (por ejemplo, «..., 58, 59») se ponía a contar para sí para averiguar la siguiente decena (por ejemplo, «1,2, 3, 4, 5, 6 -ah, ... , sesenta») (Baroody y Ginsburg, 1984). Luego iba repitiendo este procedimiento hasta llegar a 100.

En realidad, la mayoría de los niños pueden aprender de memoria algunas decenas (hipótesis 1 y 2) Y emplear reglas para generar el resto (hipótesis 3). Esto tiene sentido porque la mayoría de las decenas sigue una pauta y sería ineficaz aprenderlas todas de memoria. Sin embargo, se puede tener que aprender de memoria la primera parte, incluyendo quizá algunos casos regulares como 40, antes de descubrirse la pauta. Por tanto, aprender las decenas (contar de diez en diez) puede ser algo parecido a aprender a contar de uno en uno: al principio, los niños adquieren una parte por memorización y luego emplean una pauta para ampliar la secuencia.

Elaboraciones de la serie numérica. Con la experiencia, los niños aprenden a usar su representación mental de la serie numérica con más elaboración y flexibilidad (Fuson *et al.,* 1982). A medida que se van familiarizando más y más con la serie numérica correcta, los niños pueden citar automáticamente el número siguiente a un número dado. A los veintiséis meses, Alison ya podía hacerlo *si* se le «daba el pie».

MADRE:	Alison, ¿qué número va después del 9?
ALISON:	[No responde.]
MADRE:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y ...
ALISON:	10.

De no ser así, Alison no lo podía hacer sólo lo hacía a veces.

MADRE:	¿Qué número va después del ocho? El ocho.
ALISON:	El ocho.
MADRE:	¿Y después del dos?
ALISON:	El nueve
MADRE:	¿Y después del seis?
ALISON:	[No responde.]
MADRE:	(Un poco más tarde): ¿Qué va después del ocho?
ALISON:	Nueve, diez
MADRE:	¿Y después del dos?
ALISON:	El cuatro.

Hacia los cuatro o cinco años de edad, los niños ya no necesitan empezar desde el 1 para responder de manera coherente y automática preguntas relativas a números seguidos, al menos hasta cerca del 28 (Fuson *et al.,* 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Uno de los desarrollos que pueden producirse un poco más tarde es la capacidad de citar el número anterior. Cuando los niños captan las relaciones entre un número dado y el anterior, ya está preparado el terreno para contar regresivamente. Además, los niños de edad escolar aprenden gradualmente a contar por grupos. Entre las más precoces de estas nuevas pautas se encuentran contar por parejas, de cinco en cinco y de diez en diez.

Numeración

Enumeración. Los niños deben aprender que contar objetos implica algo más que agitar un dedo señalando un conjunto o deslizado por encima de otro mientras pronuncian con rapidez la serie numérica. Aunque los niños pequeños aprenden con rapidez al menos la parte memorística de la serie numérica (véase, por ejemplo, Fuson y Hall, 1983) Y no tienen problemas para señalar los objetos de uno en uno (Beckwith y Restle, 1966), coordinar estas dos técnicas para enumerar un conjunto no es una tarea fácil. En realidad, la enumeración -sobre todo de conjuntos con más de cuatro elementos- sólo llega a hacerse automática de una manera gradual (Beckwith y Restle, 1966; Gelman y Gallistel, 1978, y Schaeffer *et al.,* 1974). Con colecciones grandes y, sobre todo, desordenadas, los niños tienen que aprender estrategias para llevar la cuenta de los elementos que han contado y los que no. Cuando los elementos se ponen en fila, hace falta poco esfuerzo para no perder la cuenta si se empieza desde uno de los extremos. Si la colección está colocada en círculo, el niño sólo necesita recordar el elemento por el que ha empezado a contar. Con distribuciones desordenadas, el niño debe recordar qué elementos ha etiquetado y cuáles quedan por etiquetar. Esto se ve facilitado por el empleo de un método sistemático (por ejemplo, contar de izquierda a derecha y de arriba abajo) o separando los elementos etiquetados de los no etiquetados. Fuson (en prensa) encontró que muchos de sus sujetos de párvulos no empleaban la estrategia de crear un montón aparte con los elementos ya contados.

Regla del valor cardinal. Al principio, los niños pueden no darse cuenta de que la enumeración sirve para numerar. Cuando se les pide que cuenten un conjunto, los niños se limitan a enumerarlo y esperan que esto, en sí mismo, satisfará al adulto (cosa que ocurre a veces). Si se les pregunta cuántos objetos acaban de contar, vuelven a enumerar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, Ida, una niña de tres años de edad, enumeró cuatro estrellas (« 1, 2, 3, 4») sin hacer ningún intento serio de emplear o recordar la información. Cuando se le preguntó cuántas estrellas había acabado de contar, alzó los hombros y volvió a enumerarlas otra vez. Como la enumeración se contempla como un fin en sí misma y no como un medio para llegar a un fin, los niños muy pequeños pueden no llegar a comprender el sentido de preguntas como « ¿Cuántos hay?» ni preocuparse de recordar los resultados de lo que han contado.

Cuando tienen cerca de dos años, muchos niños desarrollan una conciencia primitiva de que contar es un procedimiento empleado para asignar números a colecciones (para responder a preguntas del tipo « ¿Cuántos hay?»). Ahora ya realizan el intento de recordar lo que han contado. Sin embargo, como no se dan cuenta de que el proceso de enumeración se puede resumir, responden a este tipo de preguntas repitiendo la serie numérica. Después de «soltar» varios términos («7, 8, 9») o de repetir el mismo («9, 9, 9») ante un conjunto de tres objetos, un niño de dos años puede designar este conjunto volviendo a contar (por ejemplo, «7, 8,9» o «9, 9, 9») (Wagner y Walters, 1982). Aun después de haber aprendido .a enumerar correctamente, los niños pueden no darse cuenta de que es innecesario recitar otra vez toda la secuencia cuando se les pregunta por una cantidad. Por ejemplo, después de enumerar cuatro estrellas que había en una tarjeta, George (sin volver a mirar la tarjeta) respondió a la pregunta ¿«Cuántas estrellas hay»? con: «Pues hay 1, 2, 3 y 4 estrellas.» Sin embargo, a una edad tan corta como los dos años y medio de edad, algunos niños descubren el «atajo» consistente en recitar la última etiqueta del proceso de enumeración para indicar la cantidad. En el fondo, la regla del valor cardinal traduce el término aplicado a un elemento determinado de un conjunto (el último) al término cardinal que representa el conjunto entero.

Regla de la cuenta cardinal. La regla inversa a la del valor cardinal es la regla de la cuenta cardinal. Esta regla específica que un término cardinal como «5» es la etiqueta asignada al último elemento cuando se enumera un conjunto de cinco objetos (Fuson y Hall, 1983). Parece que los niños tienen que aprender que un término como *cinco* es al mismo tiempo el nombre de un conjunto (número cardinal) y un número para contar. Consideremos el caso de un niño al que se da un conjunto de cinco canicas junto con la consigna: «Aquí hay cinco canicas; pon cinco ca!1icas en la taza.» El niño que no aprecia la regla de la cuenta cardinal tiene que ponerse a contar las canicas a medida que las va soltando en la taza. Este niño no puede prever que la etiqueta *cinco* empleada para designar el conjunto es la misma que se debe aplicar al resultado de contar el conjunto. En cambio, el niño que da por sentada la regla de la cuenta cardinal se limita a colocar todo el conjunto en la taza sin contar.

Separación. Contar (separar) un número concreto de objetos es una técnica que empleamos a diario (por ejemplo, «Dame tres lápices», «Me quedaré con cuatro camisas», «Toma cinco clavos»). Sin embargo, no se trata de una tarea cognoscitiva sencilla porque implica: a) observar y recordar el número de elementos solicitado (el objetivo); b) etiquetar cada elemento separado con una etiqueta numérica, y c) controlar y detener el proceso de separación. En otras pa- labras, se requiere almacenar el objetivo en la memoria de trabajo, un proceso de enumeración y, al mismo tiempo, ir comparando los números del proceso de enumeración con el número almacenado y detener este proceso cuando se llegan a igualar (Resnick y Ford, 1981). La regla de la cuenta cardinal ofrece al niño una razón para tomar nota del objetivo en la memoria de trabajo y constituye la base para detener el proceso de enumeración (Baroody y Mason, 1984). Por ejemplo, si se pide a un niño que separe tres lápices tiene que darse cuenta de que para realizar la tarea es importante recordar «tres» y que debe parar de contar lápices cuando llegue a la etiqueta «tres».

Comparación de magnitudes

Cuando tienen unos tres años de edad, los niños descubren que los términos para contar más altos se asocian a magnitudes superiores (Wagner y Walters, 1982). Así se dan cuenta de que «dos» no sólo sigue a «uno» sino que también representa una cantidad mayor. Hacia los 3 años y medio, los niños suelen apreciar que «tres» es mayor que «dos» (Shaeffer *et al.,* 1974). Partiendo de estos datos, los niños de cerca de cuatro años de edad parecen descubrir una regla general: el término numérico que viene después en la secuencia significa «más» que el término de un número anterior. Aun antes de entrar en la escuela, los niños parecen usar su representación mental de la serie numérica para hacer comparaciones toscas, pero eficaces, entre magnitudes, es decir, para comparar con rapidez y exactitud dos números bastante separados entre sí dentro de la secuencia (por ejemplo, el 3 y el 9, o el 2 y el 8) (Resnick, 1983). A medida que la relación «el siguiente de» se va haciendo automática, los niños pueden llegar a ser capaces de hacer comparaciones entre magnitudes más próximas (entre números seguidos). En realidad, cuando la mayoría de los niños empiezan a asistir al parvulario ya pueden realizar con bastante precisión comparaciones entre números adyacentes hasta el 5 e incluso hasta el 10.

B) IMPLICACIONES EDUCATIVAS: DIFICULTADES PARA CONTAR Y SOLUCIONES

Contar oralmente

Serie numérica. La mayoría de los niños, incluyendo los que pertenecen a minorías y a clases sociales desfavorecidas, reciben una exposición intensa a la primera parte -la memorística- de la serie numérica por parte de familiares, amigos, personal de guardería, la televisión, etc., antes de llegar a la escuela. Si un niño que acaba de incorporarse al jardín de infancia manifiesta incapacidad para generar la secuencia memorística hasta un mínimo de 10, puede dar señal de un problema grave y de la necesidad de una intervención de apoyo inmediata e intensiva (Baroody y Ginsburg, 1982b). Aunque se dan grandes diferencias individuales, el dominio de la parte memorística de la serie numérica no debería darse por sentado en niños atrasados del ciclo medio (Baroody y Ginsburg, 1984). La mayoría de los niños de cuatro y medio a seis años de edad pueden llegar a contar hasta 29 ó 39. Sin embargo, y dado que todavía no han resuelto el problema de las decenas, muchos de ellos son incapaces de ampliar la parte regida por reglas más allá de estas cifras. Muchos niños pequeños con retraso mental necesitarán ayuda para llegar a dominar incluso la primera parte de la secuencia regida por reglas (del 16 al 19 y del 20 al 29).

A partir del 15, aproximadamente, la enseñanza de la serie numérica no debería insistir en la memorización. En cambio, se debería animar a los niños a buscar y discutir las pautas subyacentes a la serie numérica. En algunos casos, el maestro puede tener que dar «pistas» o ayudar a que las pautas se hagan explícitas (véase el ejemplo 6.1). Además, es positivo que los niños cometan errores al aplicar reglas como sustituir 30 por «veintidiez». Se trata de una señal prometedora porque indica el reconocimiento de una pauta numérica y constituye un intento activo, por parte del niño, de tratar con lo desconocido en función de las reglas o de la comprensión que ya tiene. Cuando un niño comete un error al aplicar una regla, el maestro puede aprovechar el conocimiento que ya tiene diciéndole, por ejemplo: *«Otro nombre* para veintidiez es 30». Se trata de una manera constructiva de corregir al niño porque el maestro aprecia su capacidad para pensar sin dejar de ofrecerle el *feedback* necesario para su desarrollo posterior.

Ejemplo 6.1 Empleo de pautas para enseñar las decenas

Aun los niños algo retrasados pueden beneficiarse de la instrucción que explota las pautas subyacentes a la serie numérica. Tomemos el caso de Mike, un hombre de veinte años de edad con un el de 40. Mike trataba de aprender cómo decir la hora ajustándola a los cinco minutos más próximos, pero como no conocía las decenas superiores a 30, no podía pasar de 35. Después de 35 se limitaba a repetir expresiones usadas previamente (por ejemplo, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, *30»).* Para establecer una conexión entre la secuencia de las unidades y las decenas, la educadora de Mike escribió los números del 1 al 6 en una tarjeta. Debajo de cada cifra escribió la decena correspondiente y le explicó que podía usar los primeros números que empleaba para contar para averiguar las decenas. «¿Ves? El 1 es como el 10, e! 2 como el 20, e! 3 como el 30, el 4 como el 40, el 5 como el 50 y el 6 como el 60». Mike usó la lista numérica de esta tarjeta para contar de cinco en cinco y al ver que con ella podía expresar todas las horas del reloj se puso tan contento que pidió más copias de la tarjeta para usarlas en clase y en casa. Los siguientes pasos se encaminaron a hacer que Mike determinara la siguiente decena usando *mentalmente* la secuencia para contar y a que practicara contando de diez en diez y de cinco en cinco hasta que estas técnicas se hicieran automáticas. Al final, Mike decía en seguida la hora sin necesitar la tarjeta.

La educación de Mike y la recopilación del caso se deben a Cathy A. Mason.

Los obstáculos más frecuentes para los niños, sea cual sea su capacidad mental, son los nombres irregulares de los números 14 y 15 Y de las decenas [3] (por ejemplo, Baroody y Snyder, 1983, y Fuson *et al.,* 1982). Como 14 y 15 son una excepción a la pauta de elaboración, es frecuente que sean los últimos números que se aprenden hasta 19. Algunos niños simplemente se los saltan («…,13, 16,...) o los cambian por

3 Se ha hecho una adaptación al castellano de las dificultades que, en el original, se refieren al nombre de ciertos números en inglés. Véase también la nota número 12. (N. del T.)

otro («…,13, 16, 16, 16,…) Un diagnóstico expeditivo, el empleo de modelos y la práctica pueden establecer la secuencia adecuada como un hábito antes de que se instaure una secuencia incompleta o incorrecta.

Elaboraciones de la serie numérica. Cuando están en párvulos, los niños no deberían tener problemas para citar el número siguiente a otro, y ni siquiera el anterior, al menos hasta ella (Fuson *et al., 1982;* Ginsburg y Baroody, 1983). Los niños de bajo rendimiento y con retraso mental puede que no sean capaces de citar el número siguiente y quizá deban empezar a contar desde ello hacer conjeturas. Es probable que citar el número anterior sea relativamente difícil porque los niños deben operar sobre la serie numérica en dirección opuesta a la seguida durante su aprendizaje. Además, puede que el concepto de *anterior* sea más difícil de comprender que el de *siguiente.* Por tanto, al principio lo mejor sería concentrar la enseñanza de apoyo en el número siguiente. Esta enseñanza debería empezar con la parte más familiar de la secuencia numérica (del 1 al 4 o al 5). Además, si el niño puede leer las cifras se puede empezar con actividades en las que intervenga una representación concreta de la serie numérica (una lista numérica). Una vez el niño ha comprendido la cuestión relativa al número siguiente (anterior) y puede dar respuestas con facilidad mediante el empleo de una lista numérica, puede pasar a actividades sin lista numérica que le exijan determinar mentalmente la respuesta.

Contar regresivamente desde 10 depende del conocimiento de las relaciones existentes entre un número y su anterior, y es una técnica oral relativamente difícil. Con todo, suele ser dominada por los niños cuando llegan a primer curso (Fuson *et al.,* 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Contar regresivamente desde 20 es una técnica especialmente difícil y no suele dominarse hasta poco antes de tercer curso. Los maestros de educación especial deben esperar muchas dificultades con las dos técnicas. La enseñanza de apoyo puede empezar haciendo que el niño lea una lista numérica hacia atrás (de derecha a izquierda). Con los niños que dominan o han dominado el número siguiente, se puede tapar la lista numérica dejando a la vista el número de partida. Entonces, a medida que el niño va contando hacia atrás, se pueden ir destapando sucesivamente los números menores. Este procedimiento confirma las respuestas correctas y ofrece un *feedback* corrector para las respuestas incorrectas.

Para contar a intervalos de cinco como mínimo, puede animarse a los niños a que empleen la secuencia familiar de contar de uno en uno, pero susurrando los números intermedios y destacando los que forman la pauta. Por ejemplo, para aprender a contar de dos en dos, puede decirse al niño que cuenta así: «uno [en voz baja], dos [en voz alta], tres [en voz baja], cuatro [en voz alta]... ». Si hace falta, puede empezarse con una lista numérica para aligerar el esfuerzo de expresar el término correcto y permitir que el niño se concentre en la pauta. En el ejemplo 6.2 se muestra otro método para contar a intervalos a partir de la secuencia familiar para contar de uno en uno.

Ejemplo 6.2 Enseñanza de contar a intervalos

Se puede hacer que contar a intervalos tenga significado para los niños relacionándolo con el procedimiento familiar de contar objetos reales de uno en uno. Josh, un adolescente con retraso moderado, estaba aprendiendo a contar de cinco en cinco. Su educadora le había dicho que colocara unos discos de plástico de color que le gustaban mucho en pilas de a cinco y después le ayudó a contarlos de cinco en cinco. Luego, hizo que Josh los desparramara y los contara de uno en uno. Josh se quedó muy sorprendido al ver que obtenía el mismo resultado. Luego comprobó la validez general de este descubrimiento con distintos números de pilas. En la sesión siguiente, Josh insistía en repetir el experimento por su cuenta.
Durante la tercera sesión, Josh pidió tarjetas con números (5, 10, 15,20, 25, etc.) y las emparejó con sus pilas. A continuación añadió una nueva etapa a su proceso de comprobación: leer los números de las tarjetas a medida que iba contando los discos de uno en uno. Comprobó el resultado de contar la primera pila de uno en uno con el número de la primera tarjeta y encontró que, en ambos casos, el resultado era «5». Al continuar contando de uno en uno la segunda pila, encontró que el resultado coincidía con el número de la segunda tarjeta (10), y así sucesivamente. Mientras Josh iba contando de uno en uno, la educadora recalcaba el número final de cada grupo (5, 10, 15, etc.) diciéndolo en voz alta con él. Luego, Josh se inventó un juego de adivinar en el que se tapaba los ojos, la educadora tomaba una tarjeta (por ejemplo, la del 15) y Josh tenía que adivinar de qué número se trataba. Hacia la cuarta sesión ya podía contar hasta 30 de cinco en cinco y sin ayuda. El uso de objetos reales y la secuencia para contar de uno en uno hicieron que contar a intervalos fuera, para Josh, algo comprensible e interesante.
La educación de Josh y la recopilación del caso se deben a Cathy A. Mason

Numeración

Enumeración. Cuando los niños llegan al jardín de infancia suelen ser bastante competentes para contar conjuntos de uno a cinco objetos, y la mayoría de los niños de cinco años enumera con exactitud hasta 20 objetos (Fuson, en prensa). Por tanto, si un niño que empieza el curso de párvulos presenta dificultades con conjuntos de uno a cinco elementos, es que necesita de inmediato una atención individual. El niño que no haga ningún intento de etiquetar cada objeto de un conjunto, por pequeño que éste sea, con una palabra para contar (soltando al azar palabras para contar mientras desliza el dedo por encima de los objetos) ni de llevar la cuenta de los objetos contados y sin contar (etiquetando los objetos del conjunto de una manera totalmente asistemática) presenta graves problemas (Baroody y Ginsburg, 1982b).

Como la enumeración requiere la coordinación de dos subtécnicas, los errores pueden deberse a tres causas: a) generar una serie numérica incorrecta *(errores de secuencia);* b) llevar un control inexacto de los elementos contados y no contados *(errores de partición),* y c) no coordinar la elaboración de la serie numérica y el proceso de control de los elementos contados y no contados *(errores de coordinación)* (Gelman y Gallistel, 1978). En la figura 6.1 se muestran algunos ejemplos de cada tipo de error. En ocasiones, los niños pue-den tener un desliz al generar una serie numérica, pero si los errores de secuencia son sistemáticos (por ejemplo, etiquetar sistemáticamente conjuntos de 13 y 14 elementos con «13») es señal de que hace falta una enseñanza de apoyo orientada a reforzar la técnica necesaria para contar oralmente. El niño que comete con regularidad errores de partición como pasar algún elemento por alto o contarlo más de una vez, debe aprender estrategias de control más eficaces.

En la figura 6.1 se puede observar que hay tipos de errores muy distintos que pueden producir las mismas respuestas. Por ejemplo, el doble etiquetado (señalar un objeto una vez y asignarle dos etiquetas), al igual que contar un mismo objeto más de una vez, aumenta en una unidad el número de elementos de un conjunto. Sin embargo, el doble etiquetado es un error de coordinación y no de partición. En realidad, se pueden combinar varios errores para producir una respuesta correcta. Como las respuestas incorrectas pueden producirse de varias maneras y como, matemáticamente, dos errores no equivalen a un acierto, es importante que los maestros observen la actividad de enumeración de los alumnos que tengan alguna dificultad.

Si un niño tiene problemas para ejecutar con eficacia alguna de estas subtécnicas, es probable que se den errores de coordinación. Por ejemplo, un niño que tiene que detenerse y pensar qué viene después del 3 cuando cuenta un conjunto de cinco elementos, puede olvidar por dónde iba: «1 [señala el primer elemento], 2 [señala el segundo], 3 [señala el tercero], a ver, a ver, 4 [señala el quinto elemento]». Igualmente, si un niño tiene que dedicar mucha atención para no perderse, puede equivocarse (por ejemplo, saltarse un número). Fuson y Mierkiewicz (1980) encontraron que los niños pequeños tendían a cometer errores de coordinación a medio contar.

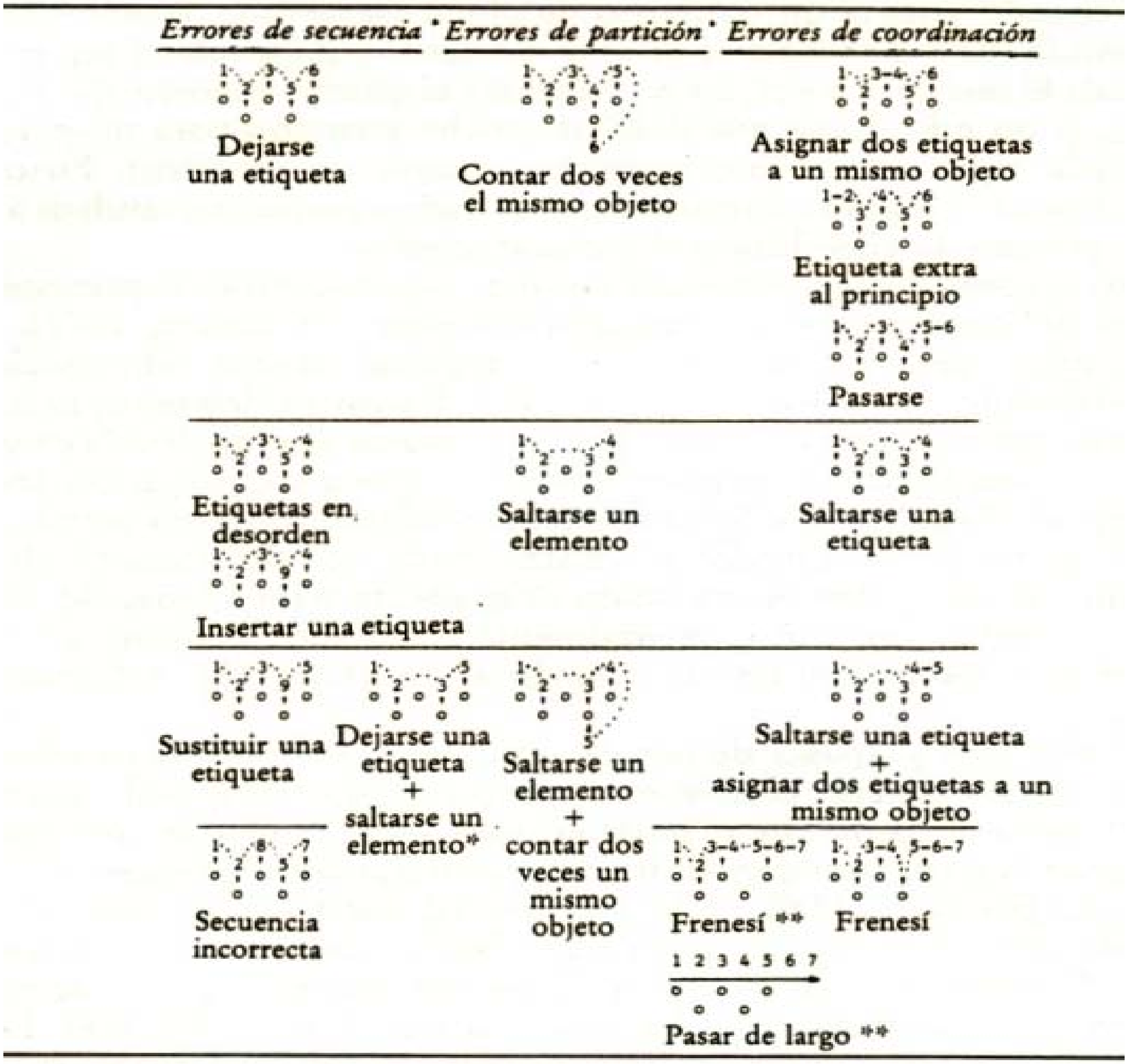
Los errores de coordinación también pueden darse al principio o al final del proceso de enumeración (Gelman y Gallistel, 1978). Algunos niños tienen dificultades para empezar las dos sub técnicas al mismo tiempo. En consecuencia, señalan el primer elemento, pero no lo etiquetan o empiezan a etiquetar demasiado pronto (por ejemplo, dicen «1» sin señalar el primer elemento, que a continuación recibe la etiqueta «2»). A veces, los niños tienen dificultades para acabar con las dos técnicas coordinadas y señalan, pero no etiquetan, el último elemento o continúan etiquetando después de haber señalado el último elemento. Los niños mentalmente retrasados parecen ser propensos a cometer errores de coordinación (Baroody y Ginsburg, 1984).

El «frenesí» y «pasar de largo» son dos graves errores de enumeración. En el primero, el niño empieza con una correspondencia biunívoca, pero no la mantiene hasta el final, y en el segundo no intenta establecer la correspondencia al empezar o acabar el proceso de enumeración (Fuson y Hall, 1983). El frenesí puede darse como resultado de no controlar los elementos etiquetados y no etiquetados (error de partición), no coordinar la cuenta oral y la acción de señalar (error de coordinación), o ambos a la vez (véase la fig. 6.1). Pasar por alto comporta no hacer ningún intento de controlar o coordinar la serie numérica con la acción de señalar cada elemento.

Con los niños que «pasan por alto» algún elemento, la enseñanza de la· enumeración debe destacar: a) contar despacio y con atención; b) aplicar una etiqueta a cada elemento; c) señalar cada elemento una vez *r* sólo una, y d) contar organizadamente para ahorrar esfuerzo en el control. Con elementos fijos, el control de los objetos contados y los que quedan por contar se puede facilitar con estrategias de aprendizaje como empezar por un lugar bien definido y continuar sistemáticamente en una dirección (por ejemplo, de izquierda a derecha). Una estrategia adecuada para contar elementos móviles es separar claramente los elementos contados de los que quedan por contar.

Regla del valor cardinal. Cuando llegan a párvulos, los niños aplican rutinariamente la regla del valor cardinal a conjuntos aún mayores (Fuson, Pergament, Lyons y Hall, 1985). Si un niño de esta edad no lo puede hacer es señal de que tiene graves problemas. Aunque muchos niños mentalmente retrasados pueden aprender espontáneamente la regla del valor cardinal, otros necesitan una enseñanza explícita. Si un niño simplemente adivina el valor cardinal de un conjunto que acaba de contar o vuelve a enumerar el conjunto, se le puede explicar la regla del valor cardinal de la manera siguiente: «Cuando cuentes, recuerda el último número que dices porque así sabrás cuántas cosas has contado.» Si un niño repite toda la serie numérica empleada en el proceso de enumeración, se le puede decir que existe un atajo: «Deja que te enseñe una manera más fácil. Después de contar, me vuelves a decir el último número que hayas dicho y así sabré cuántas cosas has contado.» A veces es útil que el maestro demuestre el proceso mientras «piensa en voz alta»: « ¿Cuántos dedos tengo levantados? Voy a contarlos, a ver. Uno, dos, tres, *cuatro.* Vaya, el último número que he dicho es cuatro, así que tengo *cuatro* dedos levantados.»

Figura 6.1. Ejemplos de errores de enumeración.



Indica la acción de señalar.

” Indica la acción de señalar.

• Indica una combinación de errores de secuencia y partición.

•• Indica una combinación de errores de partición y coordinación.

Regla de la cuenta cardinal. Los niños que empiezan la escuela suelen dar por sentada esta noción más avanzada del valor cardinal; muchos niños de educación especial no lo hacen así (Baroody y Mason, 1984). Esta regla puede enseñarse mediante un procedimiento de dos etapas concebido por Secada, Fuson y Hall (1983) (Véase la fig. 6.2). La primera etapa consiste en presentar un conjunto al niño e indicar (verbalmente y mediante un número escrito) la designación cardinal del conjunto. El maestro pide al niño que cuente el conjunto y observe que el resultado de contarlo coincide con la designación cardinal. Para la segunda etapa, el maestro presenta otro conjunto. Se le vuelve a dar al niño la designación cardinal y se le pide que cuente los elementos del conjunto. Sin embargo, antes de que acabe de contar, el maestro le pide al niño que prediga el resultado.

Separación. Los niños suelen llegar a párvulos pudiendo separar con precisión al menos conjuntos de pequeño tamaño. Si un niño es incapaz de separar hasta cinco objetos cuando se le pide, es que necesita una enseñanza de apoyo intensiva. Muchos niños con deficiencias mentales tienen dificultades con esta tarea (Baroody y Ginsburg, 1984; Baroody y Snyder, 1983; Spradlin, Cotter, Stevens y Friedman, 1974) Y necesitan una enseñanza especial.

Figura 6.2. Enseñanza de la regla de la cuenta cardinal.

Etapa A - Paso 1
Maestro: «Tenemos cinco círculos [enseña cinco círculos y una tarjeta con el número 5]; cuéntalos para ver cuántos hay.»

$\boxed{5}$
○ ○ ○ ○ ○

Etapa A - Paso 2

$\boxed{5}$
○ ○ ○ ○ ○

Niño: «1, 2, 3, 4, 5»
Maestro: «Mira, te he dado cinco círculos [señala la tarjeta con el número] y, cuando los has contado, el último número que has dicho era 5. El número de círculos que hay es siempre lo mismo que el último número que dices cuando los cuentas.»

Etapa B - Paso 1
Maestro: «Tenemos cuatro cuadrados, cuéntalos para ver cuántos hay.»

$\boxed{4}$
□ □ □ □

Etapa B - Paso 2

$\boxed{4}$
□ □ □ □

Niño: «1, 2-»
Maestro: «¿Cuál será el último número que dirás cuando acabes de contar?» (El maestro corrige y continúa según crea necesario.»

Uno de los errores más comunes cuando se retiran objetos de un conjunto es «no pararse», es decir, no detener el proceso de contar cuando se ha llegado al objetivo. A Matt, un niño deficiente mental, se le enseñaron ocho lápices y se le pidió: « Toma cinco para dárselos al maestro; recuerda, saca sólo cinco.» Sin embargo, se limitó a contar los ocho lápices. Cabe atribuir este tipo de errores a un fallo de memoria (por ejemplo, véase Resnick y Ford, 1981). Según una de las hipótesis que atribuyen el error a un fallo de memoria, los niños no mantienen e! objetivo en la memoria de trabajo, es decir, no toman nota de la cantidad solicitada. Otra propuesta es que, al estar tan ocupados con e! proceso de contar, se olvidan de! objetivo. Por ejemplo, cuando se le preguntó a Matt cuántos lápices debía tomar, respondió: «No sé.» Como no recordaba e! objetivo o no lo tenía en su memoria de trabajo, Matt se limitó a contar todos los lápices que tenía delante.

Al igual que muchos otros niños (véase Flavell, 1970), es posible que Matt supiera que hace falta un esfuerzo especial para memorizar información, es decir, que a veces necesitamos ensayar o repetir una información para facilitar e! recuerdo. Para este niño, la enseñanza de apoyo debe recalcar la importancia de recordar el objetivo de la tarea y, de ser necesario, debe también enseñarle cómo recordarlo. Se debe estimular al niño a ensayar (repetir) e! objetivo para que quede grabado firmemente en su memoria de trabajo antes de contar los objetos. Si hace falta, se le puede instar a que anote el número antes de empezar a contar.

Los niños que tienen la edad de empezar a andar (Wagner y Walters, 1982) y algunos niños deficientes mentales (Baroody y Ginsburg, 1984) tienen problemas con esta tarea aun cuando parecen recordar el objetivo. Por ejemplo, cuando se pidió a un niño, Fred, que quitara tres objetos de un montón de cinco, se limitó a contarlos todos: «1,3,4,6, 11 [y después, volviendo a señalar e! último elemento] 3», pareciendo que había recordado e! objetivo. Este niño deficiente había vuelto a etiquetar el último elemento con la palabra «tres». Cuando se le pidió que retirara cinco elementos de un total de nueve volvió a cometer el error de no detenerse, pero acabó la cuenta con la etiqueta correcta: «1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 5.» Aunque no se detuvo cuando se encontró por primera vez con la etiqueta buscada, Fred parecía recordarla e hizo que el último elemento tuviera la etiqueta apropiada.

Este error de «finalizar con el objetivo» puede explicarse mediante otra hipótesis referida a la memoria. Aunque algunos niños guardan el objetivo y lo pueden recordar más tarde, el proceso de contar objetos absorbe tanto su atención que no pueden comparar la serie numérica del proceso de separación con el objetivo. Como la memoria de trabajo de Fred estaba tan copada por el proceso de separación quizá no fue capaz de atender simultáneamente a los procesos de contar y de comparar. Una vez liberada su atención del proceso de contar, Fred pudo recordar el objetivo y enmendar su conducta.

Cuando un niño no tiene problemas para recordar el objetivo, la enseñanza de apoyo debe centrarse en el proceso de comparación. Primero, se debe hacer que el niño anote el objetivo. A continuación, sacamos nosotros el primer elemento (o dejamos que lo haga el niño). Luego le preguntamos (señalando el número anotado si es necesario): « ¿Es la cantidad correcta? ¿Hay que pararse aquí?» Continuamos así hasta llegar a la cantidad solicitada. Debemos explicar claramente por qué se ha detenido el proceso de contar: «Nos hemos parado en *N* [decir el número deseado)] porque *N* [señalar el objetivo] es la cantidad que necesitamos.» Sobre todo a principio, se debe ayudar al niño a encontrar la manera más fácil posible de ejecutar el proceso de contar. Por ejemplo, se puede simplificar el proceso de controlar los elementos que se han contado y los que no, apartando los primeros es un montón claramente separado.

Hay otra explicación para este tipo de errores y es que los niños muy pequeños y algunos escolares con deficiencias mentales no poseen la base conceptual para comprender la tarea. Quizá los niños que no comprenden la noción de la cuenta cardinal no se dan cuenta de que deben comparar lo que cuentan con el objetivo. Así pues, cuando un maestro desea subsanar las dificultades que tiene un niño con la separación, primero deberá comprobar que posea la técnica necesaria para la cuenta cardinal (Baroody y Mason, 1984).

Comparación entre magnitudes

Cuando llegan al curso de párvulos, casi todos los niños pueden realizar comparaciones entre números separados y entre números seguidos pequeños (del 1 al 5), y la gran mayoría ya habrá llegado a dominar estas últimas con los números del 1 al 10. Los niños de educación especial durante la primera enseñanza y muchos niños deficientes de nivel intermedio pueden llegar a tener problemas con las comparaciones entre números separados y entre números seguidos pequeños. La educación de apoyo deberá empezar con objetos concretos y números familiares que sean manifiestamente diferentes en cuanto a magnitud (comparar 1, 2 ó 3 con números mayores como 9 ó 10; comparar números seguidos como 1 y 2, o 2 y 3).

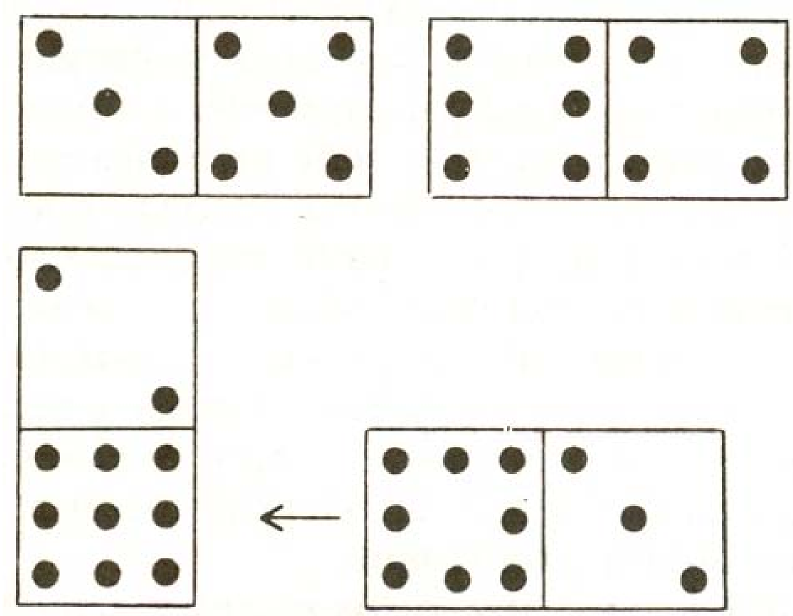
Pueden conseguirse varios juegos en los que intervienen modelos concretos (véase el ejemplo 6.3). En el juego *Invasores de la luna,* por ejemplo, los jugadores comparan la longitud o la altura de dos conjuntos de cubos que encajan entre sí. De esta manera, la comparación de números se conecta con indicios perceptivos claros y queda reforzada por ellos: «Tú tienes ocho naves espaciales en la luna y yo tengo dos. Mira qué *larga* es la fila de naves que tienes. Ocho naves es *más* que dos.» Gradualmente, el niño irá aprendiendo la idea de que los números se asocian con la magnitud y que los números que vienen después en la serie numérica son *mayores.* Una vez hayan arraigado estas ideas básicas, el niño deberá ser apartado de actividades con objetos concretos y se le pedirá que resuelva los problemas mentalmente.

Ejemplo 6.3. Juegos de comparación entre números concretos

INVASORES DE LA LUNA

Objetivo:
Comparaciones entre números del 1 al 10 separados o seguidos.
Material:
1. Varias lunas (círculos de papel) de distinto color.
2. Dos conjuntos de cubos encajables de distinto color.
3.Una peonza con los números del 1 al 10 (para comparaciones entre números separados) o un conjunto de tarjetas en las que se listen comparaciones específicas para cada objetivo.
Instrucciones:
Esparcir los círculos por la mesa. Dar un conjunto de cubos a cada uno de los dos jugadores. Explicar que los círculos son lunas y que los cubos son naves espaciales. El jugador que haga «alunizar» más naves en una luna se queda con ella y el que conquiste más lunas gana la partida. Usar la peonza o las tarjetas para determinar la cantidad de naves que puede hacer alunizar cada jugador. Preguntar a uno de los niños qué jugador ha hecho alunizar más, por ejemplo: «Tú tienes cinco naves y Billy tiene tres. ¿Cuánto es más, cinco o tres?» De ser necesario, señalar las distintas longitudes (o alturas) de los dos conjuntos de cubos encajables.

DOMINO MAS (MENOS) UNO *Objetivo:*
Comparar números seguidos (más o menos uno) de! 1 al 10. *Material:*
Fichas de dominó. *Instrucciones:*
Este juego, basado en uno propuesto en e! currículo de Wynroth (1969-1980), se juega como e! dominó normal pero con una excepción. En vez de emparejar conjuntos numéricamente equivalentes para ir añadiendo fichas, las fichas que se añaden deben tener un conjunto de puntos mayor (o menor) en una unidad al conjunto de la ficha de! extremo de la hilera. La figura que sigue ilustra un caso de «Dominó menos uno». Un jugador va a añadir una ficha con «8» al extremo que tiene «9».



Con los niños de educación especial puede ser muy útil indicar la estrategia para contar que puede usarse para comparar números seguidos y cómo se relaciona esta estrategia con las técnicas básicas para saber el número «que viene después». Explicar, por ejemplo: «Para saber qué número es mayor, contemos a ver qué número viene después. Para los números 3 y 4 contamos "1, 2, J" Y como después del 3 viene el 4, e14 es mayor.» También puede ser útil demostrar el procedimiento para el niño y emplear una lista numérica o bloques encajables para contar. Llegado el momento, el procedimiento de contar se puede interrumpir para preguntar al niño: «¿Qué es más, 4 ó 3? ¿Qué número viene *después* cuando contamos?» Otra manera de hacer explícita la conexión entre la comparación y la técnica del número «que viene después» es continuar las preguntas sobre el número «que viene después» con preguntas del tipo «cuál es mayor». Por ejemplo, se puede preguntar: «¿Qué viene justo después del 3 cuando contamos? Decimos 3, ¿y luego... ?» Una vez haya respondido el niño, preguntarle: « ¿Y cuál es más, 3 ó 4?» (nótese que para forzar al niño a pensar realmente en la comparación, el número mayor se menciona en primer lugar o «sin seguir el orden usual» la mitad de las veces, aproximadamente).

C) IMPLICACIONES EDUCATIVAS: LA ENSEÑANZA DE TECNICAS PARA CONTAR

A continuación se resumen algunas directrices generales para la enseñanza.

1. Los niños deben dominar cada técnica para contar hasta que llegue a ser *automática.* Esto es esencial porque las técnicas para contar se basan la una en la otra y sirven de base para técnicas más complejas como hacer sumas o devolver cambios. Si las técnicas básicas no son eficaces, no pueden integrarse bien con otras técnicas para la ejecución de funciones más complejas.

2. La enseñanza de apoyo debe basarse en experiencias concretas. Para que la enseñanza de una técnica básica para contar sea significativa, deberá basarse en actividades concretas. Además, y sobre todo con poblaciones de educación especial, puede ser importante enlazar explícitamente actividades concretas con la técnica que se enseña.

3. La enseñanza de apoyo debe ofrecer, durante un largo período de tiempo, un ejercicio regular con actividades de interés para el niño. Normalmente, el dominio incompleto de las técnicas básicas para contar suele atribuirse a una falta de experiencia o interés. Si los ejercicios no son interesantes, algunos niños no se sentirán comprometidos con ellos y no alcanzarán la experiencia necesaria para el dominio de la técnica. Por ejemplo, los niños se cansan en seguida de los ejercicios de repetición oral para aprender a contar. Los niños se sienten más dispuestos a generar la serie numérica en el contexto de enumerar objetos porque se trata de una actividad que tiene más sentido para ellos (Fuson *et al.,* 1982). La forma concreta que deberá tener el ejercicio dependerá del niño. Muchos niños responderán con entusiasmo a distintos tipos de juegos que se basan en contar; otros preferirán jugar con un títere de «Barrio sésamo» y otros podrán disfrutar con el contacto de un tutor, sea niño o adulto, interesado y entusiasta. Lo esencial es que el ejercicio no necesita -es más, no debe- carecer de interés para el niño.

A continuación se presentan otros juegos y actividades para enseñar a contar de palabra, a numerar y a comparar magnitudes.

Juegos y actividades

ESTRELLAS ESCONDIDAS

Objetivos:

1. Enumerar.
2. Regla del valor cardinal.

Materiales:

Tarjetas con estrellas u otros objetos dibujados (de 1 a 5 para principiantes).

Instrucciones:

Explicar: <<Vamos a jugar al juego de las estrellas escondidas. Te voy a enseñar

una carta con estrellas y cuentas cuántas hay. Cuando hayas acabado de contar, esconderé las estrellas y, si me dices cuántas estoy escondiendo, habrás ganado un punto.» Levantar la primera tarjeta y hacer que el niño cuente las estrellas. Taparlas con la mano o un trozo de cartulina y preguntarle: « ¿Cuántas estrellas estoy escondiendo?» El niño deberá responder citando únicamente el valor cardinal del conjunto. Si el niño empieza a contar desde 1, preguntarle si hay alguna otra manera más fácil para indicar las estrellas que se han contado. Si es necesario, enseñar al niño directamente la regla del valor cardinal demostrando la tarea y «pensando en voz alta» (describiendo el procedimiento y el razonamiento en que se basa).

PREDECIR LA CANTIDAD

Objetivos:

Concepto de cuenta cardinal.

Materiales:

Objetos pequeños que se puedan contar como bloques o fichas.

Instrucciones:

Dar al niño un conjunto de bloques (por ejemplo, cinco) y decirle: «Toma cinco bloques. ¿Cuántos habría si los contaras?» Después, hacer que el niño cuente el conjunto para que compruebe su respuesta. También puede hacerse con un dado. Después de una tirada, no permitir que el niño cuente inmediatamente los puntos y seguir, en cambio, el procedimiento descrito anteriormente.

CARRERA DE COCHES

Objetivos:

1. Enumerar.
2. Separar.

Materiales:

1. Un tablero con pista de carreras (una hilera de casillas en espiral).
2. Un dado (con 0 a 5 puntos al principio; 5 a 10 para niños más avanzados).
3. Coches en miniatura.

Instrucciones:

Hacer que los niños escojan los coches que más les gusten. Colocar los coches al principio de la pista. Tirar el dado por turnos y hacer avanzar los coches el número correspondiente de casillas. Hacer que los jugadores cuenten los puntos del dado (enumeración) y las casillas cuando avanzan los coches (separación). Estas técnicas también pueden practicarse con otros juegos de tablero básicos de temática diversa, de acuerdo con los intereses de los niños.

RELLENAR

Objetivos:

1. Enumerar.
2. Separar.

Materiales:

1. Tableros de juego o pistas de carreras individuales.
2. Fichas.
3. Baraja de cartas con puntos (1 a 5 para principiantes; 6 a 10 para niños más avanzados).
4. Bandejas pequeñas (por ejemplo, tapas de plástico).

Instrucciones:

Dar a cada niño un tablero o una pista de carreras. Decir: «Vamos a ver quién rellena primero su tablero (pista de carreras).» Hacer que cada niño, por turnos, levante una carta de la baraja y cuente los puntos para determinar cuántas fichas debe tomar. Decirle al niño que tome esta cantidad. Hacer que el niño separe las fichas que le han tocado en una bandeja pequeña (este procedimiento hace que la corrección de los errores de separación sea menos confusa). Si se comete un error, vaciar la bandeja. Hacer que el niño lo vuelva a intentar o, si es necesario, ayudarle a extraer el número correcto. Una vez extraído el número correcto, hacer que el niño coloque las fichas en su tablero. Gana el niño que llena antes su tablero.

EL NUMERO TAPADO

Objetivos:

Determinar el número anterior o posterior a un número dado (del 1 al 9).

Materiales:

Tarjetas numeradas del 1 al 9.

Instrucciones:

La versión básica de este juego se describe con más detalle en Bley y Thompson (1981) junto con otros juegos como *Walk On* [«Sigue andando»] y *Peek* [«Echa una ojeada,,] que son útiles para enseñar números posteriores a otro dado. Para la versión básica de *El número tapado,* extender las tarjetas numeradas, boca arriba y por orden, encima de la mesa. Decir al niño que cierre los ojos, poner una carta boca abajo y decir al niño que ya puede mirar para averiguar qué carta es la que se ha puesto boca abajo. Señalar la carta anterior (posterior) a la carta tapada y decir, por ejemplo: « ¿Qué carta es ésta? ¿Qué viene justo después [antes] del 6?» Continuar hasta que se haya tapado cada número una vez. La versión básica es especialmente útil para los niños que no pueden responder a esta pregunta empezando a contar desde el 1 y para los que confunden el número anterior con el posterior. Una versión más avanzada comporta eliminar los indicios visibles de la serie numérica y requiere que el niño resuelva el problema mentalmente. Para ello, no hay más que colocar todas las tarjetas boca abajo y levantar una de ellas, pidiéndosele al niño que diga qué número va antes o después del levantado.

CARRERA DE NUMEROS

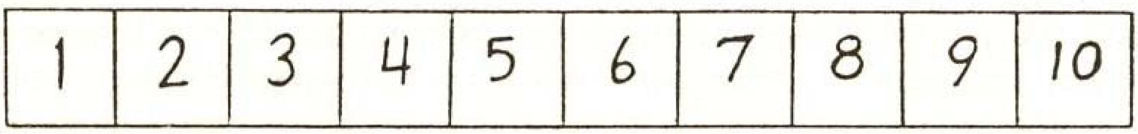
Objetivos:

Comparaciones entre números separados del 1 al 10.

Materiales:

1. Una hilera de casillas (de 15 x 75 cm, aproximadamente) con los números del 1 al 10 (véase la fig. 6.3).
2. Coches en miniatura

Figura 6.3. «Pista» de la Carrera de números.



Instrucciones:

Hacer que cada jugador escoja el coche que guste. Colocar los coches en la línea de salida (unos 15 cm a la izquierda de la casilla con e! número « 1») . Decir a los niños que sus coches van a echar una carrera y que ganará e! coche que vaya más *rápido.* Hacer que los niños den un empujón a sus coches a lo largo de la pista. Los coches que se salgan por el otro extremo o por los lados de la pista quedan descalificados. Si un coche se detiene sobre una línea de separación entre casillas, se colocará en la casilla en la que descanse la mayor parte de! coche. Cuando los dos jugadores han empujado sus coches, preguntar a uno de ellos: «Tu coche se ha ido a15 y e! de Jane se ha ido al 3. ¿Qué es más, 5 ó 3? ¿Quién gana?» Variar e! orden en que se mencionan los números para que e! mayor se encuentre unas veces al principio y otras al final. Si es necesario, corregir al niño ensenándole sobre la lista de números que un número mayor implica recorrer más casillas.

JUEGO DE PERSECUCIÓN

Objetivos:

Comparaciones entre números seguidos.

Materiales:

1. Tablero con casillas en espiral.
2. Dos fichas.

3.Tarjetas con diferentes comparaciones (del 1 al 5 para principiantes; números mayores para niños más adelantados).

Instrucciones:

Decirle al niño que nuestra ficha va a perseguir a la suya por el tablero de juego. Sacar una tarjeta y leer los dos números escritos en ella. Decirle al niño que escoja el número mayor. La elección del niño indica cuántas casillas debe avanzar su ficha; el otro número indica la cantidad de casillas que debe avanzar la nuestra. Después de cada turno, comentar las posiciones de las fichas diciendo, por ejemplo: «Pues sí, éste es el que tiene más. Tu ficha todavía va por delante», o «No, ése no es más. Mira, mi ficha ya está pillando a la tuya». Si e! niño tiene dificultades, pueden usarse bloques o una lista de números para ilustrar la comparación.

D) RESUMEN

Generar de palabra la serie numérica sólo es un primer paso hacia e! dominio de un complejo de técnicas importantes que los adultos emplean de manera rutinaria y automática. Cuando llegan a la escuela, los niños suelen ser capaces de generar la parte memorística de la serie numérica y un poco de la parte basada en la aplicación de reglas, además de poder enumerar y separar conjuntos de objetos, emplear la regla de valor cardinal para resumir una enumeración e incluso emplear relaciones de orden numérico (números anterior y posterior a otro dado) para determinar la mayor de dos cantidades. Algunos niños, sobre todo los deficientes mentales, pueden necesitar una educación de apoyo para dominar estas técnicas informales básicas. Durante los primeros años de escuela, los niños resuelven el problema de las decenas y amplían su capacidad de contar de palabra hasta 100 y más. A medida que se van familiarizando con la serie numérica, aprenden a contar por intervalos (por ejemplo, por parejas) y a contar regresivamente. La enseñanza especial o de apoyo debe asegurar que se llegue al dominio de cada componente sucesivo de la jerarquía de técnicas para contar. La enseñanza deberá ser concreta, intensa e interesante.

Desarrollo del número

La capacidad para comprender y emplear el número, ¿ se desarrolla directamente a partir de la experiencia de contar que tienen los niños? ¿ O el desarrollo de una manera significativa de contar necesita una adquisición previa de conceptos y actitudes necesarias? ¿Qué puede aprender un niño acerca del número a partir de su experiencia de contar? ¿Qué papel desempeña el reconocimiento de pautas en el desarrollo matemático? El enfoque cardinal (teoría de conjuntos) de la Matemática Moderna o la formación lógica de los programas piagetianos, ¿son útiles con los niños pequeños? ¿Qué papel deben desempeñar las experiencias de contar en la enseñanza de conceptos numéricos a niños pequeños?

A) DOS PUNTOS DE VISTA SOBRE EL DESARROLLO DEL NUMERO

Problemas de conservación: el caso de Peter

Peter, un niño de edad preescolar, colocó siete fichas azules en fila frente a sí. Yo coloqué otra fila de siete fichas blancas en correspondencia biunívoca con la anterior y, mientras Peter miraba, añadí otra ficha blanca. Entonces junté las ocho fichas blancas para que la hilera fuera más corta y pedí a Peter que contara para ver si había el mismo número de fichas en cada hilera o si había alguna que tuviera más. Peter respondió: «Mi hilera tiene [contando las fichas azules] 1, 2, 3, 4, 5,6, 7. La tuya tiene [contando las fichas blancas] 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8. ¿Ves? ¡La tuya *sólo* tiene ocho: la mía tiene más!»

A pesar de haber contado los dos conjuntos, Peter seguía respondiendo incorrectamente a la pregunta de conservación de la no equivalencia. Al parecer, la capacidad para contar de palabra y enumerar no implica necesariamente una comprensión de número bien desarrollada. ¿Por qué contar no ayudó a Peter, y qué tipo de enseñanza podría mejorar su comprensión del número?

El punto de vista de los requisitos lógicos

Los psicólogos ofrecen dos explicaciones distintas de la comprensión del significado de los nombres de los números y del acto de contar. Desde uno de estos puntos de vista, los niños, antes de llegar a tener «uso de razón» (hacia los siete años de edad), son incapaces de comprender el número y la aritmética (por ejemplo, Piaget, 1965). La curiosa respuesta de Peter se atribuye a una incapacidad de pensar lógicamente. Es decir, se supone que Peter carece de razonamientos y los conceptos lógicos necesarios para un concepto del número y para contar significativamente. Como contar no implica tener éxito en tareas· de conservación de la desigualdad o la desigualdad, algunos psicólogos (por ejemplo, Wohlwill y Lowe, 1962) han llegado a la conclusión de que la experiencia de contar tiene poco o nada que ver con el desarrollo de un concepto numérico. Por ejemplo, Piaget (1965) afirmaba que los niños aprenden a recitar la serie numérica y datos aritméticos a muy corta edad y que se trata de actos completamente verbales y sin significado. Ni siquiera la numeración garantiza una comprensión del número. Desde este punto de vista, el desarrollo de un concepto del número y de una manera significativa de contar depende de la evolución del pensamiento lógico.

El modelo cardinal. Según uno de los modelos que establecen la lógica como requisito previo, los niños deben entender la clasificación antes de poder comprender el significado esencial del número. Esto implica aprender a definir un conjunto, es decir, a clasificar objetos para poder asignar cada uno de ellos a un conjunto correcto. Por ejemplo, un conjunto de formas curvas puede incluir c, C, u, U, s, S y O, pero no L, v, V, F Y #.

Comprender la lógica de clases también requiere comprender la clasificación jerárquica o «inclusión de clases»: una clase es la suma de sus partes (subclases) y, por tanto, es mayor que cualquier subclase. Por ejemplo, si a un niño se le presentan tres rosas y cinco violetas y se le pregunta «¿Hay más violetas o hay más flores?», debería responder que la clase (flores) es más que la subclase (violetas). Sin embargo, los niños pequeños tienen dificultades con estos problemas de inclusión de clases (por ejemplo, Piaget, 1965). Estos resultados se han considerado evidencias de que los niños pequeños no captan la lógica de clases y que, en consecuencia, son incapaces de comprender verdaderamente el número.

Además, la lógica de clases comporta comprender la idea de conjuntos equivalentes. La equivalencia de dos conjuntos se define mediante una correspondencia biunívoca: Dos conjuntos pertenecen a la misma clase si se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos respectivos. La equivalencia y la correspondencia biunívoca, que son el fundamento de la matemática formal, se consideran el fundamento psicológico del aprendizaje de las matemáticas.

El modelo de Piaget. Según Piaget (por ejemplo, 1965), los niños deben entender la lógica de las relaciones (seriación) y la clasificación para comprender las relaciones de equivalencia y, a consecuencia de ello, el significado del número. Piaget estaba de acuerdo en que la equivalencia (la correspondencia biunívoca) es el fundamento psicológico de la comprensión del número. Sin embargo, creía que comprender la correspondencia biunívoca implicaba comprender *tanto* la clasificación como la seriación. Por ejemplo, igualar implica observar el primer elemento de cada conjunto, y luego el segundo, el tercero, el cuarto, etc. En otras palabras, para establecer una igualdad, los niños tienen que llevar la cuenta de los elementos que han emparejado mediante la imposición de un orden.

De la misma manera, Piaget consideraba que el número es la unión de conceptos de seriación y de clasificación. Por ejemplo, enumerar un conjunto implica tratar todos sus elementos como miembros de la misma clase y al mismo tiempo diferenciar dentro del conjunto el primer elemento, el segundo, etc. Además, los números forman un orden y constituyen una jerarquía de clases. Por ejemplo, tres es una clase que contiene como subclases uno y dos (y, a su vez es una subclase de los números mayores). En resumen, Piaget afirmaba que el número no puede entenderse ~n términos de un único concepto lógico sino que constituye una síntesis única de conceptos lógicos (Sinclair y Sinclair, en prensa).

Para Piaget (1965), el desarrollo de la comprensión del número y de una manera significativa de contar está ligada a la aparición de un estadio más avanzado del pensamiento. Los requisitos lógicos del número (conceptos de seriación, clasificación y correspondencia biunívoca) aparecen con el «estadio operacional» del desarrollo mental. Los niños que no han llegado al estadio operacional no pueden comprender el número ni contar significativamente, mientras que los niños que han llegado a él sí pueden hacerlo. Por tanto, el número es un concepto de «todo o nada».

Piaget (1965) afirmaba que la conservación de la cantidad tenía una importancia extraordinaria porque señalaba la llegada al estadio operacional, es decir: la adquisición del pensamiento lógico; la comprensión de las clases, las relaciones y las correspondencias biunívocas; un verdadero concepto del número; y una manera significativa de contar. Más concretamente, según Piaget la conservación de la cantidad indicaba la comprensión de que una vez establecida la equivalencia (no equivalencia) de dos conjuntos, los cambios en la configuración de los conjuntos no modifica la relación de equivalencia (no equivalencia). Es decir, las relaciones de equivalencia (no equivalencia) se *conservan* a través de cualesquiera transformaciones no relevantes en la apariencia física de un conjunto. El niño que conserva se da cuenta de que el número de elementos de un conjunto no varía cuando varía su aspecto físico.

El punto de vista basado en contar

Un punto de vista alternativo considera que la dificultad de Peter con la tarea de conservación es el resultado de un conocimiento incompleto de cómo se debe contar y no de una completa incapacidad para pensar lógicamente. Algunos psicológicos (por ejemplo, Gelman, 1972; Zimiles, 1963), han llegado a la conclusión de que contar es esencial para el desarrollo de la comprensión del número por parte del niño. El número no se considera un concepto tipo «todo o nada» que es posible gracias a un cambio general en la manera de pensar de los niños (una nueva etapa de desarrollo mental). En cambio, el modelo que basa su explicación en la manera de contar aduce que la comprensión del número evoluciona lentamente como resultado directo de las experiencias de contar.

Desde este punto de vista, los conceptos numéricos y contar significativamente se desarrollan de manera gradual, paso a paso, y son el resultado de aplicar técnicas para contar y conceptos de una sofisticación cada vez mayor. Al principio, los preescolares suelen aprender a emplear los números de una manera mecánica para descubrir o construir gradualmente significados cada vez más profundos del número y de contar (por ejemplo, Baroody y Ginsburg, en prensa; Fuson y Hall, 1983; von Glasersfeld, 1982; Wagner y Walters, 1982). A medida que aumenta su comprensión del número y de contar, los niños aplican el número y los procedimientos para contar de una manera cada vez más sofisticada. A su vez, esta creciente sofisticación desemboca en una comprensión mayor, etc. En el fondo, el desarrollo de técnicas y conceptos está entrelazado y, de hecho, durante los últimos años algunos piagetianos (por ejemplo, Elkind, 1964; Piaget, 1977; Sinclair y Sinclair, en prensa) han llegado a la conclusión de que un análisis del desarrollo del número sería psicológicamente incompleto si no se tuviera en cuenta la contribución de las actividades de contar.

Conceptos relacionados con contar

Al principio, los niños se limitan a recitar nombres de números. En estos momentos, contar no parece ser nada más que un sonsonete carente de sentido (Ginsburg, 1982). Por ejemplo, Arianne, a los 22 meses, canturrea «dos, cinco, dos, cinco» mientras baja saltando cuatro escalones. Ha oído a sus hermanos gemelos de 3 años de edad recitar nombres de números mientras bajan las escaleras o juegan a algo. Al parecer, Arianne ha aprendido que ciertas actividades pueden verse acompañadas por la recitación de nombres de números. Imita el procedimiento (y sólo una parte de la serie numérica correcta) seguido por sus hermanos. «Los nombres de los números son palabras y, como ocurre con otras palabras, los niños pueden aprender a decirlas mucho antes de formar [imágenes mentales], por no hablar ya de conceptos abstractos que asociar a las mismas ….» (von Glasersfeld, 1982, p. 196).

Al principio, los niños pueden hacer enumeraciones sin intentar numerar conjuntos. Por ejemplo, Arianne parece disfrutar, a sus dos años de edad, etiquetando objetos mientras busca entre sus juguetes; no hace ningún intento de emplear una etiqueta para cada elemento o de resumir la cuenta. Cuando se le hacen preguntas del tipo «¿Cuántos hay?», sabe que el procedimiento correcto implica responder con un número, pero todavía no parece apreciar que los números se emplean para designar el valor cardinal de un conjunto y para diferenciar un conjunto de otros conjuntos con distintos valores cardinales. Considérese la siguiente conversación entre Arianne y su padre:

PADRE:	[Señalando un dibujo con dos gatos.] ¿Cuántos gatos hay en este dibujo?
ARIANNE:	Dos.
PADRE:	[Señalando un dibujo con tres perros.] ¿ Cuántos perros hay en este dibujo:
ARIANNE:	Dos.
PADRE:	[Señalando un dibujo con un gato.] ¿Cuántos hay?
ARIANNE:	Dos.

Parece que «dos» es la respuesta «comodín» para Arianne a la hora de responder a preguntas del tipo «¿Cuántos hay?». En estos momentos, contar es un acto enteramente verbal y sin significado. Obsérvese, no obstante, que ya trata los números como una clase especial de palabras. Sólo emplea números cuando se le pregunta cuántos hay o cuando se le pide que cuente. Los niños parecen distinguir muy pronto entre las palabras que son para contar y las que no (Fuson *et al.,* 1982). Los preescolares sólo emplean letras muy rara vez cuando se les pide que cuenten (por ejemplo, Gelman y Gallistel, 1978). Incluso los niños levemente deficientes del ciclo medio reconocen siempre los números como una clase especial de palabras aplicables a actividades de contar (Baroody y Ginsburg, 1984).

Principio del orden estable. Con el tiempo, a medida que los niños usan sus técnicas para contar y reflexionan sobre ellas, aprenden a descubrir regularidades importantes en sus acciones de contar y en los números. Los niños parecen aprender los primeros términos de la serie numérica de memoria. Al principio, puede que no empleen los mismos términos o el mismo orden cuando recitan números o cuentan objetos. Por ejemplo, cuando Alexi tenía tres años de edad no siempre empezaba desde el uno para contar conjuntos. Tarde o temprano, los niños se dan cuenta implícitamente, o hasta explícitamente, de que contar requiere repetir los nombres de los números en el mismo orden cada vez. El principio del orden estable estipula que para contar es indispensable el establecimiento de una secuencia coherente. Los niños cuyas acciones están guiadas por este principio pueden utilizar la secuencia numérica convencional o una secuencia' propia (no convencional), pero siempre de manera coherente (Gelman y Gallistel, 1978). Por ejemplo, Beth siempre usa la secuencia correcta del uno al diez en tanto que Carol usa siempre su propia versión («1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 18») para contar diez objetos.

Principio de correspondencia. Como resultado de la imitación, al principio los niños pueden recitar números -como Arianne- mientras señalan objetos y hasta pueden llegar a desarrollar una cierta eficacia en la enumeración de conjuntos pequeños. Más adelante, pueden darse cuenta de la necesidad de etiquetar cada elemento de un conjunto una vez y sólo una. El principio de correspondencia subyace a cualquier intento genuino de enumerar conjuntos y guía los esfuerzos de construir estrategias de control de los elementos contados y por contar, como separar los unos de los otros. A una edad tan corta como los tres años, los niños parecen emplear un principio como éste para detectar errores de enumeración como contar dos veces un mismo objeto o saltarse alguno (Gelman y Meck, en prensa).

Principio de unicidad. Como una función de contar es asignar valores cardinales a conjuntos para diferenciarlos o compararlos, es importante que los niños no sólo generen una secuencia estable y asignen una etiqueta, y sólo una, a cada elemento de un conjunto, sino también que empleen una secuencia de etiquetas distintas o únicas. Por ejemplo, un niño puede usar la secuencia «1, 2, 3, 3» de manera sistemática y emplear estas etiquetas en una correspondencia biunívoca, pero como no todos sus elementos están diferenciados, etiquetará de la misma manera conjuntos de tres y cuatro elementos (con la designación cardinal «3») (Baroody y Price, 1983). Incluso cuando un niño tiene que recurrir al empleo de términos no convencionales, la apreciación del principio de unicidad (comprender la función diferenciadora de contar) le impediría escoger términos empleados previamente. Por ejemplo, el empleo sistemático de la secuencia no convencional «1, 2, 3, diecionce» etiquetaría erróneamente conjuntos de cuatro elementos pero al menos los diferenciaría de conjuntos con menos elementos. Por tanto, además de los principios de orden estable y de correspondencia, es importante que los niños sigan el principio de unicidad.

Principio de abstracción. Los niños también deben aprender cómo definir un conjunto para poder contarlo. El principio de abstracción se refiere a la cuestión de lo que puede agruparse para formar un conjunto (Gelman y Gallistel, 1978). A la hora de contar, un conjunto puede estar formado por objetos similares (por ejemplo, bolas: ● ● ●) o distintos (por ejemplo, bolas, estrellas y palos: ● * --). Para incluir elementos distintos en un conjunto, el niño debe pasar por alto las diferencias físicas de los elementos y clasificarlos como «cosas» (por ejemplo, una bola, una estrella y un bloque se pueden considerar como una, dos y tres *cosas).* En el fondo, cuando creamos un conjunto de elementos distintos encontramos (abstraemos) algo común a todos los elementos.

Principio del valor cardinal. Mediante la imitación, los niños pueden aprender fácilmente la técnica de contar denominada regla del valor cardinal, es decir, basarse en el último número contado en respuesta a una pregunta sobre una cantidad. Sin embargo, el empleo de la regla del valor cardinal no garantiza una apreciación adecuada del valor cardinal en sí (Fuson y Hall, 1983; Von Glasersfeld, 1982). Es decir, no significa necesariamente que el niño se dé cuenta de que el último término designa la cantidad del conjunto y que un conjunto tendrá la misma cantidad si se vuelve a contar después de modificar la distribución espacial de sus elementos. Por ejemplo, un niño deficiente empleaba correctamente la correspondencia biunívoca para enumerar quince objetos, pero empleaba la siguiente secuencia numérica: «1, ...5, 19, 14, 12, 10, 9, 20 ,49, 1,2,3» (Baroody y Ginsburg, 1984). Cuando se le preguntó la cantidad de elementos respondió satisfecho: «¡Tres!» Al parecer, ¡la noción de «tres» no excluía conjuntos cinco veces más grandes!

Los niños pueden construir el principio del valor cardinal reflexionando sobre sus actividades de contar. Cuando, por ejemplo, un niño cuenta una colección de tres juguetes, los desparrama y los vuelve a contar, puede descubrir que una colección conserva la misma designación (cardinal) a pesar de su aspecto («tres»).

Principio de la irrelevancia del orden. Parece que al reflexionar sobre la actividad de contar también se descubre el principio de la irrelevancia del orden «<El orden en que se enumeran los elementos de un conjunto no afecta a su designación cardinal») (Baroody, 1984d). Considérese el caso descrito por Piaget (1964). Un niño --de cuatro o cinco años- contaba una hilera de diez fichas. Como no se daba cuenta de que el resultado sería el mismo, volvió a contar las fichas en dirección contraria y volvió a encontrar que eran diez. Interesado por este resultado, el niño colocó las fichas en círculo, las volvió a contar y volvió a encontrarse con diez. Finalmente, contó el círculo de fichas en dirección opuesta para acabar obteniendo el mismo resultado. Al contar los elementos de varias maneras, este niño descubrió una

interesante propiedad de las acciones de contar: la distribución de los elementos y el orden de su enumeración no tenían importancia a la hora de determinar la designación cardinal del conjunto.

Conceptos de equivalencia, no equivalencia y magnitud

Una vez el niño ha llegado a dominar estos conceptos básicos para contar que se refieren a un solo conjunto, la acción de contar puede aplicarse a contextos más complicados como la comparación de dos conjuntos. También puede emplearse la acción de contar para descubrir que la apariencia no es pertinente para determinar si dos conjuntos son iguales o no. Si un niño cuenta dos conjuntos y los números resultantes son idénticos, puede llegar a la conclusión de que los conjuntos tienen el mismo número de objetos a pesar de sus diferencias en cuanto a aspecto. Es probable que los niños descubran esta noción numérica fundamental jugando con conjuntos pequeños de uno a cuatro elementos. Por ejemplo, los niños pueden etiquetar con la palabra «dos» varios pares de cosas (por ejemplo, bloques o dedos) incluyendo pares naturales de cosas (por ejemplo, ojos, brazos, gemelos). Como el niño puede *ver* en seguida que estos conjuntos compuestos de cosas distintas se corresponden entre sí, pueden llegar a la conclusión de que los conjuntos etiquetados con la palabra «dos» son equivalentes a pesar de las diferencias de su aspecto físico (por ejemplo, Schaeffer *et al.,* 1974). Esta comprensión puede aplicarse posteriormente a conjuntos mayores que el niño no puede comparar visual o mentalmente con facilidad.

Antes de llegar a la escuela, los niños también aprenden que el número puede especificar diferencias entre conjuntos (no equivalencia) y emplearse para especificar «más» o «menos» (ordenar conjuntos según su magnitud). También esto es probable que provenga de jugar con conjuntos de pocos elementos. Por ejemplo, un niño puede encontrarse ante la opción de escoger entre tres cestos con uno, dos o tres caramelos. El niño puede ver fácilmente que 3 es más que 1 ó 2, y que 2 es más que 1. Al contar cada conjunto, se asocian etiquetas numéricas a estas diferencias perceptibles en cuanto a magnitud. Otro niño, por ejemplo, podría contar dos bloques («uno, dos-dos bloques»), luego añadir uno más y llegar a la conclusión de que hay «más». Luego puede volver a contar los bloques «uno, dos tres-¡tres bloques!») y encontrar que ahora, la etiqueta numérica es «tres». A partir de casos repetidos de estos dos tipos de experiencias concretas, un niño puede llegar a la conclusión de que: a) se asocian distintos números a magnitudes distintas; b) el mayor de dos números siempre viene después en la secuencia de contar, y c) cada término para contar es más que el término que le precede en la serie numérica.

Contar con los dedos puede desempeñar un papel clave en este desarrollo del número. Cuando los niños cuentan con los dedos (extendiéndolos mientras dicen «uno, dos, tres...) pueden *ver* que el número de dedos es cada vez mayor a medida que van contando. De esta manera, los niños pueden reconocer que la magnitud va asociada a la posición dentro de la serie numérica. Al contar con los dedos, incluso pueden llegar a darse cuenta de que 2 es 1 (un dedo) más que 1, que 3 es 1 (un dedo) más que 2, etc. En resumen, como resultado de sus experiencias contando conjuntos pequeños con los dedos, los niños pueden aprender reglas de numeración para determinar «cantidades iguales», «cantidades distintas» y «más».

Conservación de la cantidad. Con el tiempo, las reglas numéricas para evaluar la equivalencia, la no equivalencia y la magnitud permiten a los niños poder conservar. Estos criterios numéricos precisos liberan a los niños de tener que depender de indicios perceptivos como la longitud cuando hacen comparaciones cuantitativas. Como resultado, los niños dejan de despistarse cuando una hilera de fichas se alarga o se acorta durante una tarea de conservación de la cantidad. Quizá Paul, que llegó a la conclusión de que su hilera larga (con siete fichas) tenía más fichas que otra, más corta, con ocho fichas, no había tenido experiencias de contar suficientes para comparar con exactitud dos números seguidos. En otras palabras, puede que este preescolar no hubiera aprendido métodos o técnicas numéricos para calibrar la magnitud relativa de dos conjuntos relativamente grandes.

Aun después de haber aprendido reglas numéricas para determinar equivalencias o no equivalencias y hacer comparaciones entre magnitudes, los niños pueden dejar de emplear estas reglas en una tarea de conservación de la cantidad por varias razones. En primer lugar, pueden no pensar en contar y, por tanto, carecen de la base para emplear reglas numéricas. Cuando una hilera se ha transformado físicamente (por ejemplo, alargándola) los niños pueden no estar seguros de la relación inicial de los conjuntos (quizá las dos hileras no eran iguales de entrada). Ante esta incertidumbre, pueden verse abrumados por los indicios visuales de las hileras de longitud desigual, pueden echar mano del criterio perceptivo de la longitud y llegar a la conclusión de que la hilera más larga tiene más (Acredolo, 1982). Puede ser, pues, que los niños que no conservan crean en realidad que alargar una hilera añade algo a la misma. Además, la no conservación sólo es una contradicción lógica si se cree que las dos hileras son iguales al principio, cosa que sin contar y sin números específicos es una proposición dudosa para los niños pequeños. La falta de conservación no implica necesariamente que un niño no pueda razonar lógicamente sobre las relaciones de equivalencia si cuenta y emplea números (Gelman y Gallistel, 1978).

En segundo lugar, y aun si piensan en contar, puede que los niños pequeños no tengan suficiente confianza en sus reglas numéricas para basarse en un criterio numérico en vez de perceptivo (por ejemplo, Gelman, 1982). La tarea de conservación de la cantidad provoca un conflicto entre la regla que tiene un niño para comparar cantidades («Si una hilera es más larga que la otra es que tiene "más") y el desarrollo de una regla basada en contar («Si se cuentan dos hileras y tienen la misma etiqueta numérica, es que tienen cantidades iguales»). Un niño pequeño puede resolver el conflicto simplemente recurriendo al criterio perceptivo familiar para él. Un niño con algo más de experiencia puede verse dividido entre los dos criterios y responder de manera incoherente.

Tarde o temprano, los niños resuelven el conflicto ideando una regla nueva y más sofisticada que integra la regla numérica y la basada en la percepción. En el fondo, la nueva regla especifica: «Si una hilera es más larga que otra, puede tener una cantidad mayor *a menos que* al contar se obtenga la misma etiqueta numérica, en cuyo caso se trata de hileras con la misma cantidad.» Básicamente, los niños parecen resolver el conflicto cognoscitivo reorganizando la información existente para darle una forma más sistemática. De esta manera, los niños pueden continuar empleando indicios perceptivos cuando las diferencias son evidentes (por ejemplo, distinguir entre un conjunto de seis velas y otro de dos) (Zimiles, 1963). En casos en que las diferencias no son claras (por ejemplo, dos colas para el cine en donde una de ellas es larga pero con los integrantes separados y la otra es corta pero con los integrantes mucho más agrupados), la regla indica la necesidad de contar y realizar un juicio numérico.

Otros niños ni siquiera tienen que contar para conservar. Dan por sentada la conservación de la cantidad. En realidad llegan a pensar que es extraño que un adulto plantee una pregunta cuya respuesta es tan obvia. A partir de experiencias repetidas de contar, saben que si no se añade ni se quita nada a dos conjuntos equivalentes, esta equivalencia permanece constante por mucho que varíe la distribución espacial (Lawson, Baron y Siegel, 1974). Es decir, tarde o temprano los niños infieren una regla de equivalencia relativamente *abstracta* basada en una correspondencia biunívoca que complementa sus reglas de equivalencia, más concretas, basadas en números específicos (Gelman y Gallistel, 1978).

En realidad, hay muchos datos que indican que la regla abstracta de equivalencia/no equivalencia se desarrolla en los niños a partir de su experiencia concreta de contar. Los niños pequeños suelen ponerse a contar como base para realizar sus juicios sobre la conservación de la cantidad (por ejemplo, Gelman, 1972). Además, la enseñanza o el desarrollo de técnicas de numeración precisas facilita la adquisición de la conservación de la cantidad (Bearison, 1969; LaPointe y O'Donnell, 1974; Starkey y Cooper, 1977). Ciertamente, parece que los niños pequeños suelen pasar por una etapa en la que se basan en contar para conservar (conservación con «verificación empírica») antes de conservar por comprensión (conservación con «certeza lógica» (Apostel, Mays, Morf y Piaget, 1957; Greco, Grize, Papert y Piaget, 1960; Green y Laxon, 1970).

Así pues, según el punto de vista centrado en la manera de contar, la experiencia de contar es la clave para hacer explícitas y ampliar las nociones intuitivas de equivalencia, no equivalencia y orden de magnitud (Baroody y White, 1983). Como vimos en el capítulo n, incluso los niños de seis meses pueden inspeccionar visualmente y determinar de manera intuitiva si unos conjuntos pequeños (hasta cuatro elementos) son equivalentes o no. Contar proporciona etiquetas verbales que pueden adjuntarse a estos conjuntos pequeños. Es la experiencia de contar lo que proporciona la base para formular reglas numéricas explícitas y, posteriormente, reglas más abstractas (basadas en la equivalencia) para razonar en torno a las relaciones numéricas existentes entre cantidades mayores. Por tanto, al principio los niños suelen depender de contar para averiguar relaciones de equivalencia como la representada por la tarea de conservación de la cantidad, y sólo después dependen de reglas relativamente abstractas. En pocas palabras, parece que contar es, más que igualar, la vía natural de los niños para llegar a comprender las relaciones de equivalencia, no equivalencia y orden con números no intuitivos.

Conceptos aritméticos básicos

Mediante las experiencias de contar, los niños también descubren qué hace cambiar un número. Si los cambios de orden o distribución no alteran el valor cardinal de un conjunto, ciertos tipos de transformación sí que lo hacen (por ejemplo, añadir o quitar objetos). Cuando los niños llegan a ser competentes en la enumeración o pueden captar directamente[1] pautas numéricas, están preparados para darse cuenta de relaciones aritméticas importantes. Un niño puede determinar o ver con rapidez que añadir un bloque a otro es «dos» y que añadir otro más hacen «tres», etc. (Baroody y White, 1983; Ginsburg y Baroody, 1983, y Van Glasersfeld, 1982). De manera similar, un niño puede determinar o ver en seguida que si se quita una galleta de un conjunto de tres, quedan dos. No hay más que una fina línea entre contar y aumentar o disminuir en una unidad.

Descubrir los efectos de añadir o quitar una unidad depende de unas técnicas numéricas eficaces.

1 *Subitize* en el origina!. Se trata de un neologismo que podría traducirse literalmente por «subitizar»/ «subitización» (derivado de súbito) y que, en ocasiones, se ha traducido por «repentizar»/ «repentización». Dado que significa captar directamente el número de puntos que tiene un estímulo visual no estructurado sin tenerlos que contar, se traducirá por «captar [directamente]»/«captación [directa]». (N. del T.)

A partir de sus experiencias informales de contar, los niños construyen conceptos aritméticos básicos, pero generales. Más concretamente, como resultado de sus experiencias informales los niños consideran la adición como un proceso aumentativo (añadir algo a una cantidad dada) y la sustracción como un proceso de disminución (quitar algo de una cantidad dada). Por ejemplo, cuando Aaron empezaba a asistir al jardín de infancia se le preguntó cuánto pensaba que eran cuatro y cinco (4 + 5). Replicó: «Si lo tuviera que adivinar, diría que cuatro o cinco. Espera, éstos *son* los números. Seis o siete.» como consideraba que la adición era un proceso aumentativo, Aaron sabía que dar uno de los sumandos como resultado no estaba bien.

A causa de su concepto informal de la adición, Aaron reajustó su cálculo mental para que, al menos, fuera algo mayor que cinco.

Consideremos también la reacción de unos preescolares a la tarea de la «sesión de magia» desarrollada por Gelman (Gelman, 1972; Gelman y Gallistel, 1978). La primera etapa de la tarea establece la importancia de un número determinado. Se enseñan a un niño dos bandejas con distintas cantidades de figuras de plástico (por ejemplo, una bandeja con tres ratones y otra con cuatro). A continuación, el examinador señala una de las bandejas (por ejemplo, la que tiene tres ratones) y la designa como «la ganadora». Aunque no se les indica que lo hagan, los niños suelen contar o darse cuenta de la cantidad de ratones en las bandejas. Las bandejas se colocan detrás de una pantalla, se tapan, se mezclan y vuelven a mostrarse al niño. Entonces, el niño trata de escoger la ganadora. Si destapa la no ganadora (por ejemplo, la bandeja con cuatro ratones) se da al niño otra oportunidad y, naturalmente, encuentra la ganadora. Este proceso se repite hasta que el niño espera encontrar a la ganadora, si no en el primer intento, seguro que en el segundo.

La segunda etapa de la tarea mide la reacción del niño a varios tipos de transformaciones. A veces el examinador realiza transformaciones tras la pantalla que no afectan a la cantidad: cambia la posición de las figuras (por ejemplo, coloca en formación triangular tres ratones que estaban en fila), altera el color de un objeto, o sustituye un ratón por un objeto diferente. A veces, realiza en secreto transformaciones pertinentes para la cantidad: añadir o sustraer figuras de la bandeja ganadora (por ejemplo, añadir otro ratón de juguete a la bandeja de tres para que ninguna bandeja sea la ganadora).

Luego se registraba la reacción de los niños a estas transformaciones pertinentes y no pertinentes para la cantidad. Los niños ignoraban la transformación no pertinente para la cantidad: la ganadora (por ejemplo, «tres») seguía siendo la ganadora. Sin embargo, los niños se sorprendían mucho cuando destapaban las dos bandejas y no podían encontrar la ganadora. Cuando se les preguntaba qué había ocurrido, los niños decían que se había añadido (o quitado) algo a la bandeja ganadora. Cuando se les preguntaba cómo podría arreglarse la situación, los niños indicaban que debía quitarse la figura sobrante (reponerse la figura que faltaba).

Puede que estas pautas de respuesta no parezcan un logro extraordinario a ojos de un adulto, pero indican la existencia de unas aptitudes importantes en los niños de preescolar. A pesar 'de que un niño puede no conservar la cantidad, el éxito en la tarea «mágica» implica una comprensión de las transformaciones que son o no importantes para variar la cantidad (por ejemplo, la adición y la sustracción varían la cantidad y una nueva distribución no lo hace) al menos con números familiares. Además, parecen comprender que la adición y la sustracción son operaciones inversas: la una deshace la otra. Por tanto, aun los niños pequeños que no conservan tienen alguna comprensión de la aritmética y pueden, dentro de ciertos límites, razonar lógicamente sobre las relaciones numéricas.

El papel del reconocimiento de pautas

La «captación directa» implica el reconocimiento automático de pautas numéricas (por ejemplo, identificar sin contar que ∴ ó ∴ son «tres»). El lugar del reconocimiento automático de pautas numéricas en el desarrollo del número es una cuestión que todavía queda abierta. Algunos teóricos (por ejemplo, Klahr y Wallace, 1973; Von Glasersfeld, 1982) indican que los niños pueden captar directamente pequeñas cantidades antes de poder contar. Desde el punto de vista de Piaget, los niños muy pequeños reconocen simplemente una *pauta completa.* Por ejemplo, ∴ se considera una configuración global que se asocia a «tres»; • • • se considera una configuración global distinta que simplemente también se asocia a «tres». Ninguna de estas «totalidades» se reconoce como una colección de elementos que se pueden contar, es decir, una colección compuesta de unidades (elementos individuales). Desde este punto de vista, la captación directa no implica una comprensión del número. Los niños no reconocen simultáneamente una pauta numérica como una totalidad (una unidad en sí misma) y un conjunto de partes (unidades individuales) hasta que llegan al estadio del pensamiento operacional. Con este logro intelectual, un niño puede contemplar el número y las pautas numéricas como una unidad compuesta de unidades (por ejemplo, Steffe, Von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983).

Según otro punto de vista, contar precede a la captación directa (Beckmann, 1924). En otras palabras, los niños aprenden a enumerar colecciones correctamente antes de poder reconocer conjuntos con precisión y rapidez. En realidad, hay algunas evidencias (por ejemplo, Baroody y Ginsburg, 1984; Gelman, 1977) que indican que el reconocimiento automático de las pautas numéricas suele desarrollarse después de una intensa experiencia de contar objetos. Esto puede ser especialmente cierto para niños deficientes (Baroody y Ginsburg, 1984). Desde este punto de vista, incluso los preescolares pueden reconocer que el número y las pautas numéricas son, a la vez, una colección completa y un compuesto de partes individuales, es decir, una unidad compuesta de unidades.

En cualquier caso, los dos modelos indican que la captación directa es una técnica fundamental en el desarrollo de la comprensión del número por parte del niño. Cuando los niños pueden reconocer automáticamente una pauta, pueden descubrir aspectos importantes del número. Por ejemplo, un niño que tome tres objetos con una distribución triangular y los coloque en fila, y reconozca que tanto • • • como • • • son casos de «tres», puede formular de manera explícita o implícita el siguiente principio: «La distribución de las canicas no varía la cantidad de canicas que tengo.» La captación directa también puede desempeñar un papel esencial en el aprendizaje de reglas numéricas para apreciar equivalencias. Si a un niño se le muestran grupos de tres elementos con una distribución triangular y en hilera, y. puede reconocer inmediatamente que ambos conjuntos son «tres», puede inferir que dos conjuntos pueden tener la misma cantidad aun cuando tengan aspectos distintos (Von Glasersfeld, 1982).

B) IMPLICACIONES EDUCATIVAS: DIFICULTADES CON LOS NUMEROS y SOLUCIONES

Cuando tienen la edad de entrar en la escuela, los niños son muy expertos en contar (Gelman y Gallistel, 1978; Gelman y Meck, 1983). Prácticamente todos parecen dar por sentados los diversos principios que subyacen a contar o que lo rigen: los principios de orden estable, de correspondencia, de unicidad y de abstracción. La mayoría hasta parece apreciar el principio relativamente sofisticado de la irrelevancia del 'orden. Esto no ocurre con los niños muy pequeños o deficientes. Estos niños, por ejemplo, pueden no decir los números siguiendo un orden coherente. Un error mucho más común es decir los primeros números en el orden correcto y luego «soltar» otros términos sin orden ni concierto. Por ejemplo, un niño podría empezar sistemáticamente con «1, 2, 3» y luego seguir con «6, 8, 12, 9» una vez y con «12, 3, 6, 6», la siguiente. Nótese que en el segundo caso aparecen términos repetidos. «Tres» ya se había empleado en la primera parte correcta, y «seis» se emplea dos veces seguidas para terminar la cuenta. Esta manera de contar no sólo viola claramente el principio de orden estable, sino también el principio de unicidad. (Aunque decir términos sin sentido y repetir otros no cumple los principios de orden estable y de unicidad, estos errores no siempre indican *necesariamente* que estos principios no se conozcan. Por ejemplo, los niños pueden conocer estos principios, pero olvidarse de que ya han usado un término previamente).

Si los niños no han tenido la oportunidad de descubrir estos principios, se les deben brindar abundantes experiencias de contar, sobre todo en el contexto de juegos o actividades de interés. En realidad, puede ser útil presentar estos principios explícitamente (por ejemplo: «Cuando contamos cosas, debemos comprobar que decimos los números de la misma manera cada vez» o «cuando contamos cosas, debemos comprobar que usamos un número *nuevo* para cada cosa que señalamos»). También podría ser útil discutir historias como las del ejemplo 7.1 o las que aparecen regularmente en los programas infantiles de televisión como «Barrio sésamo».

Ejemplo 7.1. Historias para contar

Una vez y sólo una

Cuentamal estaba muy contento. Corría y daba saltos por todo el castillo. ¡Pronto era su cumpleaños y quería organizar una gran fiesta! El cocinero vino a preguntarle cuántas personas iba a invitar para poder hacer comida y pasteles para todos. Cuentamal sacó su lista de invitados y empezó a contar los nombres que había en ella. Aunque había perdido la cuenta de los nombres que había contado, Cuentamal siguió contando. Le salieron 27. Entonces volvió a contar para asegurarse y le salieron 22. Estaba muy confundido. El cocinero le dijo que no podía preparar la fiesta hasta que no supiera cuánta gente iba a venir. ¡Pobre Cuentamal! Se sentó con la cabeza entre las manos. Justo en aquel momento, su hermano Cuentabién acababa de llegar de visita. «¡Eh! ¿Qué te pasa? ¿No estás contento por la fiesta que vas a dar?», le preguntó. Cuentamal le respondió: «Pues sí que lo estaba, pero no puedo saber cuánta gente va a venir. Cada vez que cuento me sale un número diferente.» Cuentabién tomó la lista y dijo a su hermano que podrían contar juntos. Sacó un rotulador mágico y empezaron a contar la lista desde el principio. Cada vez que contaban un nombre, Cuentabién le ponía una marca. De esta manera, contaron cada nombre de la lista sólo una vez. ¡Había 25 nombres! Cuentamal se fue corriendo a decírselo al cocinero.

El orden no importa

Cuentamal había planificado un día muy divertido, pero no se atrevía a salir de la cama y bajar las escaleras. La mañana anterior había contado los escalones cuando había bajado a desayunar y le habían salido 10. Pero cuando volvió a subir para dormir, había contado 11. Si había menos escalones al bajar que al subir, ¡a lo mejor hoy se iba a dar un tortazo! Así que se quedó sentado mirando cómo salía el sol. Era un día muy hermoso. El cocinero se acercó al pie de la escalera y le gritó que su desayuno se estaba enfriando. Sus amigos también se acercaron para decirle que se iban de excursión. Pero Cuentamal no quería bajar y todos se fueron. Entonces llegó Cuentabién y subió corriendo escaleras arriba para preguntar a su hermano Cuentamal si le pasaba algo. Cuando oyó que Cuentamal tenía miedo de caerse por las escaleras, Cuentabién exclamó: ¡No puede ser! ¡Las escaleras tienen el mismo número de escalones tanto si subes como si bajas!» Arrastró a Cuentamal fuera,de la cama y lo llevó hasta las escaleras. Cuentamal estaba asustado, pero daba gracias a su hermano por arriesgarse a caer. Cuentabién bajó por las escaleras contando cada escalón: «¡10!» Luego volvió a subir contando otra vez los escalones, y también le salieron 10. «Es la misma escalera, así que tiene el mismo número de escalones», dijo Cuentabién. Cuentamal se puso a dar saltos de alegría, dio miles de gracias a su hermano, y bajó corriendo las escaleras para salir del castillo y pillar a sus amigos para ir con ellos de excursión.

Estas historias fueron escritas en colaboración con Cathy A. Mason.

Equivalencia, no equivalencia y «más que»

Los niños aprenden a basarse en contar o en captar directamente para determinar «cantidades iguales» *(equivalencia)* y «cantidades distintas» *(no equivalencia)* bastante pronto, al menos con números pequeños. Si los niños no emplean espontáneamente el número para definir equivalencias y no equivalencias, suelen tener bastantes dificultades con estas tareas. Después de comprobar que un niño posee técnicas numéricas precisas, puede ser útil indicar explícitamente cómo puede usarse el contar para determinar «igual que», «distinto de» y «más que». Esto puede hacerse en el contexto de juegos como los descritos en el ejemplo 7.2. Se ha empleado con éxito juegos como la Lotería con niños deficientes (Carison y Werner, 1943; Descoeudres, 1928).

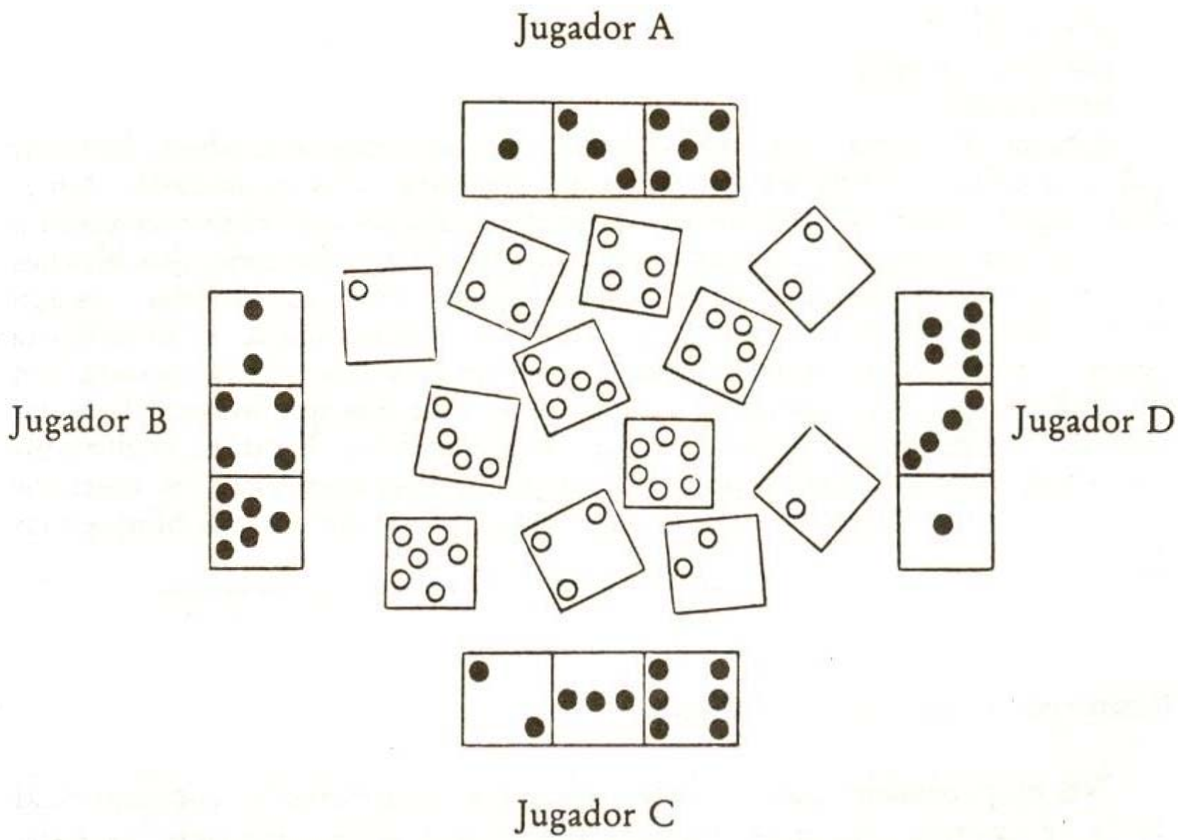
Ejemplo 7.2 Juegos para enseñar los conceptos de equivalencia, no equivalencia y orden

LOTERIA

Objetivo:

Equivalencia y no equivalencia. *Material:*

1. Tableros para cada jugador.
2. Cuadrados con distintas cantidades de puntos.



Instrucciones:

Cada jugador toma un tablero con, por ejemplo, tres pautas numéricas (véase la figura). Por turnos, los niños tratan de encontrar un cuadrado que tenga la misma cantidad de puntos que una de las pautas numéricas de su tablero. Si se encuentra un cuadrado, se coloca encima de la pauta numérica correspondiente. El primer jugador que complete su tablero (tapando todas las pautas numéricas) gana la partida. Cada vez que empieza un turno, todos los jugadores pueden Jugar a la vez. Con esto se elimina la ventaja de ser el primero en jugar, y se permite que pueda haber más de un ganador.

DOMINO DEL MISMO NÚMERO

Objetivo:

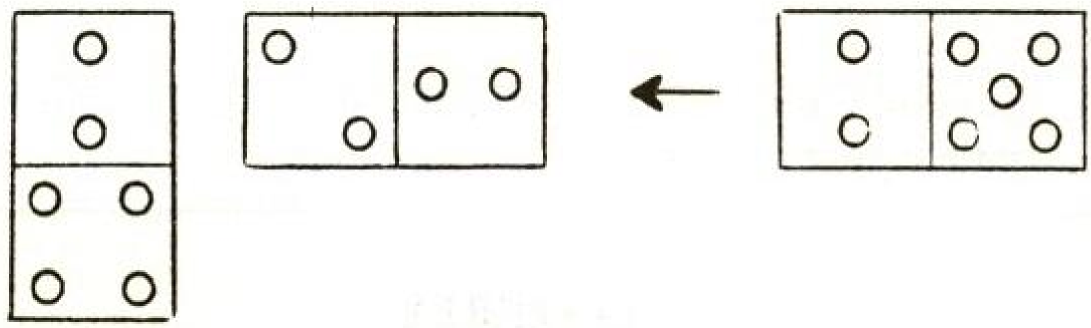
Equivalencia y no equivalencia.

Material:

Fichas de dominó.

Instrucciones:

Este juego es una adaptación del juego de dominó descrito por Carrison y Werner (1943) y Wynroth (1969-1980). Se colocan las fichas boca abajo. Todos los jugadores toman la misma cantidad de fichas. Sale el jugador que tenga el dos doble. Gana el jugador que coloque antes todas sus fichas. El juego con fichas de dominó normales se ilustra más abajo. Para estimular una mayor dependencia de contar, Wynroth (1969-1980) usa fichas cuyos puntos presentan una distribución irregular para que el reconocimiento de las pautas sea menos fácil.



LA ESCALERA

Objetivo:

1. La serie numérica como representante de cantidades cada vez mayores (introducción al concepto de orden).
2. El siguiente término de la secuencia numérica es una unidad (o uno), más grande (concepto más avanzado).

Material:

Bloques encajables.

Instrucciones:

Ayudar al niño a construir una escalera con cubos encajables. Emplear cubos de colores diferentes para destacar los incrementos en unidades. A medida que el niño va construyendo la escalera, indicar que el primer escalón sólo tiene un bloque y no es muy grande, que el siguiente tiene dos bloques y es un poco (un bloque) mayor, que el siguiente tiene tres bloques y es aún mayor (un bloque más que dos), etc. Una vez construida la escalera (hasta cinco e incluso 10 escalones) hacer que el niño «suba» por la escalera con *sus* dedos y que vaya contando cada escalón a medida que lo toca. La escalera también puede construirse con una lista numérica. También se debe indicar que, a medida que el niño avanza por la lista numérica, los números (escalones) son mayores (cada número o escalón sucesivo es un bloque más grande).

Conceptos aritméticos básicos

No es probable que se desarrolle una comprensión fundamental de la aritmética sin unas técnicas eficaces y unas experiencias suficientes de contar. Si un niño no ha tenido experiencias de numeración abundantes y precisas, no aprenderá los efectos de añadir un elemento a un conjunto: los incrementos en una unidad varían sistemáticamente la designación cardinal de un conjunto para convertirla en el siguiente número de la serie numérica. Por tanto, la enseñanza de apoyo para la aritmética no debe realizarse hasta que el niño no tenga soltura con las técnicas básicas para contar como la enumeración, la regla del valor cardinal e incluso la separación. Para los niños de educación especial puede ser especialmente útil destacar los efectos de añadir o quitar una unidad en situaciones cotidianas. Por ejemplo, a la hora de desayunar, el maestro puede dar dos galletas a un niño y preguntarle cuántas tendría si se añadiera una más a las dos que ya tiene, o preguntarle cuántas le quedan cuando se ha comido una de las tres que tenía. En el ejemplo 7.3 se presentan varios juegos que implican llevar la cuenta de incrementos y disminuciones en una unidad.

Ejemplo 7.3 Juegos que implican añadir o sustraer una unidad

LANZAMIENTO DE FICHAS

Objetivo:

Sumar de 1 a 5.

Material:

1. Fichas, monedas u otros objetos pequeños que se puedan contar.
2. Bandejas (de colores distintos).

Instrucciones:

El objetivo del juego es lanzar un número determinado de fichas a una bandeja. Cada jugador elige una bandeja de color distinto. Para principiantes, hacer que e! número de fichas a colocar en la bandeja sea 5. Por turnos, los jugadores lanzan una sola ficha. Si un niño tiene éxito, cuando le toca el turno, se le dice: «Tenías tres fichas en la bandeja y ahora tienes una más. ¿Cuánto es tres y una más?» Si un niño es incapaz de encontrar una respuesta, añadir: «Para ver cuántas son tres y una más, cuenta las fichas de tu bandeja.» Gana e! primer jugador que coloque cinco fichas en su bandeja. La dificultad de! juego puede modificarse variando la distancia entre el jugador y la bandeja o aumentando la cantidad de fichas necesarias para ganar.

EL JUEGO DEL MONSTRUO DE LAS GALLETAS

Objetivo:

Restar una unidad.

Material:

1. Montón de tarjetas con 1 a 5 galletas (puntos, círculos o dibujos de galletas).
2. Objetos redondos que se puedan contar.

Instrucciones:

El objetivo de! juego es reunir 10 galletas (objetos que se puedan contar). Por turnos, los jugadores levantan una tarjeta y pueden pillar tantas galletas como indica la tarjeta menos una. Explicar: «Las tarjetas nos dicen cuántas galletas se pueden pillar cada vez. Sin embargo, el monstruo de las galletas siempre se come una cuando las tiene que servir." Cuando un niño, por ejemplo, ha elegido una tarjeta con tres puntos, se le dice: «Ahora tendrías que tomar tres galletas, pero e! monstruo se come una. ¿Cuántas quedan para ti?» Si e! niño da la respuesta correcta, se le dice: «Pues toma dos galletas.» Si no puede responder, hacer que tape uno de los puntos con un dedo y que cuente e! resto. Para algunos niños, puede hacer falta una demostración más concreta: cuando un niño ha sacado tres galletas y e! monstruo se ha comido una, hacer que cuente las que le quedan. Resumir e! hecho diciendo: «Había tres galletas, se han llevado una, y han quedado dos.»

Pautas numéricas y digitales

Cuando llegan a la edad de entrar en la escuela, los niños suelen captar directamente conjuntos de hasta cuatro elementos (Bjonerud, 1960; Gelman, 1977). Algunos niños desfavorecidos y muchos niños deficientes todavía no dominan esta técnica básica (Baroody y Ginsburg, 1984). Captar directamente conjuntos de cinco o seis elementos, o incluso de tres o cuatro, en realidad puede depender de unas técnicas de numeración precisas y unas experiencias de contar abundantes. Por tanto, las deficiencias en estas áreas deben subsanarse antes de pretender que el niño domine el reconocimiento de pautas. El reconocimiento de pautas regulares puede cultivarse mediante juegos con dados.

Para los números del 1 al 5 al menos, muchos niños aprenden espontáneamente pautas digitales automáticas antes de incorporarse a la escuela (Siegler y Robinson, 1982; Siegler y Shrager, 1984). Esta técnica no puede darse por sentada en poblaciones especiales. En el ejemplo 7.4 se detallan varias actividades adecuadas para fomentar el aprendizaje de pautas digitales.

Ejemplo 7.4 Actividades para aprender pautas digitales

HACER TITERES CON LOS DEDOS

Objetivo:

Representación automática con los dedos de los números 1 ala. *Material:*

1. Títeres hechos con canutillos de papel para deslizar los dedos dentro de ellos, o pegatinas con el dibujo de una cara para pegarlas en la yema de los dedos.

Instrucciones:

Mostrar al niño los dedos correctos a levantar colocándole los títeres de canutillo o las pegatinas.

HACER CONTORNOS DE LAS MANOS

Objetivo:

Representación automática con los dedos de los números 1 a 10.

Material:

1. Pizarra.
2. Tiza.

Instrucciones:

Ayudar al niño a levantar los dedos correctos para varios números y a trazar su contorno en la pizarra. Pedirle a continuación que nos muestre varios números con dedos. El niño puede comprobar sus respuestas comparándolas con las formas trazadas o confrontándolas con las nuestras, que deberán tener la forma correcta.

C) IMPLICACIONES EDUCATIVAS: LA NATURALEZA DE LA INSTRUCCION BASICA

Distintos puntos de vista: distintas implicaciones

Los puntos de vista que establecen como requisitos previos la lógica y las técnicas para contar presentan implicaciones educativas sustancialmente distintas. Según la primera, es inútil dedicar directamente los esfuerzos iniciales de la enseñanza al número y a técnicas para contar. Van Engen y Grows (1975) observan: «La noción de que contar es la idea básica de la aritmética ha sido aceptada y favorecida durante mucho tiempo por muchas personas interesadas en la matemática escolar elemental. ¡Contar *no* es la idea más básica de la aritmética! Ideas como la correspondencia biunívoca y "más que" son mucho más fundamentales y, de hecho, son requisitos previos para un desarrollo significativo de contar» (pp. 252-253). Sin los requisitos psicológicos generales, la enseñanza de contar y del número está condenada a carecer de sentido. Por tanto, la enseñanza de la matemática debe fomentar, en primer lugar, el desarrollo de conceptos lógicos y del razonamiento. Según el otro punto de vista, la instrucción inicial debe centrarse directamente en el desarrollo de técnicas y conceptos específicos para contar y estimular su aplicación. En pocas palabras, la cuestión es si la enseñanza de las matemáticas elementales debe impartirse formalmente sobre la base de unos conceptos lógicos más básicos o informalmente mediante el contar.

La matemática moderna. Durante el siglo XIX y la mayor parte del XX, la enseñanza de las matemáticas a los niños pequeños empezaba por contar (Brainerd, 1973). Según Dewey (1898) y Thorndike (1922), por ejemplo, contar debería abarcar la formación matemática inicial del niño. Russell (1917) denunció este enfoque informal. Afirmaba que primero debía enseñarse el concepto lógico de las clases y que el número debía enseñarse después como colofón a estas ideas. El «enfoque cardinal a la enseñanza de la matemática elemental» de Russell acabó tomando cuerpo con «La Matemática Moderna» (Brainerd, 1973).

El enfoque cardinal, o Matemática Moderna, destaca la enseñanza de la teoría de conjuntos. En la figura 7.1 se muestra la primera lección de este enfoque. ¿Qué conceptos se pretenden cultivar con los ejercicios de la página 5? ¿Cuál es el objetivo de los ejercicios de la página 6? ¿Y cuál es el de los de la página 7? Como muestra la figura 7.1, la instrucción inicial se centra en cultivar los conceptos de clase (clasificación e inclusión de clases) y equivalencia (correspondencia biunívoca).

Sin embargo, y como se afirma en el capítulo 11, este tipo de enfoques formales son ajenos a los niños pequeños. Considérese el caso de Aaron, un niño inteligente y vivaz que acababa de empezar el primer curso. El año anterior, yo había seguido su rápido desarrollo de la adición informal. En cuestión de meses ya había llegado a dominar la adición de bloques con sus dedos. Luego continuó inventando procedimientos de cálculo mental. Intrigado por sus avances, le pregunté si le gustaban las matemáticas de este curso. Alzó los hombros sin mucho entusiasmo. Le pregunté qué cosas estaba aprendiendo con las matemáticas.

AARON:	[Sin interés.] Pues no estoy muy seguro. Tenemos que trazar líneas y cosas así.
INTERLOCUTOR:	Oh, comparáis conjuntos para ver si son iguales.
AARON:	Supongo que sí. [Entonces, todo su comportamiento se transformó en una explosión de entusiasmo.] ¿Sabes cuánto son 1.000 más 1.000? ¡Pues 2.000!

INTERLOCUTOR: ¡ Anda! ¿Y eso lo has aprendido en la clase de matemáticas?
AARON: No, ¡pero es que soy muy listo!

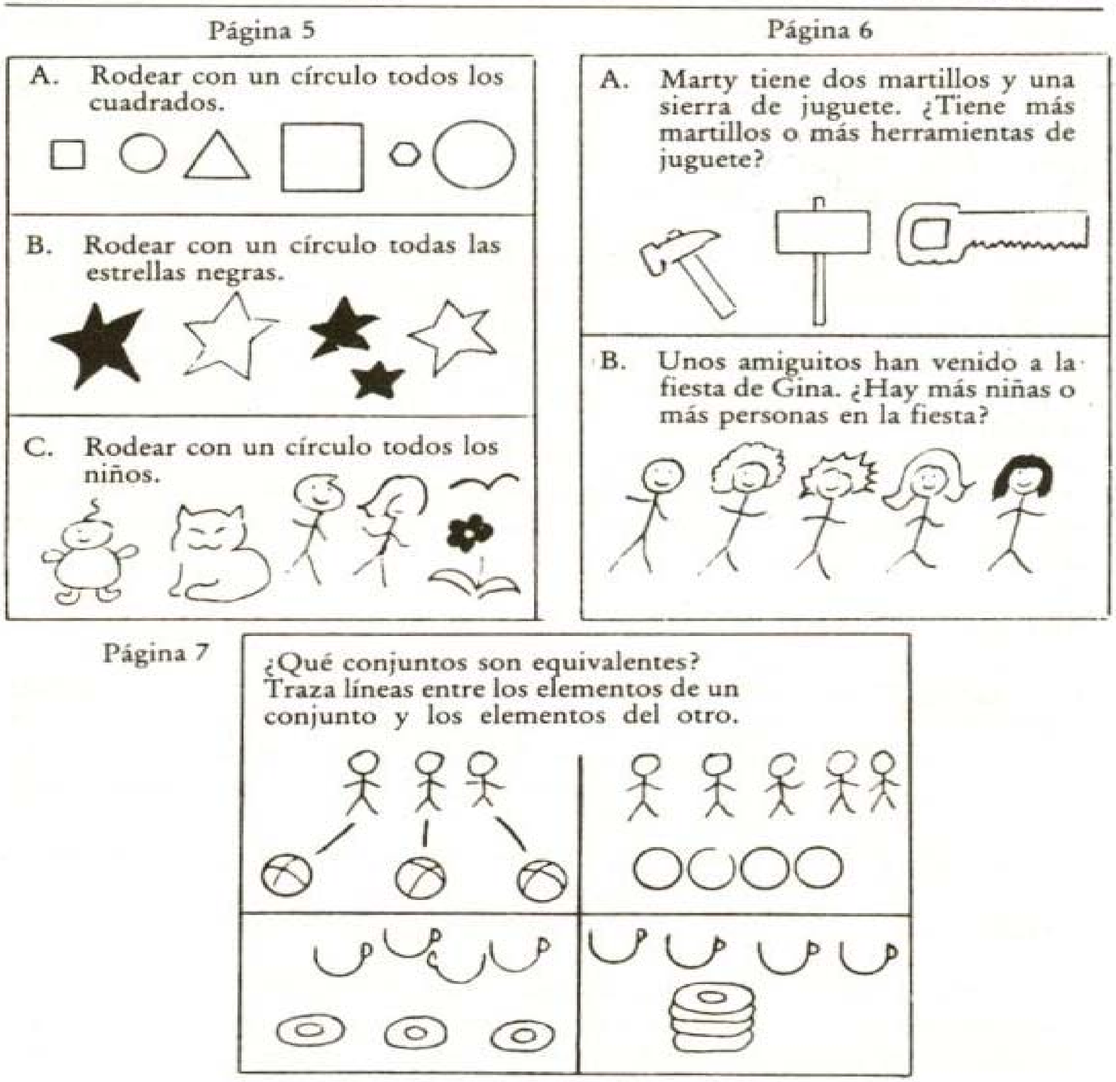
Como Aaron no parecía entender el objetivo de los ejercicios de correspondencias, prestaba poco interés a este enfoque formal. Sin embargo, era capaz de comprender la aritmética básica y ampliar una relación que había aprendido con sumandos de una sola cifra a sumandos de cuatro cifras. Esta observación informal era signifivativa y estimulante para Aaron.

La enseñanza piagetiana. Algunos educadores piagetianos afirman que, como las primeras etapas del desarrollo intelectual limitan la capacidad del niño para comprender el número, la enseñanza inicial de las matemáticas debe estar concebida para fomentar el desarrollo del pensamiento operacional (por ejemplo, Copeland, 1979). Se han diseñado varios currículo s (por ejemplo, Furth y Wachs, 1974; Maffel y Buckley, 1980; Sharp, 1969) con el objetivo general de fomentar la capacidad para el pensamiento general (lógico).

Desde el punto de vista piagetiano, es inútil enseñar el número (contar y la aritmética) directamente. Primero se deben desarrollar los requisitos psicológicos: comprender las clases, las relaciones y la correspondencia biunívoca. Este punto de vista queda reflejado por Gibb y Castañeda (1975) en un anuario del *National Council of Teachers of Mathematics:* «Clasificar [establecer correspondencias] yor-denar son tres procesos que subyacen al concepto de número.... De ahí que la experiencia de clasificar, comparar y ordenar proporcione el fundamento necesario para el nivel más elevado de abstracción necesario para el número» (p. 98). El desarrollo de contar y del significado y los nombres de los números sólo debe darse después de muchas experiencias de clasificación, ordenación y establecimiento de correspondencias (Gibb y Castañeda, 1975).

Figura 7.1. Primeras páginas de un cuaderno de matemática elemental.

Figura 7.1. Primeras páginas de un cuaderno de matemática elemental.



Sin embargo, hay pocos datos que justifiquen este enfoque piagetiano a los inicios de la enseñanza elemental. En realidad, hay datos (Almy, 1971; Dodwell, 1960, 192; Gonchar, 1975; Hood, 1962) que parecen apoyar la idea (Macnamara, 1975) de que el número no depende del desarrollo de la clasificación formal o de técnicas de seriación como describe Piaget. Además, la capacidad de comparar conjuntos contando no depende del dominio de la correspondencia biunívoca (por ejemplo, Wang, Resnick y Boozer, 1971). Los niños pueden aprender mucho acerca de contar, del número y de la aritmética antes de poder conservar (Mpiangu y Gentile, 1970). En realidad, la necesidad de postular estadios para el desarrollo lógico ha sido puesta en duda muy seriamente (véase, por ejemplo, Groen y Kieran, 1982). En resumen, no se ha demostrado empíricamente que sea necesario tener éxito en tareas «operacionales» como la inclusión de clases, la seriación, el establecimiento de correspondencias biunívocas y la conservación de la cantidad para alcanzar una comprensión básica del número, de contar y de la aritmética.

Con todo, es de destacar que la postura de Piaget presenta muchas implicaciones educativas de importancia. Por ejemplo, hace falta una noción elemental de «más que» para el desarrollo del concepto de número y de una manera de contar significativa. Además, el número presenta *a la vez* significados de ordenamiento y de clasificación, y contar implica realmente una correspondencia biunívoca. Sin embargo, es posible que los niños lleguen a alcanzar estos conceptos en su forma *básica* antes de lo que pensaba Piaget y que el número y contar sólo requieran una comprensión informal de estos conceptos. Ciertamente, el desarrollo de una comprensión *más elaborada* y formal de la clasificación, la seriación y la correspondencia biunívoca puede depender, en el fondo, del desarrollo del número y de contar.

Implicaciones curriculares

Es indudable la importancia del objetivo de la Matemática Moderna y de los currículos piagetianos para ayudar a los niños a pensar lógicamente. Razonar en torno a clases y relaciones debe ser un aspecto de los currículos de las matemáticas elementales. Sin embargo, la enseñanza inicial de las matemáticas debería tener en cuenta qué tiene significado para los niños pequeños. Siguen a continuación algunas recomendaciones:

1. Introducir las matemáticas de una manera informal en vez de hacerlo formalmente mediante la teoría de conjuntos. Las definiciones formales de la equivalencia numérica, etc., pueden ser demasiado abstractas para los niños pequeños. Contar ofrece una base concreta y significativa para comprender ideas esenciales como equivalencia, no equivalencia y conservación de la cantidad, especialmente con conjuntos no intuitivos. De hecho, contar puede tener más significado que establecer correspondencias para determinar la equivalencia de conjuntos, sobre todo si tienen más de cinco objetos.

2. No aplazar las experiencias y la enseñanza de contar. Hasta los preescolares parecen estar psicológicamente equipados para empezar a aprender el número. A excepción de las nociones básicas de «más», no hay necesidad de retrasar la enseñanza de contar respecto a técnicas generales como clasificar, ordenar o establecer correspondencias. Es importante enseñar estas técnicas por sí mismas, pero hay pocas razones para creer que sean necesarias para la enseñanza del número y de contar. Tampoco hay necesidad de aplazar la enseñanza de contar, del número y de la aritmética a los niños que no conservan.

3. Fomentar el desarrollo del reconocimiento automático de pautas y de las pautas digitales. A veces se ha desestimado la captación directa por considerada una técnica aprendida de memoria que se obtiene con más facilidad que la enumeración o un concepto numérico (por ejemplo, Strauss y Lehtinen, 1950). El reconocimiento de rautas numéricas desempeña un papel importante en el desarrollo de número y de la aritmética. Se debe instar a los niños a que dominen pautas numéricas regulares como las de los dados. Además, necesitan experimentar con distribuciones irregulares de uno a cinco elementos. Mediante el reconocimiento automático de varias pautas numéricas como casos del mismo número, los niños pueden aprender que el número y los conjuntos equivalentes no se definen por su aspecto. Las pautas digitales también desempeñan un papel importante en el desarrollo del número y, como veremos en el capítulo VIII, en el desarrollo de la aritmética. Por tanto, se debe instar a los niños pequeños a contar con los dedos y emplear pautas digitales.

D) **RESUMEN**

La experiencia de contar es esencial para que los niños desarrollen paulatinamente la comprensión del número y lleguen a dominar aplicaciones numéricas. Salvo en el caso de corregir el aprendizaje de nociones básicas como «más», no hay ninguna razón para aplazar la enseñanza de contar y del número. A partir de experiencias concretas de contar y de reconocimiento de pautas, los niños aprenden que los cambios de aspecto y del orden de contar no afectan al valor cardinal, y que añadir o quitar elementos sí que lo hace. La experiencia de contar es importante para ampliar las nociones intuitivas de equivalencia, no equivalencia y orden. La enseñanza formal y lógica de la teoría de conjuntos es útil por derecho propio, pero la enseñanza del número basada en contar es inicialmente más significativa para los niños.

Aritmética informal

Antes de dominar las combinaciones numéricas básicas, ¿qué procedimientos emplean los niños para calcular sumas, diferencias y productos en problemas con números de una sola cifra? ¿Cómo se explica el desarrollo de procedimientos aritméticos informales? ¿Por qué a los niños les cuestan más unos problemas que otros? ¿Cómo tratan los niños de minimizar, de manera natural, las dificultades del cálculo? ¿Qué problemas suelen encontrar los niños con el cálculo aritmético informal? ¿Cómo se pueden subsanar estas dificultades?

A) BASES PARA LA ADICION y LA SUSTRACCION INFORMALES

Cuando empezaba a asistir al jardín de infancia, Aaron podía calcular rápidamente las sumas de problemas tipo *N* + 1 como 3 + 1 = - y 5 + 1 = -. Para otros problemas, incluyendo los de tipo 1 + *N* como 1 + 3 =__ y 1 + 5 = __, Aaron tenía que emplear objetos concretos para calcular la suma. Tomemos, por ejemplo, sus respuestas durante nuestra cuarta entrevista, realizada en noviembre:

EXAMINADOR:	1 + 7.
AARON:	[Pausa. Luego cuenta para sí: «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7»]. Tengo que hacerla con los bloques. [Primero coloca un bloque, luego siete más, cuenta todos los bloques y expresa la suma correcta].
EXAMINADOR:	2 + 3.
AARON:	[Cuenta rápidamente] 1, 2, 3 [pausa]. Casi lo tengo, pero ya no puedo pensar más. [Primero coloca dos bloques, luego tres más, y cuenta todos los bloques para determinar la suma].
EXAMINADOR:	2 + 4.
AARON:	1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10. Pues no sé... [vuelve a usar los bloques para calcular la suma].
EXAMINADOR:	1 + 3.
AARON:	1, 2, 3, 4, 5 [en voz baja]. [Examinador: Venga, acaba.] Cuatro.

La capacidad de Aaron para sumar mentalmente fue aumentando de manera gradual. Con problemas de tipo 1 + *N,* al principio empezaba a contar a partir del 1 (por ejemplo, 1 + 3: «1, 2, 3, 4»). Hacia la primavera, ya resolvía automáticamente problema de tipo 1 + *N* diciendo el número siguiente a *N* en la serie numérica (por ejemplo, 1 + 3 = «4»). A finales de curso, Aaron había refinado el procedimiento para calcular los resultados de sumas con sumandos distintos de uno: empezaba con el cardinal del sumando mayor y contaba progresivamente a partir de él (por ejemplo, 2 + 6 = *t6;* 7, 8»).

Aaron casi no recibió ninguna enseñanza aritmética formal. ¿Qué explica, pues, su capacidad aritmética informal y sus progresos durante el curso? ¿Por qué tenía que calcular el resultado de problemas 1 + *N* cuando podía determinar inmediatamente el resultado de problemas *N* + 1? En contraste con su soltura en el cálculo de sumas con el auxilio de objetos concretos, sus primeros intentos de cálculo mental no tuvieron éxito. ¿Qué explica la dificultad para desarrollar procedimientos de cálculo menta para problemas 1 + *N* y sumas con sumandos distintos de uno? A lo largo del curso, Aaron inventó espontáneamente nuevos procedimientos de cálculo. ¿Qué motivó este desarrollo?

El fundamento: contar

Como vimos en el capítulo VII, los niños desarrollan una comprensión fundamental de la aritmética mucho antes de llegar a la escuela a partir de sus primeras experiencias de contar. Los conceptos informales de la adición (en tanto que añadir *más)* y de la sustracción (en tanto que quitar algo) guían los intentos de los niños para construir procedimientos aritméticos informales. Por ejemplo, para sumar uno más a tres, muchos niños empiezan contando hasta tres y luego se limitan a contar una unidad más («1, 2, 3; 4»). En realidad, hasta pueden llegar a tratar de abordar problemas más difíciles de la misma manera. Consideremos los primeros intentos de Aaron para calcular mentalmente las sumas de problemas 1 + *N* y de problemas con sumandos distintos de uno *(M + N).* Como consideraba que la adición es un proceso aumentativo, sus intentos iniciales, aunque infructuosos, iban por buen camino. Para 2 + 3, por ejemplo, parecía saber que la suma tenía que ser mayor que dos. Por tanto, en seguida contó hasta dos y luego contó una unidad más (aunque no sabía bien cómo continuar): «1,2,3, ... Casi lo tengo, pero... ».

La soltura con las técnicas para contar permite a los niños resolver mentalmente problemas con «1» muy pronto. Los niños descubren con bastante rapidez que las relaciones entre un número y su siguiente se aplican a problemas *N* + 1 y que las relaciones entre un número y su anterior pueden aplicarse a problemas *N* - 1. De hecho, muchos preescolares pueden usar su representación mental de la serie numérica para resolver problemas con «1» sencillos *(N* + 1 y *N* - 1) como «tres pastelillos y uno más» o «cinco muñecas menos una que te quedas» (por ejemplo, Baroody, 1984a; Court, 1920; Fuson y Hall, 1983; Gelman, 1972, 1977; Ginsburg, 1982; Groen y Resnick, 1977; Ilg y Ames, 1951; Resnick, 1983; Resnick y Ford, 1981; Starkey y Gelman, 1982). En el anterior problema de adición, un niño puede entrar en la serie numérica por el punto especificado por el primer término o sumando (tres) y dar como respuesta el número *siguiente* en la serie numérica: «Cuatro». En el anterior problema de sustracción, un niño puede entrar en la serie numérica por el punto especificado por el minuendo o cantidad mayor (cinco) y dar como respuesta el número *anterior* en la serie numérica: «Cuatro.» Como el empleo de esta representación mental de la serie numérica para determinar respuestas relacionadas con el número anterior o posterior a otro dado es tan automático, muchos preescolares pueden dar mentalmente, y con rapidez, las respuestas a problemas sencillos con «1».

La dificultad relativa de problemas 1 + N

¿Por qué Aaron podía resolver problemas *N* + 1, pero no problemas 1 + *N?* El concepto informal que tienen los niños de la adición puede hacer que los problemas *N* + 1 sean más fáciles de resolver que los problemas 1 + *N.* Como Aaron consideraba que la adición era un proceso aumentativo, interpretaba el problema 3 + 1 = __ como tres y *uno más,* cosa que se puede resolver fácilmente contando («1, 2, 3; 4.,) o empleando las relaciones entre un número dado y el que le sigue («3, 4»). En cambio, interpretaba que 1 + 3 = __ era uno *y tres más,* cosa que *no* se puede resolver fácilmente con estos métodos. En otras palabras, como los niños pequeños consideran que la adición es un proceso aumentativo, pueden presentar la tendencia a considerar que *N* + 1 = __ y 1 + *N* = __ son problemas *diferentes* y la suma consiguiente *no es equivalente.* Por tanto, pueden no darse cuenta de que su método centrado en la relación existente entre un número dado y el que le sigue, que es tan eficaz para responder en seguida problemas de tipo *N* + 1, también es aplicable a problemas de tipo 1 + *N.*

En un momento dado, los niños descubren que las relaciones entre números consecutivos se aplican por igual a problemas de tipo *N* + 1 y de tipo 1 + *N.* Jenny, una niña de jardín de infancia, describió este importante descubrimiento (Baroody y Ginsburg, 1982a). Mientras jugaban a un juego matemático, la niña que se sentaba al lado de Jenny sacó una tarjeta con el problema 1 + 6 = __. Manifiestamente perpleja y desorientada ante este problema, la niña se quedó sin decir nada. Tras una pausa, Jenny se le acercó y le dijo en voz baja: «¡Eh! ¡Que es muy fácil! ¡Siempre que veas un 1, es el número que viene después!» A diferencia de su compañera, Jenny había abstraído una regla general de números consecutivos para problemas con «1»: «La suma de *N* + 1 ó 1 + *N* es el número que sigue a *N* en la serie numérica." Con esta regla general, Jenny podía usar su representación mental de la serie numérica para responder con igual eficacia a problemas de tipo *N* + 1 y a problemas de tipo 1 + *N.*

El desarrollo de una regla general de números consecutivos para los problemas con «1" puede ser un primer paso muy importante hacia una capacidad de cálculo genera más flexible. Por ejemplo, Aaron aprendió primero que podía pasar por alto sin problemas el orden de los sumandos en problemas con «1». Unas semanas más tarde empezó a hacer lo mismo en problemas con sumandos distintos de 1 y calculaba las sumas de tipo *M* + *N* contando a partir del sumando mayor (por ejemplo, 2 + 6: «6; 7, 8»). Además, los niños sólo llegan a considerar la adición como la *unión* o reunión de dos conjuntos de una manera gradual. Desde este punto de vista, el orden de los números carece de importancia: 3 + 2 = 2 + 3. En otras palabras, la unión de un conjunto de tres objetos con otro de dos, tiene el mismo resultado que la unión de dos objetos y tres objetos. Esta concepción «unionista» de la adición es más abstracta que la concepción aumentativa familiar para los niños pequeños. La comprensión de que el orden de los sumandos no altera la suma en los problemas con «1» puede ser un primer paso muy importante hacia una comprensión más profunda de la adición (Resnick, 1983).

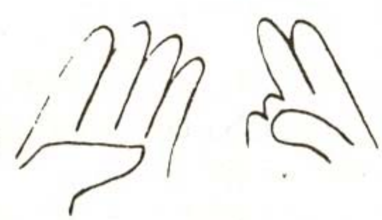
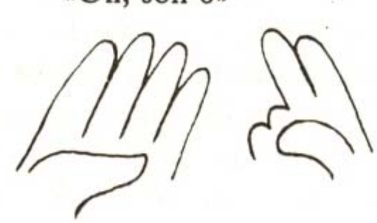
B) **ADICCION INFORMAL**

Procedimientos concretos

Inicialmente, los niños emplean objetos concretos para calcular sumas. A causa de su inJj1ediata disponibilidad, suelen usar los dedos para sumas de hasta 10. Desde el punto de vista de! desarrollo, la estrategia más básica es la cuenta concreta global (CC) que se ilustra en la columna 1 de la figura 8.1. Los bloques (u otros objetos 'que se puedan contar, como los propios dedos) se cuentan uno por uno para representar un sumando; e! proceso se repite con e! otro sumando. Luego se cuentan todos los objetos para determinar la suma.

Invención de atajos. Los niños inventan espontáneamente atajos para el laborioso procedimiento cc. Uno de los favoritos es la estrategia de «pautas digitales» que se ilustra en la columna 2 de la figura 8.1 (Baroody, en prensa). Nótese que, en esta estrategia, cada sumando se representa con una pauta digital. Así se evita e! laborioso proceso de contar los dedos uno por uno para representar cada sumando. Mediante la estrategia de la pauta digital, e! niño sólo tiene que contar una vez (para determinar la suma). La estrategia de «reconocimiento de pautas» (Siegler y Robinson, 1982; Siegler y Shrager, 1984), que se ilustra en la columna 3 de la figura 8.1 es aún más económica. Esta estrategia comporta la creación de pautas digitales

Figura 8.1. Procedimiento concreto para resolver 4 + 2 = __.

Paso	*Cuenta global concreta*	*Estrategia de pautas digitales*	*Estrategia de reconocimiento de pautas*
1	Contar objetos para representar el primer sumando: «1, 2, 3, 4» □□□□	Formar una pauta digital para representar el primer sumando: «4» 	Formar una pauta digital para representar el primer sumando: «4» 
2	Contar objetos para representar el segundo sumando: «1, 2» □□□□ □□	Formar una pauta digital para representar el segundo sumando: «2» 	Formar una pauta digital para representar el segundo sumando: «2» 
3	Contar todos los objetos para determinar la suma: «1, 2, 3, 4 5, 6» □□□□ □□	Contar todos los dedos para determinar la suma: «1, 2, 3, 4 5, 6» 	Reconocer el resultado: «Oh, son 6» 

para cada sumando para, a continuación, reconocer la suma inmediatamente, quizá de manera visual (mediante una captación directa), quizá cinestésica. Para 4 + 5 =__ , por ejemplo un niño puede emplear pautas digitales para representar cada sumando, sentir que se han extendido todos los dedos salvo uno, y responder «9» sin tener que contar.

Hasta los niños deficientes inventan atajos CC espontáneamente para ahorrarse trabajo. Durante veintiuna semanas se observaron unos niños con deficiencias leves y moderadas que se basaban en un procedimiento CC porque lo habían descubierto o porque se les había enseñado. Sin que se les dijera nada, muchos de los participantes en el estudio empezaron a emplear una estrategia de pautas digitales y unos pocos emplearon una estrategia de reconocimiento de pautas para problemas con sumandos muy pequeños. Por tanto, parece que la tendencia a inventar atajos para el cálculo es común a niños con una amplia gama de aptitudes mentales.

Autocontrol, inventiva y flexibilidad. Mediante el control de sus tentativas, los niños pueden adaptar procedimientos existentes a nuevas demandas y, por tanto, pueden inventar nuevos procedimientos. Considérese el caso de Mike, un muchacho de veinte años de edad con un CI de 46. Mike se encontró en una situación normal en los niños: Su procedimiento concreto le iba muy bien siempre y cuando los números fueran pequeños. Para problemas con sumandos de cinco o menos, Mike empleaba un procedimiento de pautas digitales (por ejemplo, para 3 + 5 formaba las pautas digitales para tres y cinco con cada mano y luego contaba todos los dedos). Sin embargo, este procedimiento no puede emplearse con facilidad para problemas como 2 + 8 y 6 + 3, en los que uno de los sumandos no se puede representar fácilmente con una mano.

Pareciendo darse cuenta de las limitaciones de su procedimiento de pautas digitales, Mike lo modificó. Cuando se le presentaban problemas como 2 + 8 y 6 + 3, primero formaba la pauta digital de sumando más pequeño (por ejemplo, dos dedos para 2 + 8). Con un modelo cardinal del sumando más pequeño ya formado, el siguiente paso que daba era empezar desde 1 e ir contando hasta llegar a la designación cardinal de sumando mayor. Por ejemplo, «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8» para 2 + 8. A continuación, Mike simplemente continuaba contando mientras señalaba cada elemento del modelo cardinal creado en el paso anterior (por ejemplo, para 2 + 8: «9 [señalando uno de los dos dedos levantados], 10 [señalando el otro dedo]». La maniobra planificada de antemano por Mike para representar únicamente el sumando más pequeño le permitía enfrentarse a problemas con números mayores.

El procedimiento concreto relativamente sofisticado de Mike toma otras formas ingeniosas. Algunos niños usan modelos cardinales ya presentes en el aula para contar. Otros usan las pautas de las cifras 2,3,4 (por ejemplo, 2 + 4: «1, 2; 3 [señalando la punta superior izquierda del cuatro], 4 [señalando la punta superior derecha], 5 [señalando la punta del medio], 6 [señalando la punta de abajo], 6»). Mientras hacen sus ejercicios de aritmética en clase, algunos niños miran mucho el reloj (por razones distintas a saber cuánto falta para el recreo). El reloj proporciona un modelo para contar (por ejemplo, 2 + 4: «1, 2; 3 [mirando el 1 de la esfera], 4 [mirando el 2 de la esfera], 5 [mirando el 3 de la esfera], 6 [mirando el 4 de la esfera] - 6»). Otros niños hasta pueden llegar a crear un modelo mental para llevar la cuenta. Por ejemplo, para 2 + 4 un niño puede imaginar cuatro puntos en las esquinas de una caja y contarlas «3, 4, 5, 6» mientras «señala» o «mira" los puntos imaginarios. Los procedimientos basados en estos modelos «que se tienen a mano» pueden ser la base para la invención de procedimientos eficaces de cálculo mental (Fuson, 1982).

Además, este control permite a los niños elegir de manera inteligente entre procedimientos informales de adición (Siegler y Robinson, 1982). Kathy, una niña de quince años de edad con un CI de 40, empleaba una estrategia de pautas digitales para problemas como 2 + 3, 4 + 2 y 5 + 4. Cuando se encontraba con problemas como 2 + 8 ó 6 + 3, reconocía inmediatamente los límites de su estrategia digital y, sin que se le dijera nada, pasaba a calcular la respuesta con bloques (volvía al empleo de un procedimiento CC). Además, cuando se le presentaban problemas como 1 + 2 y 3 + 1 (combinaciones que, según pruebas realizadas de antemano, ya sabíamos que conocía), Kathy no continuaba empleando procedimientos concretos mecánicamente (perseveración), sino que respondía de manera automática. Así pues, parece ser que incluso niños con deficiencias mentales importantes controlan su ejecución aritmética y muestran flexibilidad a la hora de elegir procedimientos de cálculo.

Procedimientos mentales

Con el tiempo, los niños abandonan espontáneamente los procedimientos concretos e inventan procedimientos mentales para calcular sumas (Groen y Resnick, 1977). El procedimiento más básico de adición mental es contarlo todo empezando por el primer sumando (CTP) (por ejemplo, 2 + 4: «1, 2; 3 [es uno más], 4 [son dos más], 5 [son tres más], 6 [son *cuatro más]* - 6») (Baroody, 1984a, en prensa; Baroody y Gannon, 1984). La técnica CTP es una invención bastante sofisticada porque no refleja directamente el proceso concreto y global de contarlo todo y comporta la enumeración del segundo sumando *a medida* que el niño cuenta a partir del primero (un proceso de control simultáneo) (Baroody y Ginsburg, en prensa; Carpenter y Moser, 1983).

Llevar la cuenta. Este proceso de llevar la cuenta hace que el cálculo mental de problemas con términos distintos de «1» sea más difícil que el de problemas en los que uno de los términos es «l». Para calcular *N* + 1 ó 1 + *N,* un niño sólo tiene que contar hasta *N* y decir el número que le sigue en la serie numérica (por ejemplo, 1 + 4: «1, 2, 3, 4; [y uno más son] 5»). Con problemas sin «l», el niño debe continuar contando más allá de *N* un número determinado de veces. Un cálculo mental exacto de problemas sin «l» exige métodos previamente planificados para llevar la cuenta. Esto es lo que impedía a Aaron calcular con éxito problemas sin «1» a principios de curso. Con el tiempo, Aaron ideó espontáneamente métodos para llevar la cuenta.

Sobre todo al rrincipio, los niños usan objetos concretos para llevar la cuenta, y el empleo de los dedos es uno de los métodos favoritos (por ejemplo, 2 + 4: <<1, 2; 3 [un dedo extendido es *uno* más], 4 [dos dedos extendidos son *dos* más], 5 [tres dedos extendidos son *tres* más], 6 [cuatro dedos extendidos son *cuatro* más] - 6»). Si un niño puede reconocer automáticamente pautas digitales, el procedimiento para llevar la cuenta requiere poca atención y puede ejecutarse con gran eficacia. Por ejemplo, para 2 + 4, en cuanto ha empezado el proceso de contar el niño se limita a ir contando hasta que «siente» la extensión del cuarto dedo. Conocer la pauta digital para el cuatro dice el niño cuándo tiene que detenerse.

Con el tiempo, los niños pasan de contar objetos a contar cosas menos concretas para llevar la cuenta (Steffe *et al.,* 1983). En realidad, los niños emplean una variada gama de medios (por ejemplo, véase Fuson, 1982). Algunos niños van dando golpecitos con los dedos o el lápiz cuando cuentan. Hasta pueden llegar a explotar pautas como «tac-tac-tac-tac» es cuatro (por ejemplo, 2 + 4: «1,2; 3, 4 [tactac]; 5, 6 [tac-tac] - 6»). Los niños también pueden llevar la cuenta con otra cuenta verbal o subvocal: una doble cuenta (por ejemplo, 2 + 4: «1,2; 3 es *uno* más, 4 son *dos* más, 5 son *tres* más, 6 son *cuatro* más»). Cuando los niños están muy familiarizados con la serie numérica, este proceso de doble cuenta puede llegar a ser extremadamente automático y realizarse mentalmente.

Invención de atajos. Contar a partir del primer sumando (CCP) abrevia el procedimiento CTP al empezar desde el término cardinal correspondiente al primer sumando (por ejemplo, 2 + 4: «2; 3 [+ 1], 4 [+ 2], 5 [+ 3, 6 [+ 4] - 6»), pero *no* reduce el número de pasos necesarios para el procedimiento de llevar la cuenta (Baroody y Ganon, 1984). Tanto el procedimiento CTP como el CPP implican un proceso de cuatro pasos para llevar la cuenta. Como el procedimiento CPP no ahorra mucho esfuerzo, es raro que los niños lo inventen y lo empleen (Baroody, en prensa; Baroody y Ginsburg, en prensa).

Llevar la cuenta es muy exigente en el plano cognoscitivo y se puede aligerar si se empieza por el término mayor. Una estrategia que permite hacerlo es contarlo todo empezando por el término mayor (CTM) (Baroody, 1984a). El método CTM implica contar hasta el cardinal del número mayor a partir de 1 y luego seguir contando mientras se enumera el término menor (por ejemplo, 2 + 4: «1, 2, 3, 4; 5 [+ 1],6 [+ 2] - 6»). Nótese que, al empezar por el término mayor, el proceso para llevar la cuenta en 2 + 4 se reduce de cuatro a dos pasos. Obsérvese también que el método CTM requiere un proceso extra innecesario con el CTP: ver cuál de los dos sumando s es mayor. Los niños adoptan el CTM porque ver cuál de los sumandos es mayor ya se ha hecho automático y exige un esfuerzo inapreciable en comparación con el proceso de llevar la cuenta.

Contar a partir del término mayor (CPM) abrevia el procedimiento CTM ya que se empieza a contar desde la designación cardinal del término mayor y, por tanto, es el procedimiento informal de adición mental más económico (por ejemplo, 2 + 4: «4, 5 [+ 1], 6 [+ 2] - 6»). Durante el cálculo, los niños pueden darse cuenta de que contar el primer sumando es innecesario y basta con enunciar el cardinal que le corresponde (Fuson, 1982; Resnick y N eches, 1984). Como resultado, adoptan el método abreviado de empezar con el término cardinal del sumando mayor en vez de contar a partir de 1. Por tanto, el procedimiento CTM se abandona en favor del CPM porque aún ahorra más trabajo.

Autocontrol, inventiva y flexibilidad. Al igual que con los procedimientos concretos, el autocontrol hace que los niños inventen espontáneamente procedimientos mentales ayudándoles a sentir cuándo hace falta reajustar los métodos existentes. Considérese el ejemplo de Casey, un niño de párvulos (Baroody y Gannon, 1984). En nuestra primera entrevista, Casey se basó exclusivamente en el procedimiento CTP. En la segunda, se le presentó el problema 3 + 6 en una tarjeta. Empezó como de costumbre, contando el primer sumando a medida que iba dando golpecitos en la tarjeta: «1, 2, 3». Esta vez, sin embargo, se detuvo y comentó: «Creo que contaré hasta 6. 1, 2, 3, 4, 5> 6 [pausa] 7, 8, 9.» Al parecer, Casey había previsto la dificultad de que, para llevar la cuenta con su procedimiento CTP, hacían falta seis pasos. Para ahorrarse trabajo, adaptó su método. Empezó por contar el sumando mayor e inventó un procedimiento nuevo, CTM, de más fácil ejecución [1]. Al igual que ocurre con los procedimientos concretos de cálculo, parece que los niños están motivados por la idea de minimizar su esfuerzo cognoscitivo.

1 Podría parecer que si los niños inventan procedimientos de adición que no dan importancia al orden de los sumandos (CTM o CPM) es que comprenden la propiedad conmutativa (por ejemplo, Groen y Resnick, 1977). Sin embargo, Casey no parecía darse cuenta de que 3 + 6 y 6 + 3 eran equivalentes y daban el mismo resultado. En posteriores entrevistas, Casey indicó que 6 + 4 y 4 + 6, por ejemplo, darían resultados distintos (Baroody y Gannon, 1984). Los niños pueden sumar números en cualquier orden porque creen que obtendrán una respuesta *correcta* (aunque no necesariamente la *misma).* Parece que ciertos factores no conceptuales, como el impulso a ahorrar esfuerzo mental, así como algunos conocimientos conceptuales, pueden explicar el desarrollo de procedimientos informales de cálculo.

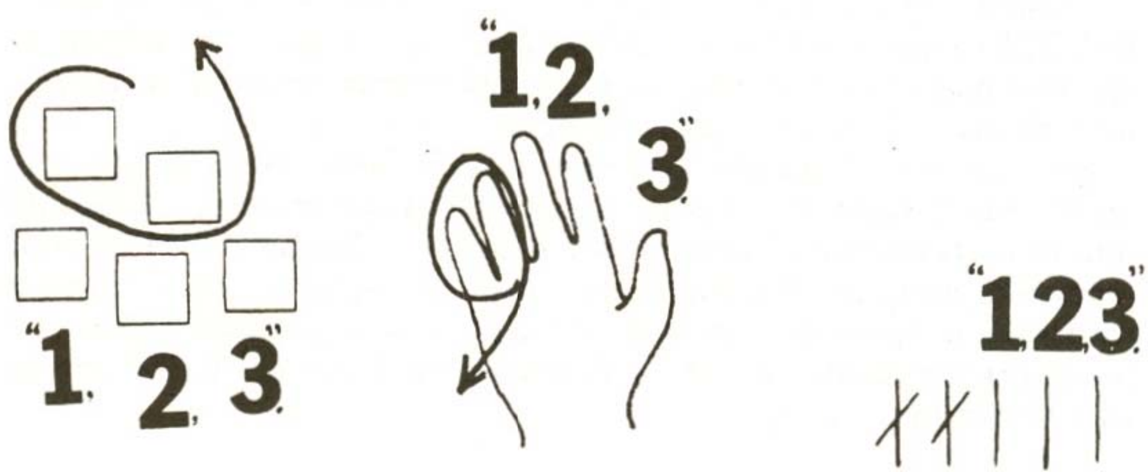
El auto control también permite a los niños escoger de manera flexible entre diversos procedimientos mentales. Casey, al igual que muchos otros niños (por ejemplo, Carpenter y Moser, 1984), no usaba sistemáticamente este procedimiento nuevo y más avanzado. Aunque usaba el CTM con problemas como 2 + 6 = -- , 2 + 8 =__ , y 3 + 6 = _, que comportaban un proceso exigente para llevar la cuenta, continuaba empleando el CTP en problemas como 2 + 4 = _, que exigen un procedimiento para llevar la cuenta menos complicado.

C) SUSTRACCION INFORMAL

Procedimientos concretos

Para problemas con sustraendos (números menores) mayores que uno, al principio los niños emplean modelos concretos que representan directamente su concepto informal de la sustracción como «quitar algo» (por ejemplo, Carpenter y Moser», 1982). Este procedimiento «extractivo» comporta: a) representar el minuendo (el número mayor); b) quitar un número de elementos igual al sustraendo, y c) contar los elementos restantes para determinar la respuesta. Por ejemplo, 5 - 2 implicaría contar cinco dedos u otros objetos (hacer cinco marcas), contar y retirar dos de los elementos (tachar dos de las marcas) y, por último, contar los elementos (las marcas) restantes: «Tres.» (Véase la fig. 8.2.)

Figura 8.2. Estrategia extractiva para la sustracción empleando 5 − 2 como ejemplo.



Se emplean 5 bloques, dedos o marcas, se quitan dos y se cuenta el resto

Procedimientos mentales

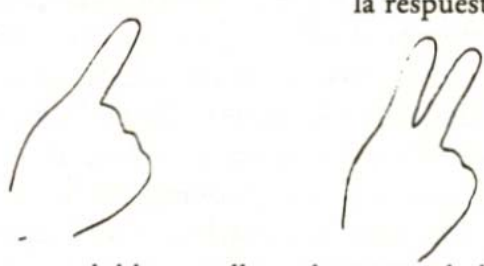
Retrocontar: una ampliación natural del conocimiento existente.

Como ocurre con la adición, cuando los niños están preparados abandonan los procedimientos concretos en favor de procedimientos mentales. Un procedimiento mental muy usual es contar regresivamente o retrocontar, que también parte de una concepción extractiva de la sustracción como ocurría con los procedimientos concretos mencionados anteriormente (Carpenter y Moser, 1982). Retrocontar implica expresar el minuendo, contar hacia atrás tantas unidades como indique el sustraendo y dar el último número contado como respuesta (por ejemplo, 5 - 2: empezar desde 5, 4 [quitando *una],* 3 [quitando *dos]* - la respuesta es «3»). Aunque retrocontar es una amplIación natural del procedimiento mental que emplean los niños para calcular diferencias *N* - 1, es más complicado en el plano cognoscitivo. Para resolver problemas del tipo *N* - 1, el niño sólo tiene que saber qué número viene antes de otro en la serie numérica. Con sustraendos mayores, el niño debe ser capaz de contar hacia atrás un número determinado de unidades desde un punto específico de la serie numérica. Por tanto, retrocontar comporta un método de llevar la cuenta que debe ejecutarse *mientras* el niño va contando hacia atrás (véase la fig.8.3).

Figura 8.3. Dos procedimientos de llevar la cuenta para resolver el problema 5 − 2.

A. Emplear los dedos para llevar la cuenta de las unidades que hay que contar hacia atrás (contar el sustraendo):

«5; 4 (es 1 menos) 3 (son 2 menos): la respuesta es 3.



B. Emplear una cuenta doble para llevar la cuenta de las unidades que hay que contar hacia atrás (contar el sustraendo): «Cinco, si se quita *una* son cuatro, si se quintan *dos* son tres: la respuesta es tres.»

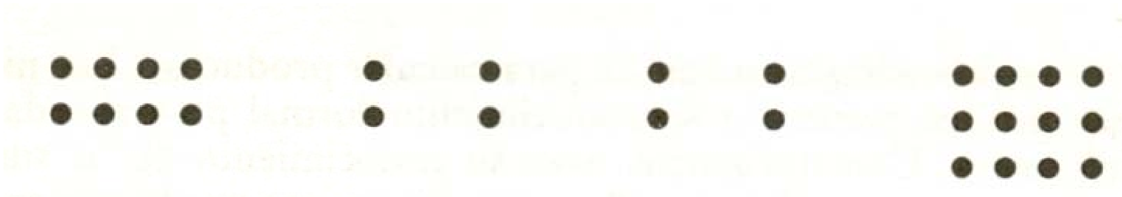
Un procedimiento exigente. El método de retrocontar para la sustracción también es más difícil para los niños que los métodos informales para la adición mental (Baroody, 1984c). Con los procedimientos de adición mental, *tanto* la suma como el proceso de llevar la cuenta son progresivos, es decir, se dirigen hacia *adelante.* En cambio, retrocontar exige contar regresivamente, que es más difícil para los niños pequeños que contar progresivamente (Fuson *et al.,* 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Además, esta cuenta regresiva, ya difícil de por sí, debe ejecutarse *mientras* se ejecuta una cuenta progresiva, es decir, ¡en dirección *contraria!* La naturaleza abrumadora de este procedimiento puede ayudar a explicar la frase que, con frecuencia tan alarmante, está en boca de muchos niños de la primera enseñanza: «No me gustan nada las restas; son mucho más difíciles que las sumas» (Starkey y Gelman, 1982).

La dificultad del procedimiento de retrocontar está relacionada con el problema del tamaño de los números. El tamaño del sustraendo es un factor clave. En el caso de 9 - 2, el proceso de llevar la cuenta es relativamente manejable pues sólo consta de dos pasos («9; 8 [- 1], 7 [- 2] - 7»). En el caso de 9 - 7, sin embargo, el proceso de llevar la cuenta es muy difícil porque consta de siete pasos («9; 8 [- 1], 7 [- 2], 6 [- 3], 5 [- 4],4 [- 5],3 [- 6],2 [- 7], - 2»). Para 19 - 17, el proceso de llevar la cuenta llega a ser prácticamente imposible a causa de los diecisiete pasos que comporta (« 19; 18 [- 1], 17 [- 2], 16 [- 3], ..., 3 [- 16],2 [- 17] - 2»). Además, el tamaño del minuendo puede contribuir a las dificultades de los niños. Para los niños del ciclo inicial, contar hacia atrás desde 20 suele ser más difícil que desde 10 (Fuson *et al.,* 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Por tanto, cuando los niños se encuentran con problemas cuyos minuendos son mayores que 10, los que se basan en retrocontar se ven forzados a emplear una secuencia inversa menos automática y familiar.

El desarrollo de procedimientos flexibles. A medida que en sus tareas de sustracción intervienen números cada vez mayores, los niños deben aprender o descubrir por su cuenta otros métodos de sustracción. En realidad, algunos datos (Woods, Resnick y Groen, 1975) indican que, al principio, muchos niños emplean un procedimiento de retrocuenta y que, más adelante, inventan un procedimiento de cuenta progresiva. Contar progresivamente se parece al enfoque del «sumando ausente", pero aplicado a la sustracción (Carpenter y Moser, 1982). Implica partir del sustraendo y contar hacia adelante hasta llegar al minuendo, al tiempo que se lleva la cuenta del número de pasos dados (por ejemplo 19 - 17: «17, 18 [es uno], 19 [son dos] -la respuesta es dos,,). Aunque contar progresivamente no refleja la noción extractiva informal que tiene un niño de la sustracción, en determinadas circunstancias es cognoscitivamente más fácil que contar regresivamente. Cuando el sustraendo es relativamente grande, como en el caso de 19 - 17, contar progresivamente reduce enormemente las exigencias de la cuenta doble o de cualquier otro procedimiento para llevar la cuenta (dos pasos en contraste con los diecisiete que son necesarios si se cuenta hacia atrás). Cuando el minuendo y el sustraendo están relativamente próximos, como en 9 - 7, contar progresivamente también minimiza el proceso de llevar la cuenta (dos pasos en contraste con los siete necesarios si se cuenta hacia atrás). Sin embargo; cuando el sustraendo es pequeño y el minuendo y el sustraen do están relativamente separados (por ejemplo, 9 - 2), retrocontar tiene ventaja en cuanto a facilidad de ejecución (el proceso de llevar la cuenta consta de dos pasos, mientras que si se contara progresivamente harían falta siete). Cuando llegan a tercer curso, muchos niños descubren esta pauta y eligen el procedimiento más económico en cada caso (Woods *et al., 1975).*

D) **MULTIPLICACION INFORMAL**

Cuando a los niños se les presenta la multiplicación por primera vez, muchos ya han adquirido una base sólida para comprenderla y calcular productos. La multiplicación puede definirse como la adición repetida de términos iguales (por ejemplo, 5 x 3 = 5 + 5 + 5). Como la multiplicación se basa en experiencias de adición familiares para los niños, la asimilan con rapidez. Durante los primeros cursos, los niños se enfrentan muchas veces a sumas de dos o más conjuntos iguales como los siguientes:



Ya han aprendido varios procedimientos para determinar, por ejemplo, el total de tres grupos de cuatro. Pueden contar a intervalos («4,8,12»), hacer cálculos informales + 4 son 4;5,6,7,8 y 8 +4 son 8;9,10,11,12»), emplear sumas conocidas(por ejemplo, «4 + 4 son 8 y 8 + 4 son 12»), o combinar estos métodos (por ejemplo, contar a intervalos y calcular: «4,8; 9,10,11,12»).

Procedimientos mentales

Al principio, los niños se basan en procedimientos informales de contar para calcular productos (por ejemplo, Kouba, 1986). Como explicaba una niña, para calcular 3 X 3 tenía que «contar tres, tres veces» (Allardice, 1978). La mayoría de los niños que acaban de empezar a aprender a multiplicar poseen las técnicas de contar y de llevar las cuentas necesarias para calcular productos mentalmente. Consideremos la explicación que daba un niño para calcular 3 X 3: «Bueno, pues digo e primer número tres en voz alta, luego digo los dos números siguientes en voz baja y luego digo el siguiente en voz alta, así: *tres* [susurrando, 4, 5], *seis* [susurrando, 7, 8], *nueve ... »* (Allardice, 1978, p. 4). De hecho, el procedimiento mental e informal de los niños para la multiplicación implicaba contar tres veces, incluyendo *dos* procesos para llevar la cuenta: a) generar la secuencia numérica; b) llevar la cuenta de cada tercer número, y c) llevar la cuenta de los grupos de tres para determinar cuándo detener la generación de la serie numérica. Un procedimiento mental aún más básico consiste en empezar a contar desde 1 (en vez de empezar desde el valor cardinal del primer término o multiplicando). Este procedimiento básico y los procesos componentes se detallan en la tabla 8.1.

Tabla 8.1. Procedimiento básico de cálculo mental para la multiplicación empleando 4 x 3 como ejemplo

a) Generar números sucesivos a partir de la serie numérica:	1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12
b) Llevar la cuenta de cada cuarto número contado:	1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4
c) Llevar la cuenta del número de grupos de cuatro:	1 2 3
d) Detener la generación de la serie numérica después de completar el tercer grupo de cuatro y dar el último número contado corno respuesta:	12

Para hacer que el cálculo mental sea más manejable, los niños suelen crear un conjunto para representar el multiplicando. Para 4 X 3, por ejemplo, el niño puede emplear una pauta digital para representar el 4 y, a continuación, contar esta pauta tres veces. Mediante el empleo de pautas digitales, el niño elimina la necesidad de llevar la cuenta de cada cuarto número contado. Su experiencia informal previa puede ayudarle de otras maneras. En concreto, los niños pueden darse cuenta en seguida de que contar a intervalos puede servir para la multiplicación (por ejemplo, 5 X 3: «5, 10, 15»). Contar a intervalos es un procedimiento común para calcular productos. Los niños también pueden recurrir a su conocimiento formal para abordar la multiplicación. Con frecuencia, usan su conocimiento de las sumas dobles (por ejemplo, «4 + 4 = 8») para determinar productos en los que el multiplicador es dos (por ejemplo, 4 x 2) o para razonar la respuesta a problemas mayores (por ejemplo, 4 x 3: «4 + 4 son 8, y cuatro más son 9, 10, 11, 12», o 4 x 4: «4 + 4 son 8, es decir, dos cuatros, 8 + 8 son 16, es decir, cuatro cuatros»).

Invención de atajos. Como ocurre con la adición y la sustracción informales, los niños hallan espontáneamente métodos informales para abreviar el cálculo de productos. Incluso los niños con dificultades de aprendizaje pueden ver maneras de emplear los conocimientos que ya poseen para ahorrar esfuerzo en el cálculo. Consideremos el caso de Adam, un niño con dificultades de aprendizaje al que se enseñó un procedimiento concreto para multiplicar (por ejemplo, 4 x 3: hacer tres grupos de cuatro bloques y contar todos los bloques). Casi de inmediato, Adam empezó a abreviar el procedimiento concreto. Por ejemplo, para 6 x 3 sacó tres dedos y, en vez de colocar seis bloques junto a cada dedo, sólo alineó seis bloques frente al primer dedo. Contó la hilera de bloques («1, 2, ... ,6») y luego contó los espacios donde deberían haber estado las otras dos hileras de bloques (<<7, 8, ... , 12», «13, 14, ... , 18»). Pronto empezó a utilizar procedimientos mentales. Para 4 X 3, empleó una suma conocida (4 + 4 = 8) Y se puso a contar a partir de ella (8,9, 10, 11,12). Para 5 X *N,* se dio cuenta enseguida de que podía contar a intervalos (de cinco en cinco) para generar la respuesta.

E) IMPLICACIONES EDUCATIVAS: DIFICULTADES Y SOLUCIONES EN LA ARITMETICA INFORMAL

Más uno y menos uno

Casi todos los niños que llegan a la escuela han tenido experiencias informales suficientes para comprender que la adición es un proceso aumentativo y que la sustracción es un proceso diminutivo. De hecho, Starkey y Gelman (1982) encontraron que casi todos los niños de cuatro años que estudiaron podían resolver problemas de tipo *N* + 1 (con *N* hasta 5) si tenían objetos concretos a mano. Además, muchos niños de cuatro años y la mayoría de los de cinco podían resolver problemas de tipo 1 + *N* (con *N* hasta 5). Más aún, cuando empiezan la escuela la mayoría de los niños poseen una soltura suficiente con las relaciones entre un número dado, el que le precede y el que le sigue, para determinar mentalmente y con rapidez las sumas *N* + 1 (con *N* hasta 5) y las diferencias *N* - 1 (con *N* hasta 5) (Fuson *et al.,* 1982). Cuando llegan a segundo curso, la mayoría de los niños son capaces de generar automáticamente las sumas *N* + 1 ó 1 + *N* y las diferencias *N* - 1 para valores de *N* hasta 10. Sin embargo, el aprendizaje fortuito de los conceptos aritméticos informales básicos y de las técnicas de contar necesarias no pueden darse por sentadas en poblaciones especiales, sobre todo SI se trata de niños deficientes.

1. Asegurar el dominio de la técnica del número siguiente (número anterior) antes de la adición (sustracción) mental de una unidad. Si los niños no pueden determinar automáticamente las relaciones entre un número dado y el que le sigue (el que le precede) no podrán determinar mentalmente y con eficacia sumas de tipo *N* + 1(diferencias *N* - 1). En estos casos, la educación de apoyo deberá centrarse en la técnica de contar necesaria, es decir, en emplear mentalmente y con eficacia la serie numérica para determinar las relaciones entre *N* y el número que le sigue (el que le precede) (Baroody, 1984b). La enseñanza de apoyo deberá instar a los niños a emplear la adición (sustracción) concreta que se examina en las siguientes secciones.

2. Estimular el descubrimiento de una regla general para el número siguiente. Si un niño puede resolver automáticamente problemas *N* + 1, pero no puede hacer lo mismo con problemas 1 + *N*,"' se deben crear oportunidades para que pueda descubrir una regla general para el número siguiente. Una estrategia consiste en darle una serie de problemas de enunciado verbal de manera que a un problema *N* + 1 = __ le siga su contrapartida 1 + *N* =__ (o viceversa). Por ejemplo, se puede hacer que el niño resuelva el problema A que se muestra más adelante y que, a continuación, resuelva el problema B. Cuando el niño haya calculado el problema B, en algunos casos puede ser adecuado preguntarle si ha visto alguna similitud o diferencia entre los dos problemas.

A. Sol tiene tres galletas. Su madre le da otra más. ¿Cuántas galletas tiene en total?
B. Tammy tiene una galleta. Su madre le da tres más. ¿Cuántas galletas tiene en total?

Para practicar aún más, se pueden introducir juegos en los que se empleen dados especiales: un «dado de unos» (con un punto en cada una de las seis caras) y un dado con sólo dos, tres y cuatro puntos en cada cara. El proceso aleatorio de tirar los dados hará que los niños se encuentren con combinaciones 2 + 1 y 1 + 2, 3 + 1 y 1 + 3 y 4 + 1 y 1 + 4, dándoles muchas oportunidades rara ver que cada problema 1 + *N* tienen el mismo resultado que el problema *N* + 1 correspondiente.

Adición

1. Hacer que se adquiera soltura con los procedimientos informales de adición. Aunque muchos niños aprenden un procedimiento concreto para calcular sumas antes de llegar a la escuela (por ejemplo, Baroody, en prensa; Carpenter y Moser, 1984; Lindvall e Ibarra, 1979), no puede darse por sentado que todos los preescolares hayan desarrollado un procedimiento CC, sobre todo si se trata de niños desfavorecidos (Ginsburg y Russell, 1981) o deficientes. Aunque algunos niños sólo requieren una o dos demostraciones para aprender un procedimiento CC, otros tienen dificultades para dominar estos procedimientos aun después de numerosas demostraciones (Baroody, en prensa). La dificultad en el dominio de un procedimiento CC parece estar asociada a la debilidad de técnicas prearitméticas como la comparación de números seguidos. Además, las deficiencias en técnicas básicas de contar impedirán que los niños inventen procedimientos de cálculo más eficaces. La incapacidad de comparar automáticamente dos números seguidos desembocará en la dificultad de adoptar procedimientos que no den importancia al orden de los sumandos (CTM y CPM). Si los niños no conocen de manera automática las relaciones existentes entre un número y el que le sigue, les será difícil aprender procedimientos basados en contar a partir de uno de los sumandos (CPP y CPM). En estos casos, hace falta tener soltura con las técnicas necesarias.

2. Emplear un modelo aumentativo para introducir la adición de manera significativa. La enseñanza de la adición se suele presentar a los niños como la unión de dos conjuntos. Se les enseña un procedimiento CC que refleja más directamente la adición como la unión de dos conjuntos y no como un proceso aumentativo. Para algunos niños, sobre todo los de bajo rendimiento, puede ser más útil presentar la adición con un modelo aumentativo, que es psicológicamente más básico. Es decir, la enseñanza puede empezar con problemas en los que se añaden uno o dos elementos a un conjunto ya existente.

3. Empezar con problemas de números pequeños; introducir problemas con números mayores poco a poco y con cuidado. La enseñanza inicial de la adición debería basarse en sumandos pequeños (del 1 al 5) que se puedan manejar fácilmente con métodos concretos. Esto permite a los niños dominar procedimientos CC e inventar atajos para estos procedimientos y construir una base sólida para avances posteriores. Es mejor introducir problemas con números mayores cuando los niños ya pueden usar con soltura procedimientos concretos con números pequeños. Esto puede ofrecer un aliciente para desarrollar procedimientos de cálculo mental aún más poderosos. Sin embargo, algunos niños pueden verse abrumados ante problemas más difíciles. Por tanto, la introducción de problemas con números mayores debe controlarse con atención.

4. Prever la necesidad de un período largo para el cálculo y el descubrimiento. Si a los niños se les da la oportunidad de emplear objetos para calcular sumas, suelen inventar procedimientos mentales a su propio ritmo. Por ejemplo, Groen y Resnick (1977) enseñaron a unos preescolares un procedimiento concreto para la adición. Después de un prolongado período de práctica y sin que se les enseñara a contar a partir de uno de los sumandos, cerca de la mitad de los niños empezó a usar un procedimiento CPM. Muchos niños con problemas de aprendizaje y algunos niños deficientes abandonan los procedimientos concretos por su cuenta e inventan procedimientos mentales de tipo CPM.

Sin embargo, algunos niños, sobre todo los que tienen problemas, pueden seguir basándose en procedimientos concretos durante mucho tiempo. Es importante dar a estos niños la oportunidad de construir procedimientos más avanzados por su cuenta porque los procedimientos de invención propia tienen más significado para ellos. En algunos casos, puede ser útil demostrar para los niños un procedimiento CPM. Es probable que este tipo de demostración sea más eficaz después de que los niños hayan tenido una amplia experiencia de cálculo con objetos. La enseñanza verbal directa es el método menos adecuado porque es difícil describir un proceso mental como el CPM y las explicaciones sólo pueden servir para confundir a los niños (Resnick y N eches, 1984). En cualquier caso, no aconsejo enseñar a contar a partir de uno de los sumandos antes de mediados del primer curso.

Para facilitar el aprendizaje de procedimientos mentales, el maestro debería crear muchas oportunidades para que los niños realizaran descubrimientos por su cuenta. Una manera interesante de alcanzar este objetivo es jugar a juegos con dados. Cuando los niños se van familiarizando con las pautas de los dados, suelen encontrar sus propios métodos abreviados para determinar la suma de una tirada. Por ejemplo, un niño puede sacar un cuatro (: :) y un dos (˙.). Si el niño reconoce automáticamente la primera pauta ((Vaya, un cuatro») no necesita empezar desde 1 y contar todos los puntos, y puede limitarse a contar a partir de 4: «4, 5 [señalando el primer punto del segundo dado], 6 [señalando el otro punto] -6».

5. La enseñanza de apoyo puede tener que dedicarse explícitamente a impartir un procedimiento para llevar la cuenta. En ocasiones, los niños -sobre todo los que tienen problemas y los niños de educación especial- se encallan en el nivel concreto y parecen incapaces de adquirir procedimientos mentales (especialmente de tipo CPM) (Baroody, Berent y Packman, 1982; Bley y Thornton, 1981; Cruickshank, 1948). En casos extremos, puede ser necesario intervenir directamente para que los niños aprendan procedimientos mentales. Más concretamente, algunos niños pueden necesitar ayuda para aprender un procedimiento de llevar la cuenta. Para enseñar uno de estos procedimientos, es mejor empezar con problemas N + 2 ó 2 +

N y *N* + 3 ó 3 + *N.* Introducir la idea de llevar la cuenta enseñando al niño el procedimiento detallado en el caso de Mike y que se resume a continuación:

A. Hacer que el niño se centre en el sumando menor y haga un conjunto con dedos o bloques (por ejemplo, para 4 + 2, levantar dos dedos).
B. A continuación, hacer que el niño cuente hasta el valor cardinal del sumando mayor («1, 2, 3, 4»).
C. Continuar entonces contando el conjunto más pequeño hecho anteriormente («5 es *uno* más; 6 son *dos* más - seis»).

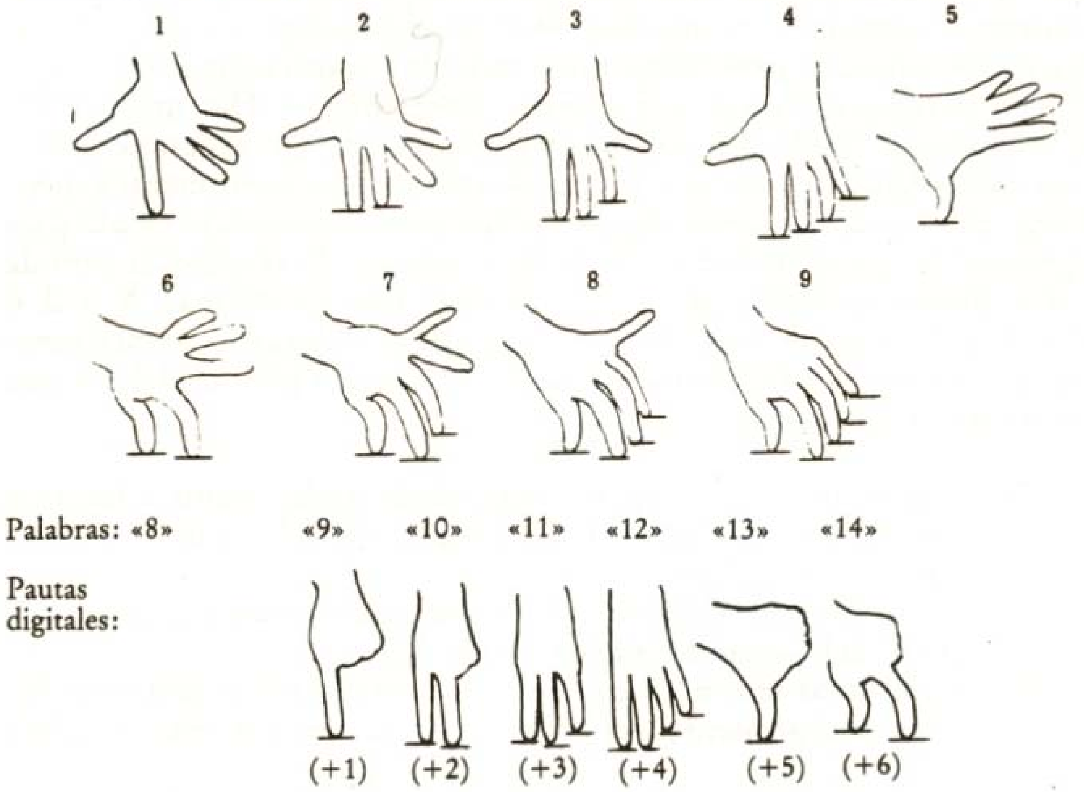
6. Estimular el aprendizaje y el empleo de métodos eficaces para llevar la cuenta. El reconocimiento automático de pautas puede facilitar llevar la cuenta. Deberá estimularse a los niños a que empleen y compartan sus métodos para llevar la cuenta. A los niños que no hayan dominado técnicas de reconocimiento de pautas como las pautas digitales hasta 10, se les deberá estimular para que lleguen a dominarlas.

La eficacia del cálculo mental de los niños suele bajar cuando el segundo sumando de los problemas es mayor que cinco. Como es difícil llevar la cuenta con precisión, los niños suelen calcular mal estos problemas. Si recurren a empleo de pautas digitales, el cálculo puede ser más exacto pero es muy lento. Los niños deben dejar el lápiz, contar, volver a tomar el lápiz y anotar la suma. Fuson (1985) propone el empleo de las pautas digitales *Chisenbop* para que se puedan representar los números del 1 al 9 con la mano que no se emplea para escribir, dejando la otra mano libre para anotar (véase la fig. 8.4). Este método permite a los niños llevar la cuenta de sumandos mayores de una manera natural, emparejando nombres sucesivos de números con pautas digitales.

Algunos niños lentos tienden a olvidar el valor del segundo sumando y, por tanto, pierden la cuenta y no saben cuándo deben parar de contar. En estos casos, Fuson (comunicación personal, 28 de julio de 1986) ha visto que es útil introducir un procedimiento intermedio antes de practicar el procedimiento descrito anteriormente. Este procedimiento intermedio implica crear un medio auxiliar para la memoria: representar el segundo sumando con una pauta digital en la mano que escribe. Entonces, el niño emplea la mano que no escribe para añadir el segundo sumando al primero como se describió antes. Cuando las pautas digitales de cada mano coinciden, el niño para de contar.

Figura 8.4. Empleo de pautas digitales *Chisenbop* para llevar la cuenta.

Pautas digitales de 1 a 9:



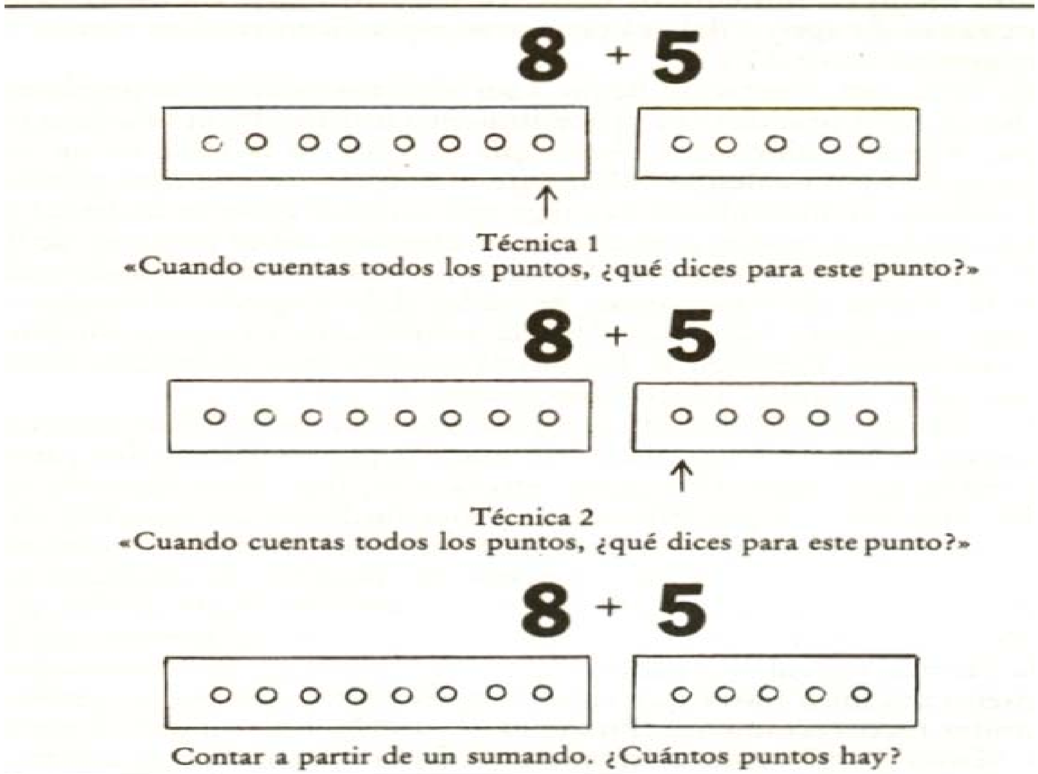
Parar cuando se hace la pauta del 6

Basado en Fuson (1985).

7. La enseñanza de apoyo de procedimientos CPM deberá centrarse, en primer lugar, en las técnicas básicas necesarias. Algunos niños persisten en contarlo todo, tanto si lo hacen mentalmente como si lo hacen concretamente. El procedimiento CPM es una ampliación de la regla para calcular problemas N + 1. Se debe comprobar que los niños puedan realizar automáticamente cálculos N + 1 antes de proseguir con intentos de cultivar el procedimiento CPM para problemas $N + M$, con M mayor de 1. A diferencia de los problemas N + 1, los problemas $N + M$ requieren llevar la cuenta. Si los niños lo cuentan todo mentalmente (empleando los procedimientos CTP o CTM), ya poseen este requisito previo. Si los niños siguen usando procedimientos concretos, necesitan aprender cómo llevar la cuenta.

8. La enseñanza de apoyo de procedimientos CPM deberá centrarse en ayudar al niño a darse cuenta del esfuerzo superfluo. Es probable que la mayoría de los niños no cuenten espontáneamente a partir de uno de los sumandos, porque no se dan cuenta de que contar desde uno hasta el primer sumando produce el mismo resultado que simplemente enunciar la designación cardinal del mismo (Baroody y Ginsburg, en prensa). En la figura 8.5 se muestra un método de enseñanza diseñado por Secada, Fuson y Hall (1983) que suele tener éxito en ayudar rápidamente a los niños a ver que contar el primer sumando desde uno es lo mismo que decir su designación cardinal.

Figura 8.5. Enseñar a contar a partir de un sumando.



Basado en Fuson (1985).

Sustracción

1. Asegurar el dominio de las técnicas necesarias para retrocontar. Si un niño tiene dificultades para calcular diferencias con un sustraendo de dos o más, es posible que tenga problemas para dominar la técnica de retrocontar. En estos casos, .es importante comprobar las técnicas necesarias para hacerlo. En primer lugar, si los niños carecen de soltura para calcular mentalmente diferencias de *N* - 1 (el primer paso en un procedimiento de retrocontar para problemas *N* - *M,* siendo *M* distinto de 1), no serán capaces de restar mentalmente cuando el minuendo sea dos o más. Por tanto, antes de nada es necesario que los niños puedan calcular diferencias *N* - 1 con eficacia .

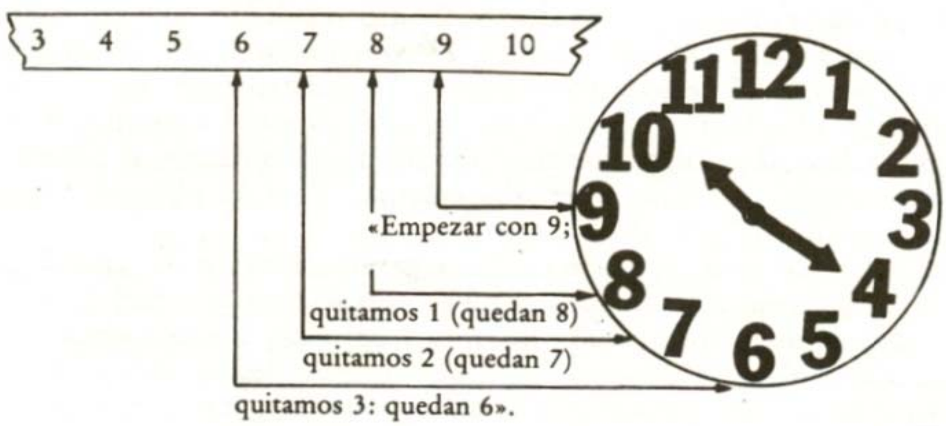
En segundo lugar, si los niños no saben cómo contar hacia atrás, no pueden ampliar su procedimiento mental para restas *N* - 1 Y desarrollar un método genuino para retrocontar. Además, retrocontar no sólo implica contar hacia atrás: también hay que hacerlo con soltura. De no ser así, la tarea de ejecutar simultáneamente dos procesos en direcciones opuestas puede ser abrumadora (Baroody, 1983a). Si la retrocuenta no es un proceso mínimamente automático, la atención se divide entre ella y el proceso simultáneo de llevar la cuenta del sustraendo. Esta atención dividida puede desembocar en un error ~ en el proceso de retrocontar, en el proceso de llevar la cuenta o en ambos. Así, cuando contar hacia atrás constituye un esfuerzo, los niños suelen saltarse algún término (por ejemplo, 19 - 5: «19, 18 [- 1], 17 [- 2], 16 [- 3], 14 [- 4], 13 [- 5] - 13»). Un niño de segundo curso que tenía dificultades con las matemáticas empezó a resolver 19 - 5 contando hacia atrás, pero tuvo que hacer una pausa para pensar qué venía antes de 16. Corno resultado, se perdió en la retrocuenta: <<19, 18 [una menos], 17 [dos menos], 16 [tres menos], esto... , esto ... , 15 [esto ... *tres* menos], 14 [cuatro menos], 13 [cinco menos] - 13». Corno contar hacia atrás le costaba bastante, Adam, un niño de quinto curso con dificultades de aprendizaje, se perdió en las dos cuentas cuando intentaba calcular 19 - 5: <<19, 18, 17, 16, esto..., esto..., 17, 18, 19,20, 21».

Si un niño es incapaz de contar regresivamente o de hacerlo con soltura, la enseñanza de apoyo debe centrarse en esta técnica informal para contar. Corno para los niños del ciclo inicial contar hacia atrás desde 20 suele ser más difícil que hacerlo desde 10, los que emplean este tipo de estrategia pueden no experimentar dificultades de aprendizaje inmediatas y empezar a sufrirlas cuando sus tareas de sustracción incluyen minuendos entre 10 y 20 (o más). En estos casos, la enseñanza de apoyo deberá centrarse específicamente en contar regresivamente entre 20 y 10.

Mientras retrocontar no llegue a ser algo automático, se puede instar a los niños a practicar su procedimiento informal con una lista numérica. Algunos niños descubren que el reloj de la clase es un instrumento útil para calcular. Mediante el empleo de una lista numérica, el niño se ve liberado de la carga que supone generar la difícil secuencia inversa y puede concentrar su atención en el proceso de llevar la cuenta (véase la fig. 8.6). Cuando los niños están llegando a dominar la técnica de retrocontar, *no* se les debe impedir el empleo de modelos concretos. Más bien debería animárseles a emplear su estrategia extractiva. También se les puede instar a que continúen ejercitándose en el dominio de combinaciones *N-1.*

2. Estimular procesos eficaces para llevar la cuenta. Aunque la incapacidad de contar hacia atrás con eficacia puede socavar los procesos simultáneos requeridos para retrocontar, hay otros factores que pueden impedir o imposibilitar este procedimiento tan exigente en el aspecto cognoscitivo. Para retrocontar, los niños deben ser conscientes de la necesidad de llevar la cuenta del número de unidades que deben contar hacia atrás y planificar previamente algún medio para hacerlo (Steffe *et al.,* 1983). Como algunos niños no piensan en llevar la cuenta, no saben cuándo deben detenerse y, en consecuencia, o siguen contando hasta que agotan la secuencia inversa o tienden a responder incorrectamente (Fuson *et al.,* 1982). En realidad, Carpenter y Moser (1982) encontraron que sólo la mitad de la muestra de niños de primer curso que estudiaron podía contar hacia atrás un número especificado de unidades y, como resultado, no solía emplear un procedimiento de retrocuenta. La enseñanza de apoyo puede empezar haciendo que los niños cuenten hacia atrás un número específico de unidades. Se puede empezar contando hacia atrás una o dos unidades e ir aumentando la dificultad paulatinamente. A continuación se debe señalar explícitamente la necesidad de llevar la cuenta cuando se calcula y la manera de hacerlo. (Puede hacerse con modelos concretos como se muestra en la fig. 8.6).

Figura 8.6. Retrocontar con una lista numérica o un reloj para calcular 9 − 3 = ___.



Aun después de aprender un procedimiento para llevar la cuenta, algunos niños se ven obligados a despachar rápidamente el procedimiento de retrocontar (con frecuencia, para evitar el estigma de contar). Esta prisa puede dar como resultado perder la cuenta de uno de los procesos de contar simultáneos o de los dos. En estos casos, debe hacerse comprender al niño que retrocontar es una estrategia inteligente y normal y que la precisión es tan importante como la velocidad. Otro error frecuente consiste en empezar el proceso de llevar la cuenta demasiado pronto con la designación cardinal del minuendo (por ejemplo, 17 - 3: «17

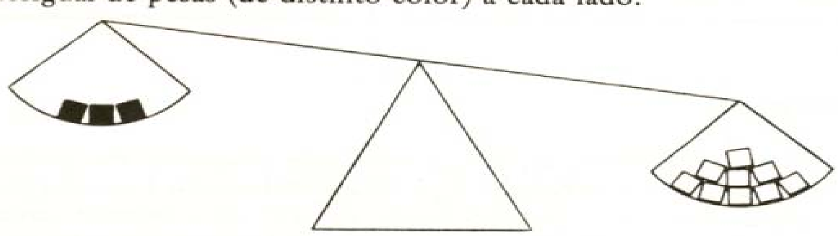
[- 1],16 [- 2], 15 [- 3] - 15»). Este error produce una pauta que se detecta fácilmente: la respuesta del niño suele tener una unidad más que la respuesta correcta. En estos casos, se puede demostrar al niño la estrategia de retrocontar, recalcándole que «el proceso de contar» no empieza desde el número mayor (minuendo).

3. Estimular el desarrollo de contar y de escoger con flexibilidad el procedimiento de cálculo más eficaz. Si los niños se basan exclusivamente en retrocontar, pueden ser precisos con problemas pequeños pero no con problemas grandes. A medida que las tareas implican números mayores, la cuenta regresiva se hace más larga y más proclive al error. Por tanto, podría ser útil estimular al niño a aprender un procedimiento de cuenta progresiva y emplearlo cuando sea más fácil de usar que el procedimiento regresivo. En el ejemplo 8.1 se describe un método para introducir un procedimiento para contar progresivamente. A los niños que ya han descubierto algún procedimiento de este tipo se les puede estimular a que lo discutan y examinen las situaciones donde lo encuentran más útil. Los niños pueden beneficiarse de una enseñanza explícita de la relación existente entre la cuenta progresiva y la regresiva. Sin embargo, se debe tener en cuenta que algunos niños pueden no captar este procedimiento porque no coincide con su noción informa de «quitar». En estos casos, es mejor no insistir. Hacerlo sólo confundiría al niño y éste, a su debido tiempo, ya descubrirá la estrategia por su cuenta.

Ejemplo: 8.1 Enseñar a contar progresivamente: actividad con una balanza

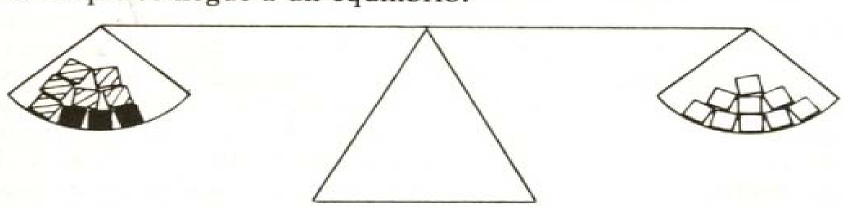
Nivel I: Emplear objetos como soporte concreto.

Paso 1: Como muestra el diagrama adjunto, colocar la balanza con un número desigual de pesas (de distinto color) a cada lado.



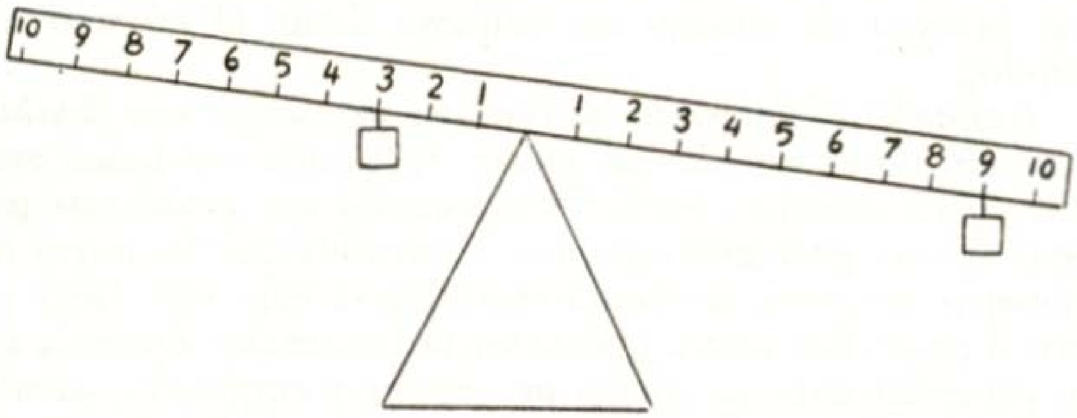
Paso 2: Indicar el número de pesos a cada lado («3» y «9») y pedir al niño que determine cuántas pesas hay que añadir al platillo más liviano (el que tiene tres) para que los pesos sean iguales.

Paso 3: Si el niño necesita ayuda, proponer añadir bloques (si se puede, usar otro color para que haga contraste). Añadir bloques al platillo más liviano hasta que se llegue a un equilibrio.

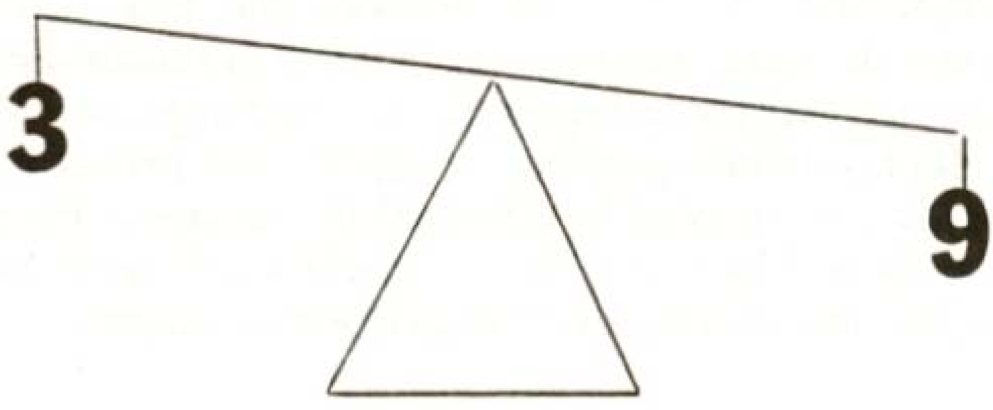


Paso 4: Pedir al niño que cuente cuántos bloques se han añadido al platillo más liviano para igualar los pesos. Más adelante, cuando el niño esté listo, pueden combinarse los pasos 3 y 4. El niño puede ir contando simplemente los bloques a medida que se van añadiendo.

Nivel II: Usar una lista numérica como soporte semiconcreto. Casi siempre es mejor hacerlo cuando el niño ya ha dominado el procedimiento de contar progresivamente mediante objetos concretos. Inicialmente, el niño puede colocar otro peso en varios puntos a lo largo del lado más liviano. Llegado el momento, deberá instarse al niño a contar simplemente de 3 a 9 en la lista numérica.



Nivel III: Usar números con pesos distintos para estimular el procedimiento de contar progresivamente. Cuando el niño ha colocado la respuesta, hacer que cuelgue el número correspondiente a la respuesta en el lado más liviano.



Actividad optativa para profundizar más: nótese que, para los tres niveles, los niños pueden practicar la realización de estimaciones o cálculos aproximados que luego pueden comprobar mediante el cálculo. Pueden determinar la precisión de su previsión calculando la diferencia entre ella y la respuesta calculada. Si anotan la precisión de sus previsiones para un problema, pueden observar los cambios de su precisión con el tiempo.

Multiplicación

1. Exponer explícitamente la conexión existente entre la multiplicación y la adición repetida. Las dificultades con la multiplicación básica suelen darse porque los niños no ven la conexión entre esta nueva operación y su conocimiento existente. A veces, la enseñanza de apoyo consiste, simplemente, en ayudar al niño a establecer esta conexión. Considérese el caso de Ken, un niño de tercer curso asignado a la clase especial de matemáticas porque tenía dificultades de aprendizaje (Baroody, 1986). La maestra que tenía Ken en esta clase me pidió que lo examinara explicándome que no tenía el concepto de la multiplicación. Cuando le presenté varios problemas sencillos de multiplicación como 6 X 2 = _ y 3 X 3 = _, Ken no parecía tener ninguna idea de lo que tenía que hacer. Según decía estaba convencido de que la multiplicación era demasiado difícil para él. Entonces le demostré un procedimiento para contar: 4 X 3 es contar cuatro dedos (sin volver a empezar) tres veces (1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11 12). Ken exclamó: «j Vaya, así que la multiplicación no es más que eso!» Cuando la multiplicación se presentó de una manera informal, tuvo sentido para Ken, que en seguida aprendió a calcular productos. De hecho, pronto empezó a encontrar maneras de abreviar el procedimiento que se le había enseñado. Más adelante, por ejemplo, respondió inmediatamente a 7 X 2. Cuando se le preguntó cómo lo había calculado, explicó que había empleado la combinación conocida 7 + 7 = 14.

A veces, las dificultades con la multiplicación tienen raíces más profundas y es necesario emplear un enfoque más concreto (Baroody, 1986). Adam, un niño con verdaderas dificultades de aprendizaje, planteaba un reto mucho más grave que Ken. A Adam se le enseñó el mismo procedimiento mental informal que había tenido éxito con Ken. Sin embargo, este procedimiento no hizo más que confundirlo. Ante esto se intentó otra estrategia concreta que representaba con mayor claridad la adición repetida de las unidades. El problema 4 x 3, por ejemplo, se resolvió colocando tres grupos de cuatro bloques y contándolos todos.

2. Estimular explícitamente contar a intervalos, sobre todo para combinaciones grandes y difíciles de calcular. Normalmente, los niños multiplican números pequeños (hasta 5 X 5) con poca dificultad, pero suelen tener dificultades con problemas en los que intervienen los números 6 a 9. Para problemas con números pequeños, pueden hacer una pauta digital con los dedos de una mano para representar el multiplicando y emplear los dedos de la otra para llevar la cuenta del número de veces que se ha contado el multiplicando (por ejemplo, para 4 x 3, levantar cuatro dedos de la mano izquierda y llevar la cuenta de las tres veces con los dedos de la mano derecha). Para problemas mayores, como 6 X 5 ó 5 X 6, no hay dedos suficientes para este procedimiento de cálculo.

Para solventar esta dificultad, Wynroth (1969-1980) propone un método vertical para llevar la cuenta. Para 7 x 6, si un niño elige contar grupos de siete saca siete dedos y los cuenta. Cuando acaba, anota un 7 en una hoja de papel pautado. Se vuelven a contar los siete dedos (a partir de «ocho») y se anota 14 en el papel pautado. El proceso continúa hasta que el niño ha hecho seis anotaciones, como se muestra a continuación:

7
14
21
28
35
42

Para algunos niños puede ser útil etiquetar el multiplicando y el multiplicador. Wynroth (1969-1980) propone que, para empezar, el niño debe anotar r rodear con un círculo el multiplicando (el número a contar). En e ejemplo anterior, se hubiera colocado un 7 rodeado por un círculo en la parte superior de la columna antes de que el niño empezara a contar. Además, puede ser útil tener una primera columna que especifique el multiplicador. En el ejemplo anterior, podría haberse colocado una columna con los números del 1 al 6 a la izquierda de la otra columna. El empleo de una sola columna en el procedimiento descrito e ilustrado en el párrafo anterior puede producir menos confusión en algunos niños, sobre todo si necesitan educación especial.

Este método vertical para llevar la cuenta tiene varias virtudes. Si los niños pierden la cuenta al calcular, simplemente pueden contar hacia arriba el número de entradas que hayan hecho (y seguir contando a partir de aquí). Además, los niños pueden volver a utilizar las anotaciones. Para problemas con un multiplicando menor como 7 X 4 = _, un niño sólo tiene que ir contando hacia atrás en la columna de los sietes hasta la cuarta entrada y encontrar que la respuesta ya está anotada allí. Nótese que este método vertical para llevar la cuenta es coherente con la tendencia natural de los niños a contar a intervalos. Para problemas con un multiplicador mayor como 7 X 7 = _, los niños pueden ir hacia abajo en la columna de los sietes hasta la última entrada (la sexta) y contar siete más a partir de ahí (y hacer una nueva entrada). Eventualmente, los niños pueden tener un registro completo de todas las combinaciones básicas de la multiplicación.

F) RESUMEN

Antes de dominar las combinaciones numéricas básicas, los niños pueden apoyarse en procedimientos de cálculo basados en contar que, al principio, requieren objetos concretos como los dedos o bloques. Normalmente, los niños tienden de manera natural a emplear procedimientos de contar orales o mentales en el cálculo. También aprenden en seguida a emplear su conocimiento de la serie numérica para responder con eficacia a problemas de tipo $N + 1 = \_$ y $N - 1 = \_$. La comprensión informal que tienen los niños de la aritmética guía su construcción o invención de procedimientos de cálculo concretos y mentales. Como los niños contemplan la adición como añadir *más* a algo, los problemas conmutados como 5 + 1 y 1 + 5 ó 3 + 5 y 5 + 3, se ven como problemas distintos. Como resultado, los niños pueden sentirse obligados a calcular la suma de 1 + 5 aun cuando sepan que 5 + 1 = 6. Los niños descubren pronto que $1 + N$ y $N + 1$ producen la misma suma y que la eficaz regla del número siguiente a otro dado se aplica por igual a $1 + N$ y a $N + 1$. Llegado el momento, los niños aprenden que el orden de los sumandos tampoco altera el resultado de los problemas $N + M$ (por ejemplo, .3 + 5 = 5+ 3). El cálculo mental es cognoscitivamente exigente porque los niños deben tener presente hasta cuándo deben contar cuando cuentan. Por tanto, cuanto mayores sean los términos que intervengan en un problema más complicado será el procedimiento para llevar la cuenta, y para los niños es un verdadero aliciente inventar nuevos procedimientos de cálculo que minimicen este trabajo mental. Así pues, tanto los factores conceptuales como los no conceptuales desempeñan su papel en el desarrollo de procedimientos informales de cálculo. Las dificultades con el cálculo informal pueden producirse porque las técnicas para contar o para llevar la cuenta que intervienen en el mismo no son adecuadas ni eficaces.