

El Estudio de Clases y las demandas curriculares

LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN

MASAMI ISODA

RAIMUNDO OLFOS

Tsukuba

Valparaíso

2009



EDICIONES UNIVERSITARIAS DE VALPARAÍSO
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Nuestros reconocimientos a:

CRICED, Centro para la Investigación en el Desarrollo Educacional en Cooperación Internacional de la Universidad de Tsukuba, patrocinante de la Estadía de Investigación del Dr. Olfos en la Universidad de Tsukuba, Japón. Marzo - Junio 2008.

JICA, Agencia de Cooperación Internacional de Japón y los Ministerios de Educación de Japón y de Chile, por facilitar la profundización en el Estudio de Clases a través de un curso con visitas al aula para académicos chilenos, Febrero 2008. JICA y CRICED, por el patrocinio parcial de la versión editada del presente libro.

Profesores Satoshi Natsusaka, Hiroshi Tanaka, Kozo Tsubota, Takao Seiyama de la Escuela Anexa de la Universidad de Tsukuba en Tokio, y al profesor Hideyuki Muramoto de la Escuela de Maruyama, quienes generosamente compartieron sus clases, planes de clases, materiales didácticos y tiempos para la discusión.

Profesora Soledad Estrella, correctora de las versiones preliminares, orientadora del diseño y de la selección fotográfica.

Dr. Abraham Arcavi, del Instituto Científico de Weizmann de Israel y al Profesor Arturo Mena Decano de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, por las revisiones finales del libro. Profesores Hiroki Hayashi, Hiromi Miyakoshi, Orlando González y Napoleón Avila como soporte en las traducciones japonés, inglés y español.

Universidad Católica de Valparaíso, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas y Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Tsukuba, Masami Isoda
Valparaíso, Raimundo Olfos

Enero 2009

ÍNDICE

Prólogo	Página 9
Introducción	15
PARTE I: La multiplicación de los naturales en el currículo	17
Nuevo marco para la enseñanza de la multiplicación	19
- <i>El principio de extensión para la enseñanza de la multiplicación</i>	<i>21</i>
La multiplicación con naturales en el currículo de 8 países	22
- <i>Paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación</i>	<i>26</i>
Organización de la multiplicación en la guía para el maestro y en los textos escolares japoneses	28
- <i>Secuenciación en la enseñanza de la multiplicación</i>	<i>30</i>
Orientaciones gubernamentales para la enseñanza de la multiplicación en Japón y en Chile	32
- <i>Orientaciones desde la Guía para la enseñanza en Japón</i>	<i>33</i>
- <i>Orientaciones para enseñar la multiplicación en Chile</i>	<i>35</i>
- <i>Orientaciones desde el Marco Curricular en Chile</i>	<i>36</i>
PARTE II: La enseñanza del concepto de multiplicación, las tablas de multiplicar y las propiedades de la tabla	41
Introducción	43
El concepto de multiplicación	44
- <i>Problemas de tipo multiplicativo</i>	<i>45</i>
- <i>El modelo multiplicativo</i>	<i>45</i>
La enseñanza del concepto de multiplicación	46
- <i>Cómo iniciar el estudio de la multiplicación en la escuela</i>	<i>47</i>
- <i>La suma repetida como conocimiento previo y la unidad como conflicto cognitivo</i>	<i>48</i>
- <i>Expresión matemática y procedimiento operativo de la multiplicación</i>	<i>49</i>

- Desde la conmutatividad al uso de la expresión "multiplicado por"	53
- La iniciación a la multiplicación en la Guía de Japón	54
- Iniciación a la multiplicación en los programas chilenos	54
La iniciación a la multiplicación en un caso de Estudio de Clases	57
- Descripción y plan de la clase a investigar	57
- Relato de una clase pública en que se inicia el estudio de la multiplicación.	61
- Análisis de la clase del profesor Natsusaka	69
Ejemplo de clase de investigación. Aplicación del concepto de multiplicación	76
Desarrollo de la habilidad de agrupamiento a través del estudio de la multiplicación en el caso de Japón	79
Plan de la subunidad "Iniciación al Concepto de Multiplicación"	81
- Sesión 1: Una nueva forma de calcular	82
- Sesión 2: La multiplicación en nuevos contextos	85
- Sesión 3: Usemos el modelo de la multiplicación	89
Enseñanza de las tablas y de las propiedades de la tabla.	92
Orientaciones para la enseñanza de las tablas y sus propiedades.	92
- Memorización y comprensión para avanzar en las tablas	92
- Las sugerencias de los textos	94
Uso de materiales para la memorización y la comprensión.	97
- Uso de la colección de círculos	97
- Uso de tarjetas y naipes	97
- Uso de naipes ilustrados	99
- Características de las cartas de tablas de multiplicar ilustradas	99
- Uso de hoja o libreta de registro de avance	101
Sugerencia de los programas para la enseñanza de las tablas.	103
- La enseñanza de las tablas en la Guía de Japón.	103
- La enseñanza de las tablas en los programas chilenos	104
Enseñanza de las tablas del 2 al 5	109
- Entregar la responsabilidad de aprender al alumno	109
- Planificación de la Subunidad "Las tablas del 2 al 5"	110
Sesión 1: Construyendo la tabla del 2	112
Sesión 2: Memorizando la tabla del 2	114
Sesión 3: Aplicando la tabla del 2	115
Sesión 13: Entreteniéndonos con las tablas del 2 al 5	117
Sesión 14: Descubriendo propiedades en las tablas del 2 al 5.	119
- Usemos las tablas de multiplicar ya estudiadas.	120
Enseñanza de las tablas del 6 al 9	121
- Para multiplicar por 6 o más	121
- Planificación de la Subunidad "Las tablas del 6 al 9"	122

Sesión 1: Construyendo la tabla del 6	123
Sesión 2: Memorizando la tabla del 6	125
Sesión 3: Aplicando la tabla del 6	126
Sesión 13: Ejercitando y aplicando tablas del 6 al 9	128
Sesión 14: Entreteniéndose con las tablas del 6 al 9	130
Propiedades de las tablas y de la tabla completa	132
- <i>Clase para investigar: Propiedades de la multiplicación</i>	<i>132</i>
- <i>La multiplicación por 1 y la propiedad conmutativa.</i>	<i>135</i>
- <i>Planificación de la Subunidad "Propiedades de la tabla"</i>	<i>135</i>
Sesión 1: Construyendo y memorizando la tabla del 1	136
Sesión 2: Construyendo y leyendo la tabla bidimensional para la multiplicación .	138
Sesión 3: Descubriendo la relación entre el multiplicador y el producto.	140
Sesión 4: Descubriendo la conmutatividad de la multiplicación.	142
Sesión 5: Ejercitando y aplicando las tablas multiplicación.	144
Sesión 6: Ejercitando y entreteniéndonos con las tablas	146
Sesión 7: Ejercitando y entreteniéndonos con la multiplicación	147
PARTE III: Enseñando a multiplicar números de varias cifras	149
Términos para enseñar la multiplicación con multidígitos	151
Tendencias internacionales sobre la enseñanza de la multiplicación	154
- <i>El algoritmo de la multiplicación en el currículo escolar</i>	<i>154</i>
- <i>Investigación sobre la enseñanza de los algoritmos de cálculo</i>	<i>155</i>
- <i>A modo de síntesis</i>	<i>156</i>
Enseñanza de la multiplicación con multidígitos en Japón y en Chile	157
- <i>Multiplicación con multidígitos en la Guía de Japón.</i>	<i>157</i>
- <i>Multiplicación con multidígitos en los programas chilenos</i>	<i>158</i>
Estudio de una clase en la que se enseña la forma de calcular una multiplicación.	168
- <i>Descripción general de la clase</i>	<i>168</i>
- <i>Génesis de este plan de clases</i>	<i>169</i>
- <i>Descripción y análisis de los episodios de la clase</i>	<i>171</i>
- <i>Criterios para evaluar la clase.</i>	<i>174</i>
- <i>Plan de la clase 4 de la secuencia de 13 sesiones</i>	<i>174</i>
- <i>Planificación de las 13 sesiones de la Unidad</i>	<i>176</i>
- <i>Metas de la Unidad.</i>	<i>177</i>
La visión del grupo de Maruyama	177
- <i>Elementos relevantes de la visión del grupo de Maruyama</i>	<i>178</i>
- <i>Los puntos de vista del grupo de Maruyama</i>	<i>179</i>
- <i>Características de los alumnos de la Escuela de Maruyama.</i>	<i>184</i>

Planificación de la Unidad "Multiplicación con multidígitos"	186
- <i>Características de la Unidad</i>	186
- <i>Identificación de las subunidades de la Unidad</i>	188
- <i>Sugerencias generales para el tratamiento de la Unidad</i>	190
Subunidad: Multipliquemos con ceros	192
Sesión 1: Multiplicando con el factor 0	192
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación por 10, 100 y 1000	195
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación por D0, C00, U _M 000 x U	196
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación por D0, C00 x U con canje	197
Subunidad: Multipliquemos en la forma vertical.	198
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación entre números DU x U, sin canje	198
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación entre números DU x U, con canje	200
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación DU x U, con canje en la decena	201
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación DU x U, con canje en el proceso.	202
Sesión 5: Ejercitando la multiplicación entre números DU x U	203
Subunidad: Sigamos multiplicando en forma vertical	204
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación CDU x U, sin canje	204
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación CDU x U, con canje en las unidades y/o decenas	205
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación CDU x U, con canje en las centenas y en la suma de productos parciales	206
Sesión 4: Resolviendo ejercicios y problemas de la aplicación de la multiplicación CDU x U, con canjes	208
Sesión 5: Confirmando lo aprendido sobre la multiplicación CDU x U	209
Subunidad: Multiplicando y multiplicador con multidígitos	210
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación DU x DU, sin canje	210
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación DU x DU, con canje.	211
Sesión 3: Explicaciones a la forma de multiplicar multidígitos	213
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación CDU x DU	215
ANEXO 1. La extensión del concepto de multiplicación	217
ANEXO 2. Diferencias gramaticales en la notación matemática	223
Referencias Bibliográficas	227

PRÓLOGO

El propósito más evidente de este libro es ofrecer a profesores de educación básica y formadores de profesores ejemplos de lecciones, planes de clases y sugerencias para enseñar la multiplicación. Estas orientaciones son fruto de la experiencia del Estudio de Clases en Japón desde la década de 1870 y de antecedentes complementarios de la literatura internacional con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación. El currículo escolar destina gran cantidad de horas a su enseñanza. Este libro se restringe al estudio de la enseñanza de multiplicación con números naturales, quedando fuera del foco de análisis la multiplicación de fracciones y de números decimales.

Un segundo propósito es favorecer en investigadores, curriculistas y autores de textos, como también en docentes y estudiantes de pedagogía, la comprensión de una estrategia de enseñanza que concilia el enfoque de resolución de problemas, originado en Japón hacia 1940, con el estudio de los contenidos del currículo. Este enfoque ha alcanzado reconocimiento internacional desde la década de 1990 en virtud de las situaciones problemas que se van mejorando con el Estudio de Clases y de su difusión a través de clases públicas. El libro se nutre del impacto del Estudio de Clases sobre las decisiones curriculares gubernamentales y el comportamiento de los profesores en las aulas de Japón, quedando a la vista una educación matemática eficiente y vanguardista. De hecho, los resultados en matemáticas de Japón en las mediciones TIMSS y PISA, a pesar de haber disminuido, se mantienen en el cuartil superior más allá de haber reducido sólo a 3 horas semanales la componente matemática del currículo de 1° a 6° grado durante la década anterior, decisión comparativamente desventajosa en el contexto internacional.

Este libro es parte de una edición pionera que difunde en el mundo hispano hablante un modelo de enseñanza de la matemática escolar en el que los

profesores ponen en juego su creatividad y son los protagonistas del proceso. Además, este modelo basado en la resolución de problemas y los requerimientos del currículo concilia en la práctica los dos grandes propósitos de la educación matemática, a saber, el formativo y el informativo. En la dimensión formativa, favorece el desarrollo de las habilidades transversales de pensamiento y comunicación en matemáticas (Isoda, 2006), y en la dimensión informativa, favorece la adquisición de los contenidos disciplinarios.

El libro muestra ejemplos concretos de cómo preparar e implementar clases centradas en la resolución de problemas y que contribuyen a cubrir los programas de estudio; dando pistas para que en Chile e Hispanoamérica la reflexión de los docentes permita generar una tradición de enseñanza ajustada a las demandas curriculares y a la tendencia de formar ciudadanos reflexivos. Algunos de los ejemplos ofrecidos cuentan con respaldos de videos de clases y video-clips, facilitando la autonomía del docente para profundizar en las ideas desarrolladas en este libro, de modo que se anime a incorporar el Estudio de Clases en su actividad profesional cotidiana.

Paralelamente, el uso del libro por los docentes contribuirá a brindar una mejor educación matemática a las nuevas generaciones y a orientar un mejoramiento de la enseñanza de la multiplicación en el currículo. Los autores del libro invitan a los lectores a involucrarse en el Estudio de Clases en torno a la enseñanza de la multiplicación, para que así sientan en carne propia un cambio en el clima de sus clases y en los aprendizajes de sus alumnos.

En este libro, los temas son tratados en profundidad, dando énfasis a dos cuestiones centrales en el Estudio de Clases, cruciales para el éxito de las clases de matemáticas: los conocimientos ya adquiridos por el alumno antes de iniciar la clase y la situación problema que lleva a un cambio en la comprensión como condición para alcanzar un aprendizaje profundo. Estas dos cuestiones regulan la secuencia de los contenidos de enseñanza tratados en este libro y la profundidad con que son expuestos, asunto que a la larga ayudará al lector a ajustar la enseñanza a los contextos y a las situaciones particulares en que viven los alumnos.

Este libro se constituye en una poderosa herramienta que favorece en los profesores y formadores de profesores de educación básica de habla hispana el conocimiento del contenido pedagógico y el desarrollo de habilidades para gestionar la clase. Esto, a partir de la descripción y reflexión de "situaciones de clases" y preguntas tan simples como "¿cómo lo calcularías?, ¿cómo

cambia la expresión si...? ¿se puede hacer de otra forma?, ¿por qué esa forma permite llegar a la respuesta?” que en definitiva conducen a aprendizajes de alto nivel.

Estructura del libro

El libro está estructurado en 3 partes. En la primera parte se muestra cuáles son las principales etapas del aprendizaje de la multiplicación de números naturales, mostrando el fenómeno desde una perspectiva internacional. Una visión sinóptica del tratamiento de la multiplicación en el currículo de ocho países, cuatro del Medio Este asiático y cuatro de América. Finalmente, se exponen orientaciones para la enseñanza de la multiplicación, según lo propone la Guía de Enseñanza para Profesores de Matemática del Gobierno de Japón y se la compara con las Orientaciones Curriculares que ofrece el Gobierno de Chile a sus homólogos.

La segunda parte se refiere a la introducción del concepto de multiplicación, al aprendizaje de las tablas y al descubrimiento de las propiedades en la tabla. El enfoque de enseñanza descrito en esta sección es un tema fascinante no sólo para los profesores de aula, sino también para sus formadores. Se aprecia cómo los educadores matemáticos en Japón fueron capaces de articular el currículo en torno a la enseñanza de la multiplicación, a partir de la noción de extensión. Se hace notar cómo la introducción a la multiplicación como proporcionalidad -según lo propusiera Descartes- permite relacionar esta operación en 2º grado con la adición ya estudiada, los principios elementales de Dedekind y Peano, y en 3º grado con la multiplicación de fracciones y decimales, un verdadero acierto en cuanto a la transposición didáctica. Se señala además la importancia de agrupar para usar la unidad con números discretos, de modo que los niños sean capaces de extender sus ideas desde la suma iterada. Esta sección presenta planes de clases de los profesores Natusaka y Tsubota de la Escuela Anexa de la Universidad de Tsukuba en Tokio, y la descripción de la clase pública y su discusión realizada con la presencia de cientos de profesores de aula japoneses y algunos hispanoamericanos. La sección incluye aclaraciones sobre el uso de algunas expresiones y sugerencias sobre el tratamiento de los temas y el uso de materiales de enseñanza. También presenta planes de secuencias de clases completas que deleitarán la reflexión del docente en torno a la iniciación de la multiplicación, el tratamiento de las tablas y el estudio de las propiedades de la tabla hasta 9×9 .

La tercera parte trata la enseñanza de los procedimientos estándares para la multiplicación con multidígitos¹, la multiplicación vertical y el algoritmo simplificado. Por un lado se analiza una clase en la que el profesor Muramoto, de la escuela elemental Maruyama, guía a los alumnos hacia el algoritmo de la multiplicación en tercero básico. Se analiza la cuarta clase de una secuencia de 13. La clase del profesor Muramoto fue realizada en público a un curso de 40 alumnos. Se incluye un análisis de la clase que destaca los componentes y acontecimientos principales de la misma, constituyéndola en un ejemplar de las producciones del Estudio de Clases y de la tradición de la enseñanza de la matemática escolar en Japón. La clase fue codificada en inglés por el profesor Tall. El DVD adjunto a este libro contiene el video de la clase y los video-clips de los siete acontecimientos principales correspondientes. Por otro lado, la sección, al igual que la anterior, desarrolla una secuencia de clases completa, tal como aparecería en una guía para el profesor, de modo que se dispone del ejemplo de una planificación completa en torno a la enseñanza del algoritmo de la multiplicación para su tratamiento en un semestre o más.

Queda fuera de este libro el estudio de la enseñanza de estrategias de cálculo que muchas veces simplifican o bien sustituyen el uso del algoritmo o de la multiplicación vertical. El tema de las estrategias de cálculo es relevante en el proceso de enseñar a multiplicar números naturales, como por ejemplo dividir en 2 y multiplicar por 100 para multiplicar por 50, como también las estrategias para aproximar.

Uso del libro

A investigadores y curriculistas recomendamos leer el libro desde el inicio. A profesores y estudiantes de pregrado instamos a revisar los videos ejemplares. Si el lector inicia la práctica del Estudio de Clases con colegas de su escuela o cercanía, le recomendamos leer primero la clase del profesor Muramoto y darse tiempo para observar con detención y comentar los conceptos tratados en los videos. Se sugiere al lector integrar un grupo de trabajo y mantener sesiones semanales para compartir la lectura, la observación de videos y la reflexión en torno a su experiencia e intenciones de mejoramiento. Los autores instan al lector a que se avoque decididamente a la práctica del Estudio de Clases durante un par de semestres, fijando como contenido central “la

¹ Multiplicación con números de más de una cifra.

enseñanza de los números y sus operaciones” con un foco en la multiplicación de números naturales (eventualmente fraccionarios o decimales).

La siguiente sugerencia para el grupo de lectores que se anime a emprender el Estudio de Clases con apoyo de este libro, es que revise los planes de clases ejemplares según el grado en que se encuentre haciendo clases. Una lectura rápida de los planes les permitirá identificar las principales etapas que involucra el estudio de la multiplicación, valorar la articulación entre las clases y reconocer la situación problema propia de cada clase. La lectura de los planes de clases junto a la práctica docente en torno a ellos llevará al lector a desarrollar autonomía para preparar sus estrategias y materiales de enseñanza y poner en práctica los principios de una clase de resolución de problemas que favorece el aprendizaje de los contenidos curriculares. A medida que el grupo de lectores comprenda el estilo japonés de enseñanza centrado en “la resolución de problemas y las exigencias curriculares” (Isoda, 2000) y sienta que se apropia del mismo, podrá animarse tras un par de meses a que uno de los integrantes experimente una clase pública planeada con dedicación y colectivamente, abierta a la observación de sus pares, para constituir la en una clase a investigar. Luego, el grupo de lectores puede reflexionar en torno a las secuencias de clases centradas en la discusión. Por último, sugerimos revisar la sección que analiza los programas de estudio, puesto que desafía a la reflexión crítica y al espíritu de investigación en la acción, para que fructifique un trabajo propio que beneficie su escuela, entorno y en proyección al país.

Si el lector es un profesor de aula, puede leer superficialmente el primer capítulo y concentrarse en los siguientes. El capítulo I es de interés para los formadores de profesores y autores de texto.

El libro y los videos de clases ofrecen muchas sugerencias para implementar en aula; sin embargo sugerimos que no las copie, sino que se pregunte ¿por qué hacer cambios? Los profesores japoneses mejoran sus prácticas cuestionándose ¿qué mejora la práctica? y ¿cómo mejora?, comparten un currículo, discuten los objetivos y participan en el estudio de clases.

El lector debe ser cuidadoso y distinguir el enfoque de enseñanza japonés de la forma de representación lingüística japonesa, particularmente con respecto al uso del término “veces”. Los ejemplos de este libro aluden a situaciones como “grupos de 2 elementos repetidos tres veces” (3 veces 2), las que se registran “ 2×3 ”, con la unidad de medida o multiplicando a la izquierda. Para una comprensión profunda de estas ideas, por favor, remítase al anexo 2.

INTRODUCCIÓN

El Estudio de Clases y la enseñanza de la multiplicación

El Estudio de Clases, Jugyou Kenkyu, o bien "Lesson Study" según se lo conoce internacionalmente, ha contribuido a la investigación de la enseñanza de la matemática en Japón, impactando las decisiones curriculares nacionales con la mirada realista del profesor, frente a las necesidades y aspiraciones de un país moderno que educa a toda su nación. El Estudio de Clases se ha instalado armoniosamente en el sistema educativo japonés en el marco de la racionalidad y consistencia de un sistema educativo que se perfecciona a sí mismo con ajustes curriculares periódicos, coordinados con la elaboración y distribución de textos escolares nacionales y la formación continua del profesorado.

El Estudio de Clases, como parte de las actividades para el desarrollo del sistema nacional de educación en Japón, contribuye al desarrollo profesional docente, a la implementación del currículo en las aulas y al mejoramiento permanente del currículo. No sería fidedigno afirmar que existe en Japón una única manera de enseñar matemáticas o que en todas las escuelas se enseña con igual profundidad. Pero, lo que sí se puede decir es que existe un cuidado único por hacer las cosas bien, y en ese espíritu, el currículo, los textos, los docentes y los investigadores, son fieles a los saberes de la cultura e innovan en la medida que tiene sentido hacerlo.

En los últimos 60 años el currículo escolar en matemáticas de Japón se ha ajustado a las tendencias internacionales (National Council of Teachers of Mathematics, 1980; 1989) y a las exigencias propias que el mismo país se impone. Cada década el Ministerio de Educación establece una reforma y consecuentemente promueve la implementación gradual en el Sistema con la correspondiente incorporación de los nuevos contenidos en el marco de las licitaciones de textos. Tanto las autoridades gubernamentales a cargo del currículo escolar como las editoriales mantienen contacto con los profesores,

las escuelas experimentales y los Estudios de Clases, y así se mantiene una sinergia que favorece la efectividad en la innovación de la enseñanza de la matemática en Japón. Para una profundización de estas relaciones véase el libro *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas* (Isoda, Mena y Arcavi, 2007).

Teniendo en cuenta la complejidad del fenómeno educativo y la variedad de factores que afecta la organización de los sistemas educativos en el mundo, no es posible establecer simples relaciones de causa efecto entre el Estudio de Clases y la calidad de la enseñanza de un tópico particular. Ambas acciones, el Estudio de Clases y la concreción curricular en el aula, tienen su finalidad propia y se retroalimentan y fortalecen. En ese contexto, declaramos que el Estudio de Clases, como forma de trabajo cooperativo entre profesores, ha posibilitado en Japón fortalecer una educación matemática de calidad internacional, estableciendo vínculos clarísimos entre las delimitaciones curriculares, las tendencias internacionales, la calidad de los textos, y la efectividad de los docentes en la actividad cotidiana del aula.

De este modo, el Estudio de Clases ha dado cabida a un progreso armonioso entre desarrollo curricular y gestión en el aula, contribuyendo en la práctica a la aspiración de ofrecer una educación matemática centrada en la resolución de problemas que se articula con la exigencia del tratamiento de los contenidos establecidos en el currículo y el desarrollo del interés de los alumnos por aprender matemáticas.

En este libro hemos recogido información de la tradición nipona sobre la enseñanza de la multiplicación. Y queremos terminar esta introducción con una máxima en que los educadores estadounidenses han cuestionado su propio actuar:

“Cuando un brillante maestro de América se retira, casi todos los planes de lecciones y prácticas que ha desarrollado también se jubilan. Cuando un profesor japonés se retira, deja un legado.”

PARTE I
La Multiplicación de los naturales
en el Currículo

Nuevo marco para la enseñanza de la multiplicación

En las últimas décadas, los países han redefinido las metas para las Escuelas Primarias en todas las áreas, dando prioridad a destrezas complejas como la resolución de problemas y la comunicación por sobre los conocimientos aislados.

Con respecto a las matemáticas se han identificado metas como “hacer conexiones entre la aritmética y la experiencia cotidiana, adquirir destrezas básicas, comprender el lenguaje matemático y aplicarlo en situaciones prácticas, reflexionar sobre las actividades matemáticas y chequear los resultados, establecer relaciones, reglas, patrones y estructuras, y describir y utilizar estrategias de investigación y de razonamiento” (Treffers et al., 2001).

En esta línea se ha desarrollado un vocabulario con términos propios, entre los que figuran:

Contexto. El contexto es un evento, asunto o situación derivada de la realidad, el cual es significativo para los niños o el cual ellos pueden imaginar. Los niños usan métodos matemáticos a raíz de su propia experiencia. El contexto provee significado concreto y da la base para las relaciones matemáticas relevantes u operaciones que realiza el niño. Las situaciones podrían ser esquematizadas desde experiencias cotidianas tales como viajar en bus, comprar y manejar dinero. El contexto también puede ser encontrado en el mundo de las matemáticas en sí mismo, como en el caso de las propiedades de los números primos, dando origen a contextos aritméticos o matemáticos.

Contextualización. La contextualización significa dar significado a los números y operaciones relacionándolas a las situaciones significativas de cada día, el mundo real o el mundo significativo de los niños. Por ejemplo, al resolver

63-47 un estudiante podría pensar en una diferencia entre edades de personas, porque dos personas tendrán la misma diferencia de edad en tres años, el problema podría ser reemplazado por 66-50, el cual es más fácil de resolver. En esta forma un problema formal es contextualizado en una situación de edades.

Destrezas básicas. En el dominio de las destrezas básicas se considera: el conteo hacia delante y atrás con distintas unidades, el conocimiento de las tablas hasta 10 en suma y multiplicación, la realización de tareas aritméticas simples usando eficientemente el conocimiento acerca de las operaciones, el hacer estimaciones en operaciones aritméticas para determinar un resultado aproximado, alcanzar comprensión de la estructura de los números naturales y entender las posiciones del sistema de numeración decimal, hacer uso inteligente de la calculadora, y modelar problemas simples en términos matemáticos.

Hacer aritmética concreta. Hacer operaciones aritméticas o razonamiento concreto significa hacer la operación mientras es fácil de imaginar. Esto a menudo da un incremento de la comprensión en tales operaciones y razonamientos de un contexto práctico o situación. Por ejemplo, cuando se tiene en mente un arreglo rectangular para mostrar que 12×25 es igual a 6×50 .

Memorización. La memorización es la asimilación del conocimiento: aprendizaje de los números y resultados aritméticos tales como los productos de las tablas de multiplicación por intuición y luego ser capaces de recordarlas cuando ellas se requieran. La memorización es a menudo el acto final en un proceso de aprendizaje en el cual las operaciones son graduales y en creciente eficiencia llevadas a niveles cada vez más altos. Por ejemplo, se dice que un estudiante ha memorizado 7×8 si conoce directamente que es 56, sin tener que trabajarlo conscientemente.

Modelo de contextos. Un modelo de contexto es una situación que puede mantenerse para un rango completo de situaciones aritméticas relacionadas. En ellas las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división están reflejadas significativamente. Tal contexto puede ofrecer soporte en llevar adelante un cálculo y desarrollar un procedimiento. La moneda es un ejemplo de uso de contexto para el cálculo en columnas. El cálculo formal adquiere significado para los niños si pueden descomponer una cantidad de monedas en monedas de \$ 100, \$10 y \$1.

- El principio de extensión para la enseñanza de la multiplicación

La enseñanza de la matemática escolar tiene entre sus propósitos más usuales que los alumnos adquieran conceptos y luego los re-conceptúen en ámbitos explicativos más generales. Por ejemplo, los alumnos adquieren la noción de número y sus operaciones en ámbitos cada vez más extensos, con números naturales, decimales fraccionarios y enteros. Este proceso de extensión está ligado a la profundización de los objetos de aprendizaje y la provisión de nuevas representaciones de los mismos.

Para enseñar la multiplicación con números naturales, el primer paso es favorecer la comprensión del producto como cantidad de elementos o medida resultante de grupos de igual número de elementos o medidas que se repiten, lo que se refiere a un caso particular de la proporcionalidad. Importa la extensión del concepto "la unidad" y ello se hace a partir de la idea de grupo. Luego se estudia las tablas de multiplicar, esto es, la proceduralización del concepto con números de una cifra. Primero, las tablas del 2 al 5, luego del 6 al 9 y la multiplicación por 1. Luego vendrá la multiplicación por 0 y por 10.

Desde el estudio de la tabla del 6 en adelante se constata la propiedad $A(x+1) = Ax + A$, con $A=6, 7, 8, \text{ y } 9$, para x variando de 1 a 9, propiedad distributiva. Luego el alumno es inducido a descubrir la conmutatividad en la tabla, facilitando con ello la memorización de las tablas y proveyéndole un método de verificación. Finalmente, el alumno comprueba la asociatividad en la tabla.

En ambos procesos, en el de conceptualización y en el de proceduralización, el profesor procura que los niños provean argumentos, algunos de ellos descriptivos y otros deductivos. El profesor también espera que durante el proceso de verbalización en público, los alumnos aprendan unos de otros, sean capaces de entender los puntos de vista de sus compañeros y de relacionarlos con las ideas propias.

En Japón, la enseñanza de la multiplicación entre números de una cifra se lleva adelante en el segundo semestre de 2º grado. En tercer grado se continúa con la idea de extensión conceptual. Los alumnos exploran estrategias y aprenden métodos para multiplicar números naturales que se expresan con más de una cifra; primero, decenas por unidades ($D \times U$), decenas por decenas ($D \times D$) y otras combinaciones, como $DU \times D$, incluyendo múltiples aproximaciones.

En 4º grado, la extensión a los decimales pone el foco en la representación de

la multiplicación por medio de medidas proporcionales en rectas paralelas. Luego se extiende a las fracciones y en los cursos superiores con números negativos. En todos estos casos se extiende el uso del término “veces” al contexto de medidas de trazos proporcionales. En 3° grado la extensión es de números de una cifra a más de una cifra. Esto lleva a la conveniencia de disponer de nuevas formas para multiplicar, ya no cabe continuar con la memorización y se hace conveniente disponer de estrategias escritas, como por ejemplo, la forma vertical de la multiplicación y en definitiva un algoritmo.

La extensión que implica operar con números decimales va más allá de la representación, incluye un cambio en el objeto sobre el cual se actúa, se opera sobre parte del todo, se redefine la unidad de medida o unidad de conteo, se trata de una extensión conceptual. La representación decimal de los números agrupando en unidades, decenas y centenas da origen al sistema de representación decimal de los números. Noción que es ampliada luego con los números decimales y finalmente a la noción de número real como elemento de un continuo que representa a una medida.

La multiplicación con naturales en el currículo de 8 países²

Esta sección muestra cómo se estructura la multiplicación en los programas de una variedad de países de Asia y América (Isoda y Olfos, 2008). La comparación muestra lo estrictamente detallado y secuencial de los programas del Medio Este asiático en relación a los de países de América.

La comparación se atiene a Singapur (Sg), Hong Kong (Hk), Corea (Ko), Japón (Jp), México (Mx), Colombia (Co), Perú (Pe) y Chile (Cl), y se restringe al ámbito de números naturales. Todos estos países establecen entre sus metas que los alumnos entiendan el significado de la multiplicación y ganen fluencia en el cálculo. El logro de estas metas se establece en un rango que varía entre tres y cinco semestres. Para alcanzar la meta cada país tiene su estrategia, mientras unos parten en el segundo semestre de primero básico, otros parten en el primer semestre de tercero. En algunos países se trabajan unidades que integran el aprendizaje de la multiplicación con el de la división, mientras que en otros se intercalan unidades referidas a un contenido y luego al otro.

Las fuentes de información provienen de los Programas de Estudio vigentes a

² En APEC se usa el término economía en vez de país, debido a la situación especial de las economías de Taipei y Hong Kong.

junio de 2008, a excepción de México, para el que se consideran los programas del 1994 debido al acceso restringido a sus Programas actuales. Los datos de Colombia provienen de un currículo basado en competencias, estructurado en ciclos trianuales y no por grados (García, 2008). Razón por la que existen vacíos con respecto a la temporalidad de la adquisición de los contenidos.

La comparación se centra en cuatro aspectos de la enseñanza de la multiplicación con números naturales, estos son:

- La multiplicación y la extensión del ámbito numérico.
- La introducción al concepto de multiplicación.
- El descubrimiento y memorización de las tablas.
- El aprendizaje de la multiplicación multidígito.

En la comparación queda fuera la relación entre la división y la multiplicación, uso de calculadora, estudio de múltiplos y operaciones combinadas.

El primer tema explorado es el sentido dado al número en el contexto de la conceptualización de la multiplicación. Se constata que en los distintos Programas de Estudio el número es tratado como cantidad discreta y como símbolo para representar cantidades específicas. Sólo algunas veces los números hacen referencia a medidas de longitud u otra magnitud.

A continuación se señalan características distintivas del enfoque dado a la enseñanza de la multiplicación en cada país.

En Corea (Korea Ministry of Education, 2006), la enseñanza de la multiplicación se inicia en segundo grado según las siguientes metas:

- Comprender las situaciones para -y el significado de- la multiplicación.
- Comprender la tabla y multiplicar números de una cifra.
- Tratar el significado de la multiplicación como suma iterada o como el concepto de múltiplo, y relacionarlo con lo cotidiano.

En Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2006), la enseñanza de la multiplicación se inicia en primer grado:

- La multiplicación es tratada como adición repetida en un ámbito de números hasta el 40.
- Se utiliza el símbolo de multiplicación (\times) en una sentencia matemática para representar una situación dada.

- Se excluye, en este nivel, el uso de las tablas de multiplicar.

En Hong Kong (Education Bureau Hong Kong, 2007), la extensión del ámbito numérico de 1° a 4° grado es exhaustiva:

- Primero se tratan números hasta 10, luego hasta 20 y hasta 100. Luego, conforme pasan los meses y años se tratan números de 3 cifras, de 4 y luego de 5.
- En segundo grado se desarrolla un concepto básico de multiplicación: multiplicar números de una cifra por números de dos o tres cifras en el multiplicando.

En Japón (Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, 2003):

- La multiplicación se inicia en segundo grado bajo el modelo (número para la unidad) x (veces que se repite la unidad) = (total).
- En 2° grado se comprenden propiedades de la tabla de multiplicar, como la conmutatividad.
- En 3° grado se enseña la multiplicación con multidígitos y la extensión de las propiedades de la tabla.

En México (Gobierno de México, 1993), la enseñanza de la multiplicación se iniciaba en 2° grado, bajo la siguiente orientación:

- Introducción a la multiplicación mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos y arreglos rectangulares, utilizando diversos procedimientos.
- Escritura convencional de la multiplicación (números de una cifra).
- Construcción del cuadro de multiplicaciones.

En Perú (Gobierno del Perú, 2005), la multiplicación según los Programas se inicia en 1° grado, y se espera que el alumno aplique agrupaciones y suma repetida para situaciones que implican la noción de doble o triple.

Para el 2° grado, se espera que el alumno:

- Interprete la multiplicación de dos números naturales.
- Resuelva problemas de multiplicación de números de una sola cifra, y de números de una cifra por 10.
- Interprete y calcule el doble de un número natural menor que 100 y la mitad de un número par menor que 100.

En Colombia, los Programas dan una descripción genérica e integrada en un currículo diseñado por competencias. Para un período de tres años (nivel inicial) se explicitan las siguientes competencias:

- Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas.
- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (... , ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

En Chile, el Programa de Estudio es muy detallado, incluyendo aprendizajes esperados y ejemplos de actividades de aprendizaje y de evaluación.

En la descripción de los ejemplos de actividades propuestas a los alumnos en 3° grado (MINEDUC, 2003), se expresa:

- En situaciones de carácter multiplicativo planteadas por el profesor determinan, a través de sumas reiteradas, la cantidad total de elementos que conforman un todo si conocen la relación entre un elemento y el conjunto de elementos asociado a él (relación "uno a varios"). Para representar los objetos a los que se refiere el relato, pueden utilizar fichas u otros objetos manipulables.
- Se vende libros que contienen 10 figuras recortables cada uno. Si un niño compró 3 de esos libros, ¿cuántas figuras tendrá para recortar?
- Posteriormente el profesor resume lo realizado, rotula la operación como multiplicación y la expresa simbólicamente como (número de veces en que se repite el elemento unitario) (por) (el valor asociado al elemento unitario) (es igual) (al valor asociado a la nueva cantidad de elementos) lo que, en los casos descritos...

Al comparar los enunciados de los Programas de los países de América con los de países de Asia considerados aquí, se constata que en los primeros se da más importancia a las variaciones del contexto para la conceptualización,

sin atender otras variables de interés didáctico, como lo son la amplitud del ámbito numérico y la formación del sistema de representación.

- Paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación

Las siguientes tablas muestran tendencias internacionales y destacan las diferencias en aspectos específicos en el tratamiento de la multiplicación según los Programas de los distintos países.

Al interior de las celdas de cada tabla, los números 1, 2, 3 y 4 indican el nivel en que es tratado el tema. El número 1' indica que el tema es tratado en el segundo semestre del 1° grado.

Además se usa la siguiente simbología:

- (guión) : La información requerida no es precisada en el Programa.
- C : La información se refiere a todo el Ciclo y no explicita el nivel.
- / (slash) : La información es la misma del nivel siguiente.
- (Espacio): No hay información al respecto.

- Comparación referida a la extensión del ámbito numérico

País o economía	Mx 94	P e	C o	C l	K o	H K	S p	J p
< 40	-	-	-	-	-	-	1	-
< 100	1	1	-	1	1	1	1'	1
< 1000	2	2	C	2	2	1'	2	2
< 10000	3			3	3	2	3	3

Nótese que el Programa de Singapur es el único que establece que en el primer semestre de 1° grado se trate la multiplicación con números hasta 40.

- Comparación referida al significado dado a la multiplicación

País o economía	Mx 94	P e	C o	C l	K o	H K	Sp	J p
Suma repetida	-		C	3	1		1	-
Grupo como unidad	2	-	C	3	2		2	1
Proporcionalidad	-	1		3	2	/	/	2
Uso de dibujo	-	2	C	3	1	/	/	2
Arreglo	2		-	4	2			2

Nótese que Chile es el país que inicia más tardíamente el estudio de la multiplicación (Referencia: currículo a julio del 2008).

- *Comparación referida al uso de sentencias simbólicas y al uso de las palabras multiplicando y producto*

País o Economía	Mx 93	P e	C o	C l	K o	H K	S p	J p
Frase matemática	-		-	3	1	2	1	2
Uso símbolo x	2			/	2	/	/	/
Términos:								
Multiplicando		3		-	2		2	2
Producto	2	3	c	3	2	3	3	2

- *Comparación referida al grado en que son tratadas las tablas de multiplicar*

País o Economía	Mx 93	P e	C o	C l	K o	H K	S p	J p
Tablas 2 y 5	2	2	C	3	2	2	2	2
Tablas 3 y 4	/	2	/	3	2	/	2	2
Tablas 6 y 8	/	2	/	3'	2	/	3	2
Tablas 7 y 9	/	2	/	4	2	/	3	2
Multiplica por 10	3	2	C	3	3	3	2	2

- *Comparación referida a la multiplicación de números con más de una cifra*

País o Economía	Mx 93	P e	C o	C l	K o	H K	S p	J p
DU x U	2	2	C	4	3	3	3	3
CDU x U	2	3	/	4	3	3	/	3
MCDU x U	/	3	/	4	3	4	4	4
DU x DU	3	3	/	4	3	4	4	3
CDU x DU	3	3	/	4	3	4	4	3

Síntesis del paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación:

- Existen varias diferencias en las formas y momentos en que es tratada la multiplicación en los distintos niveles y países.
- Los Programas de las economías asiáticas fijan con mayor precisión distintas restricciones para el tratamiento de la multiplicación.
- Los países americanos privilegian los significados, destacan la multiplicidad de los significados y a veces presentan ambigüedades. Eventualmente, esta situación se vincula a la heterogeneidad propia de estos países, tanto en lo cultural como étnico y socioeconómico.
- El formato del programa de México es el más parecido al formato de los programas de las economías de Asia. El Programa de Perú muestra un escaso desarrollo curricular y un enfoque muy formal de la mate-

mática, como lo mostraron las tendencias internacionales en los años 1960 a 1970. La información que entrega el Programa de Colombia por un lado es insuficiente para garantizar una enseñanza homogénea en el país, y por otro es coherente con principios de vanguardia en la educación matemática internacional. El Programa de Chile está recargado combinando distintos enfoques y una variedad de ejemplos, desperfilando las conexiones y la optimización de la labor docente.

- En los países americanos los profesores y autores de texto enfrentan un currículo recargado que les implica una ardua tarea y alta responsabilidad en la toma de decisiones curriculares.
- Los programas de los países asiáticos están más centrados en los objetos matemáticos que en sus representaciones. Los programas de Corea tienen un eje para modelos, de modo que la multiplicación es estudiada desde dos puntos de vista que se complementan. Singapur tiene el Programa más estructurado, con pequeños bloques de contenidos conectados entre sí. Tanto los Programas de Hong Kong como los de Singapur enfatizan los aspectos estructurales del currículo, fijando incluso los conceptos que no deben ser tratados antes de tiempo.
- A modo de síntesis, se aprecia que las economías asiáticas consideradas en este estudio muestran mayor coherencia y conexión entre los contenidos de los Programas, y que el principio de extensión es clave para el diseño curricular en matemáticas.

Organización de la multiplicación en la guía para el maestro y en los textos escolares japoneses

En el transcurso de la última década, en la cual la comunidad internacional ha fijado su atención en el Estudio de Clases, los educadores matemáticos de América y Europa han mostrado interés en profundizar sobre el apoyo del gobierno de Japón a sus profesores con materiales concretos, guía para docentes y textos escolares. Ello ha llevado paulatinamente a la traducción de varios documentos desde el japonés. Así, en el 2005 fue traducida por primera vez al inglés La Guía para la Enseñanza de la Matemática Escolar editada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de Japón, "Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Arithmetic (Grade 1-6)". Esta guía hace referencia a los objetivos y contenidos de enseñanza para cada grado, da indicaciones para la construcción de los planes de ense-

ñanza y provee sugerencias a los profesores con respecto al tratamiento de los contenidos.

La disponibilidad de la versión en inglés editada el 2006 de la “Guía de Matemáticas de primaria para profesores japoneses” del año 1999, los textos escolares editados en inglés por las editoriales Gakkoh Tosho (Nara, 2006) y Tokyo Shoseki (Hironaka y Sugiyama, 2006), y las guías para maestros elaboradas por especialistas hondureños con el apoyo de especialistas japoneses, haciendo referencia a libros de texto japoneses y editadas en español en el marco del proyecto PROMETAM (2005, 2007) en Honduras, auspiciado por JICA (Agencia de Cooperación Internacional del Japón), constituyeron fuentes en español para comprender las orientaciones de la enseñanza de la multiplicación en Japón.

Fuentes complementarias están constituidas por planes de clases y algunas publicaciones de docentes investigadores japoneses e investigadores de reconocimiento internacional que han participado en los últimos 4 años en el marco de la cooperación internacional del foro APEC (<http://criced.tsukuba.ac.jp/math/apec>).

El análisis que hemos realizado en torno a la organización de la aritmética en el currículo japonés muestra coherencia entre la ampliación del ámbito numérico y la introducción de la multiplicación de los números naturales. En efecto, se introduce en segundo básico la multiplicación, cuando el alumno está iniciando el estudio de las decenas y centenas. De este modo rápidamente el programa oficial, Guía de Enseñanza, integra la notación decimal con las operaciones de suma y de multiplicación, lo que favorece en el alumno la comprensión de los algoritmos de operación.

La Guía de Enseñanza presenta la siguiente secuencia para los primeros tres grados:

	Números	Las cuatro operaciones
1º grado	De dos cifras	<ul style="list-style-type: none"> • Adición y sustracción de números de una cifra y casos simples de dos cifras
2º grado	De cuatro cifras	<ul style="list-style-type: none"> • Adición y sustracción • Concepto de multiplicación • Tabla de multiplicar y sus propiedades
3º grado	De seis cifras	<ul style="list-style-type: none"> • Multiplicación • División con una cifra en el divisor • Adición y sustracción simples con números decimales y fracciones.

- *Secuenciación en la enseñanza de la multiplicación*

Los textos escolares, consistentes con los programas de estudio y las evidencias de la práctica del Estudio de Clases, dejan ver algunas regularidades en la secuenciación de la enseñanza de la multiplicación. Las regularidades llevan a la identificación de elementos comunes en las unidades, secuencias o lecciones de los textos.

Las secuencias observadas en distintos textos permiten identificar dos grandes etapas en la enseñanza de la multiplicación de números naturales, a saber:

- 1 El concepto de multiplicación y las tablas con sus propiedades.
- 2 Las estrategias para multiplicar números de más de una cifra y el algoritmo de la multiplicación.

Los textos de la editorial Gakkoh Tosho (2006) establecen la secuencia siguiente:

Fase 1: Segundo semestre de Segundo grado

(Ámbito de números hasta el 100). Situaciones asociadas a la multiplicación. En primer lugar la multiplicación $\times 2$, $\times 3$, $\times 4$ y $\times 5$. Luego, la multiplicación $\times 6$, $\times 7$, $\times 8$, $\times 9$ y $\times 1$.

Identificación de propiedades en la tabla (de los múltiplos de 5, casos de asociatividad).

Fase 2: Primer semestre de Tercero grado

(Números hasta 1000, arreglos de 10 y de 10×10). Más propiedades: Conmutatividad. Aumento y decremento constante en tabla. Distributividad. Multiplicación $\times 0$, $\times 10$ y $\times 100$. Multiplicación de números de 1×2 cifras. Multiplicación vertical de 2×1 cifras, de 3×1 cifras. Multiplicación mental de 2×1 cifras. Multiplicación escrita de 4×1 cifras.

Fase 3: Segundo semestre de Tercero grado

(Ámbito de números mayores que 1000). Multiplicación de 2×2 cifras. Situaciones que llevan a la forma vertical abreviada.

El texto del primer semestre de segundo grado de la editorial Gakkoh Tosho trata cómo medir longitudes en cm antes de la Fase 1 del estudio de la multiplicación, por lo que las situaciones que hacen referencia a cantidades en la fase 1 consideran cantidades discretas y medidas muy simples, como trozos de cinta de dos centímetros de longitud. En general, las situaciones que llevan a la conceptualización de la multiplicación hacen referencia a

platos con frutas, bolsas con dulces, grupos de personas y representaciones como filas y columnas de bolas o círculos y torres o columnas de cubos. La representación por medio de torres de cubos facilita la visualización de las medidas de longitud, tema que se retoma tras la primera Fase del estudio de la multiplicación.

Los textos elaborados en español para Honduras en el proyecto PROMETAM, fueron ideados por profesores japoneses. Estos textos muestran una secuencia algo diferente a la de la editorial antes referida. Por ejemplo, al tratar la multiplicación por 7 en el texto del maestro se hace la siguiente observación "De ahora en adelante aparece en los problemas las cantidades continuas..." Otra diferencia con la secuencia referida es el momento en que se enseña a multiplicar por cero. La multiplicación por 0 es tratada junto a la multiplicación por 1, en cambio en la secuencia de la editorial Gakkoh Tosho la multiplicación por cero se realiza en la Fase 2, tras deducir las propiedades de la tabla de multiplicar.

Si bien existen entre los textos de distintas editoriales y años variaciones en el orden y diferencias en las variables que determinan el avance conceptual, se observa que los textos evitan introducir conceptos usando nociones no trabajadas previamente por el alumno. Esto es, las secuencias de enseñanza son estrictas con respecto al análisis de tareas que implica su diseño.

En los textos del proyecto PROMETAM se presenta una unidad en segundo grado con 5 lecciones, otra unidad en tercer grado con 3 lecciones y otra en cuarto con 4 lecciones.

Multiplicación en Segundo grado:

Primera lección: Concepto, símbolo y operación de la multiplicación. Segunda lección: La construcción y memorización de las tablas del 2, 5, 3 y 4. Tercera lección: Construcción y memorización de las tablas del 6, 7, 8 y 9. Cuarta lección: La multiplicación con 1 y con 0. Quinta lección: La tabla de la multiplicación, la conmutatividad en la tabla y la regularidad del incremento en la tabla según el multiplicando.

Multiplicación en Tercero grado:

Primera lección: Multiplicación de múltiplos de 10 y 100 por unidades. Segunda lección: Multiplicación de números de dos cifras por números de una cifra. Tercera lección: Multiplicación de números de tres cifras por números de una cifra.

Multiplicación en Cuarto grado:

Primera lección: Multiplicación de números de 4 ó 5 cifras por números de una cifra. Segunda lección: Multiplicación de decenas por centenas. Tercera lección: Multiplicación de números de dos cifras entre sí. Cuarta lección: Multiplicación de números de tres cifras entre sí.

Los textos 2006 en inglés de la editorial Tokyo Shoseki también inician la multiplicación en segundo grado, sus unidades son:

Fase 1: Segundo semestre de segundo grado

(Ámbito de números hasta el 1000) Concepto de multiplicación. Multiplicación $\times 2$, $\times 5$, $\times 3$ y $\times 4$. Multiplicación $\times 6$, $\times 7$, $\times 8$, $\times 9$ y $\times 1$ y propiedades de la tabla.

Fase 2a: Primer semestre de tercero grado

(Números hasta 1000) Multiplicación por 0. Propiedad Conmutativa y del aumento constante en la tabla. Multiplicación de unidades por decenas y centenas.

Fase 2b: Primer semestre de tercero grado

(Incluye números mayores que 1000) Multiplicación con números de 2 cifras y de 1 cifra. Multiplicación con números de 3 cifras y 1 cifra.

Fase 3: Segundo semestre de tercero grado

(Ámbito de números mayores que 1000) Multiplicación por decenas. Multiplicación de números de 2 cifras entre sí. Cálculo mental.

Fase 4: Primer semestre de cuarto grado

(Ámbito de números mayores que 1000) Multiplicación números de 3 cifras entre sí. Multiplicación de múltiplos de 10 y múltiplos de 100. Propiedad distributiva y el algoritmo de la multiplicación.

Orientaciones gubernamentales para la enseñanza de la multiplicación en Japón y en Chile

De la Guía para la Enseñanza se desprende que los profesores en Japón deben enseñar la multiplicación de números naturales en segundo y tercer grado. En segundo grado se estudia el significado de la multiplicación, las tablas de multiplicar y sus propiedades. Las orientaciones curriculares establecen que más allá de la memorización los alumnos construyan por sí mismo las tablas en función de su significado y el conocimiento previo de la adición. Para

tercer grado, los Programas establecen que se estudie la multiplicación de números de hasta tres cifras por números de dos cifras. De este modo, y en conformidad a los textos escolares revisados, la multiplicación es enseñada en un lapso de 3 semestres a partir del segundo semestre de segundo grado.

Esta organización del contenido difiere de la propuesta en los programas de estudio en Chile, según los cuales la enseñanza de la multiplicación de números naturales se inicia en tercero básico y se termina en quinto básico, en un lapso de 5 semestres. Se aprecia que en Japón la enseñanza de la multiplicación se realiza en menos tiempo y se comienza con niños de menor edad. Además, se logran aprendizajes más eficientes, según lo corroboran estudios internacionales. Existen varias razones que explican este fenómeno, entre ellas se destaca la idiosincrasia del pueblo japonés que vela por una educación de calidad para su población, y en ello estriba una organización curricular minuciosa, estrategias de enseñanza coherentes, apoyo de los padres y un soporte institucional gubernamental que garantiza condiciones de vida básica para toda su población escolar. No se trata sólo de recursos económicos, pues países con niveles económicos similares no siempre tienen los mismos logros. El Estudio de Clases ha favorecido la concreción de un currículo nacional articulado y de estrategias de enseñanza eficientes, las cuales se ponen de manifiesto en los textos de enseñanza y planes de clases, como podrá apreciarse en las siguientes páginas.

- Orientaciones desde la Guía para la enseñanza en Japón

La componente aritmética (entiéndase matemática) de la Guía para la Enseñanza ofrecida por el Ministerio de educación de Japón (MEXT, 1999), traducida el 2005 al inglés, señala tres objetivos de la asignatura de matemáticas para segundo grado, los que se refieren a números, cantidades y figuras geométricas. El objetivo referido a los números dice: "A través de actividades, tales como la manipulación concreta, ayudar a los niños a profundizar su comprensión del concepto y representación de los números. Además, ayudarlos a comprender la adición, sustracción y multiplicación, y a que sean capaces de hacer cálculos básicos como también ayudarlos a hacerlos capaces de aplicarlos adecuadamente". Para tercer grado, se formulan 4 objetivos, incorporando a los temas anteriores un objetivo referido a manejo y representación de datos. El objetivo referido a los números dice: "Ayudar a los niños a ser capaces de usar números decimales y fracciones para representar en

el tamaño de las cantidades. Además, ayudarlos a entender el significado de la multiplicación y división de números enteros y que sean capaces de hacer cálculos básicos, como también ayudarlos a apreciar su utilidad y ser capaces de aplicarlos correcta y eficientemente de acuerdo a sus propósitos”.

Con respecto a los contenidos en la dimensión “números y operaciones”, la guía establece que:

“El significado de la multiplicación y dónde usarla han de enseñarse en segundo grado. La multiplicación se define primero encontrando el tamaño de una unidad y luego encontrando el valor de las cantidades de un cierto número de unidades. Los resultados de la multiplicación pueden ser encontrados por sumas iteradas. En este nivel es importante dominar la tabla de multiplicar y la multiplicación de números de una cifra.

En tercer grado, se espera que los niños entiendan el significado de la división y donde es usada. La división incluye el caso de división por partición y el caso de la división por cociente. Para describir esto con respecto a la multiplicación, que se explicó arriba, uno corresponde a encontrar la cantidad por una unidad, y el otro corresponde a encontrar la cantidad de una unidad en un número. Sin embargo, la misma operación puede ser usada para ambas situaciones, y es deseable que los niños puedan considerar ambas situaciones como una operación.

Es importante saber que la multiplicación es la operación inversa de la división, y que uno puede chequear el cálculo de una operación usando la otra operación”.

... “Los niños debieran ser capaces de entender la multiplicación como (cierto monto de una unidad) x (tamaño proporcional en la unidad) = (monto total)”.

... “Para la multiplicación y división de números enteros, es importante dominar la multiplicación con multiplicandos de tres cifras en tercer grado.

... “Para cálculos que usen números con más de 3 cifras, es importante animar a los niños a encontrar cómo resolverlos por ellos mismos, usando lo que ya han aprendido. Se recomienda evitar, en los cursos superiores, cálculos complejos y animar a los niños a usar calculadora a partir de quinto básico. Para el cálculo mental, es necesario que sean capaces de multiplicar números de una cifra por números de 2 cifras en tercer grado”.

“En segundo grado debieran ser capaces de entender y utilizar la propiedad distributiva y la propiedad conmutativa de la multiplicación”.

“En tercero grado debieran entender y ser capaces de usar para calcular multiplicaciones la propiedad asociativa de la multiplicación y particularmente $Mx(N+U) = MxN+MxU$, con $U=1$ o $U=-1$ ”.

- Orientaciones para enseñar la multiplicación en Chile

Cabe plantear la pregunta ¿en qué difieren las guías oficiales para la enseñanza ofrecidas en Japón a las ofrecidas en Chile? Existen diferencias como “en Chile se sugiere enseñar la multiplicación y la división al mismo tiempo; se sugiere estudiar la tabla del 10, y no la del 3 y del 4, tras estudiar las tablas del 2 y del 5; se sugiere iniciar el estudio de la multiplicación como un modelo que hace referencia a proporcionalidad; se sugiere estudiar la multiplicación atendiendo a la vez a las magnitudes y a las cantidades discretas... ” ¿Son estas sugerencias claves en la diferencia de logros de aprendizaje por parte de los niños de estos dos países? O bien, ¿esas son sólo diferencias de forma que no afectan los niveles de logros? Es posible que la clave no esté en qué se haga primero o qué se enfatice más, sino más bien en la coherencia interna del sistema de sugerencias que se le provean al profesor. Eventualmente, más allá de las sugerencias ofrecidas, importaría entender cómo las sugerencias se relacionan entre sí, se potencian y no llevan a conflictos.

Por ejemplo, para que los niños comprendan la multiplicación los profesores recurren a situaciones en que los niños piensan en cantidades discretas y cantidades continuas (representadas por medidas). El tema de las magnitudes es clave en el currículo japonés, constituyéndose en uno de los ejes o dimensiones del currículo. En Chile, ese tema es tratado en el subsector de “medio social y natural”. Al revisar los Programas de Estudio de primer y segundo básico chilenos, por ejemplo, se aprecia el uso no técnico de palabras como “cantidad”, “medida”, “magnitud”. Esto es, se usan como parte del vocabulario del profesor adulto y no se consideran como objetos de enseñanza. Se hace referencias a ejemplos con metros, centímetros y litros, y no se considera el significado que esas palabras pueden tener para el alumno. ¿Serán esos detalles importantes en el momento de buscar explicaciones a por qué los niños aprenden más rápido, a menor edad y con mayor efectividad la multiplicación en Japón?

A continuación se presentan algunos antecedentes acerca de las sugerencias

que proveen el Marco Curricular y los Programas de Estudio en Chile con respecto a la enseñanza de la multiplicación de números naturales. Esta presentación tiene dos objetivos en el contexto de este libro. Por un lado, provee información a los profesores chilenos para que atiendan a las exigencias del currículo nacional cuando lleven adelante Estudio de Clases en torno a la enseñanza de la multiplicación, y por otro lado, esta información les favorece la reflexión para mejor entender los aspectos en que difiere la enseñanza de la multiplicación en Japón frente a la propuesta en Chile, de modo que no se cometa el error de simplificar el Estudio de Clases tendiendo a copiar las estrategias que se usan en Japón sin considerar que los alumnos de segundo básico y los mismos profesores en Chile tienen conocimientos previos diferentes a los que se manejan en Japón. Cabe reiterar en este momento que el Estudio de Clases es una herramienta para el desarrollo profesional docente, que de suyo lleva a mejores clases y que favorece el mejoramiento de los planes de clases y las propuestas curriculares a nivel de escuela y, a futuro, a mejores programas de estudio en el país.

- Orientaciones desde el Marco Curricular en Chile

El Marco Curricular en Chile, Decreto Supremo 232 (MINEDUC, 2002), establece los objetivos fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios, para los distintos niveles escolares. Con respecto a la enseñanza de la multiplicación de números naturales establece:

Objetivos fundamentales del Nivel Básico 2 (correspondientes a tercero y cuarto básico):

- Identificar a la multiplicación como operación que puede ser empleada para representar una amplia gama de situaciones y que permiten determinar información no conocida a partir de información disponible.
- Realizar cálculos mentales de productos utilizando un repertorio memorizado de combinaciones multiplicativas básicas y estrategias ligadas al carácter decimal del sistema de numeración y a propiedades de la multiplicación.
- Realizar cálculos escritos de productos utilizando procedimientos basados en la descomposición aditiva de los números y en propiedades de la multiplicación, usando adecuadamente la simbología asociada a esta operación.

- Estimar el resultado de una multiplicación, a partir del redondeo de los términos que intervienen en ella.
- Utilizar la calculadora para determinar productos, cuando la complejidad de los cálculos así lo requiera.
- Formular afirmaciones acerca de propiedades de la multiplicación, a partir de regularidades observadas en el cálculo de variados ejemplos.
- Comparar la multiplicación con otras operaciones estudiadas en cuanto a su significado y a las propiedades utilizadas en los cálculos.

Objetivos fundamentales del Nivel Básico 3 (correspondiente a 5to básico):

- Resolver problemas de diversos tipos, referidos a situaciones multiplicativas.
- Seleccionar una forma de cálculo -oral, escrito o con calculadora- a partir de las relaciones entre los números y las exigencias del problema por resolver.
- Aplicar el cálculo aproximado en la evaluación de situaciones y el control de resultados.

Contenidos mínimos obligatorios para tercero y cuarto básico (Nivel Básico 2):

- Asociación de situaciones correspondientes a una adición reiterada, un arreglo bidimensional (elementos ordenados en filas y columnas) y una relación de proporcionalidad (correspondencia uno a varios) con la multiplicación.
- Utilización de multiplicaciones para relacionar la información disponible (datos) con la información no conocida (incógnita), al interior de una situación de carácter multiplicativo.
- Descripción del significado de resultados de multiplicaciones en el contexto de la situación en que han sido aplicadas.
- Manipulación de objetos y representación gráfica de situaciones multiplicativas y utilización de técnicas tales como adiciones reiteradas, para determinar productos.
- Combinaciones multiplicativas básicas: memorización paulatina de multiplicaciones con factores hasta 10 (Ejemplo: $3 \times 4 = 12$), apoyada en manipulaciones y visualizaciones con material concreto.
- Multiplicación de un número por potencias de 10 (Ejemplo: $23 \times 1\,000 = 23\,000$).

- Cálculo mental de productos utilizando estrategias tales como: descomposición aditiva de factores (Ejemplo: 25×12 como $25 \times 10 + 25 \times 2$), descomposición multiplicativa de factores (Ejemplo: 32×4 como $32 \times 2 \times 2$), reemplazo de un factor por un cociente equivalente (Ejemplo: 48×50 como $48 \times 100 : 2$).
- Simbología asociada a multiplicaciones escritas.
- Prioridad de la multiplicación sobre la adición y la sustracción en la realización de cálculos combinados (Ejemplo: $16 - 4 \times 2 = 16 - 8$).
- Cálculo escrito de productos en que uno de los factores es un número de una o dos cifras o múltiplo de 10, 100, y 1000; utilizando inicialmente estrategias basadas en la descomposición aditiva de los factores y en la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición, que evolucionan hasta llegar a alguna versión del algoritmo convencional.
- Uso de la calculadora en base a consideraciones tales como cantidad de cálculos a realizar, tamaño de los números, complejidad de los cálculos.
- Técnicas de estimación y redondeo para controlar la validez de un cálculo y detectar eventuales errores.
- Comparación de variados ejemplos de multiplicaciones con resultado constante y formulación de afirmaciones que implican un reconocimiento de las propiedades en juego:
- Cambio de orden de los factores (conmutatividad).
- Secuencia en que se realizan las multiplicaciones (asociatividad).
- Productos en los que uno de los factores es una suma (distributividad).
- Comparación de variados ejemplos de multiplicaciones en los que intervienen el 0 y el 1 (Ejemplos: $24 \times 1 = 24$; $84 \times 0 = 0$) y formulación de afirmaciones respecto del comportamiento del 0 y el 1 en multiplicaciones.
- Comparación de variados ejemplos de multiplicaciones y divisiones que corresponden a situaciones inversas del tipo: repartir equitativamente entre 5 y luego volver a juntar lo repartido, y formulación de afirmaciones que implican un reconocimiento de la relación inversa entre la multiplicación y la división.

- Estudio comparativo de las cuatro operaciones estudiadas (Ejemplos: la adición y la multiplicación son conmutativas).

Contenidos mínimos obligatorios para quinto básico (Nivel Básico 3):

- Determinar resultados en situaciones correspondientes a otros significados (relación proporcional más compleja, cartesiano y combinaciones).
- Redondear números como estrategia para el cálculo oral, aproximado de productos.
- Utilizar algoritmos de cálculo escrito de productos con factores menores que 100 y con uno de los factores mayor que 100.
- Utilizar calculadora para determinar productos en la resolución de problemas.

Sobre la base de los objetivos fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios fueron elaborados los Programas de Estudio en Chile, los cuales, proveen especificaciones por semestre para el Nivel Básico 2 y por Unidad temática para el nivel NB3.

En la nueva propuesta de ajuste curricular del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2008), las operaciones se han fundido en el eje "Números" (en el currículo vigente corresponde a otro eje denominado "Operaciones Aritméticas"). El nuevo eje "Números" relaciona números, operaciones y campos de aplicación de la matemática.