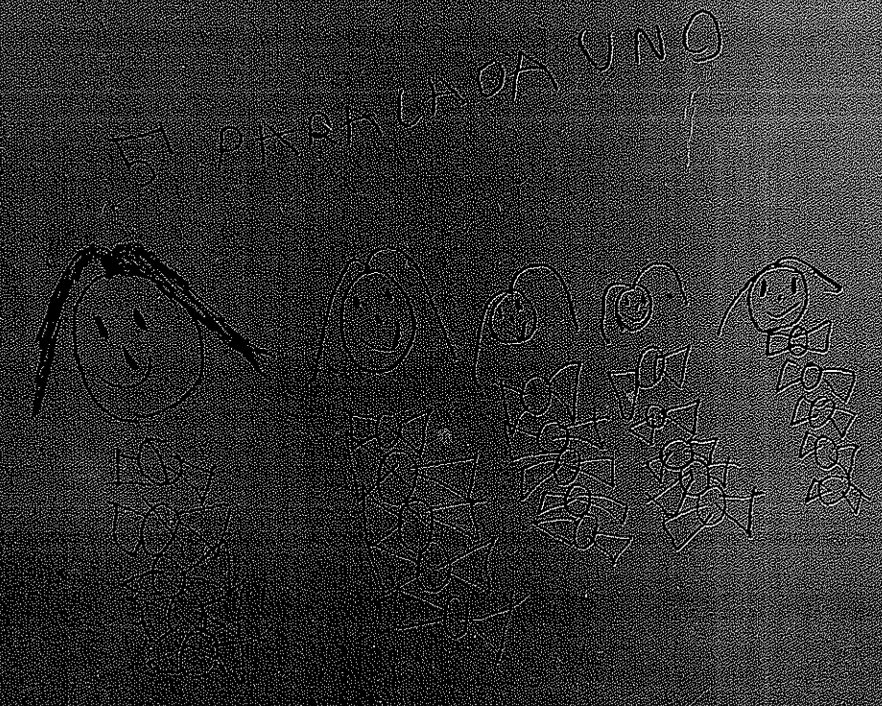
Claudia Broitman

LAS OPERACIONES EN EL PRIMER CICLO

Aportes para el trabajo en el aula



Ediciones
NOVEDADES EDUCATIVAS

Claudia Broitman

LAS OPERACIONES EN EL PRIMER CICLO

Aportes para el trabajo en el aula

Ediciones NOVEDADES EDUCATIVAS
Buenos Aires • México

Broitman, Claudia
Las operaciones en el primer ciclo: aportes para el trabajo en el aula - 1a ed. 3a reimp. - Buenos Aires: Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico, 2010.
96 p.; 26x17 cm. - (Biblioteca Didáctica)

ISBN 978-987-9191-57-6

1. Formación Docente. 2. Matemática. I. Título
CDD 371.1

Coordinación pedagógica: *Ada Kopitowski*
Corrección de estilo: *Susana Pardo*
Diseño de portada: *Analía Kaplan*

1º edición, junio de 1999
1º reimpresión, diciembre de 2000
2º reimpresión, enero de 2005
3º reimpresión, marzo de 2010

Av. Corrientes 4345 - (C1195AAC) Buenos Aires - Argentina
Tel.: (5411) 4867-2020 Fax: (5411) 4867-0220
E-mail: contacto@noveduc.com / www.noveduc.com

Ediciones Novedades Educativas de México S.A. de C.V.
Instituto Técnico Industrial # 234 (Circuito Interior) - Oficina # 2 - Planta Alta
(Ref: Metro Estación Normal) - Colonia Santo Tomás. Deleg. Miguel Hidalgo
México, D. F. C. P. 11340 - Tel/Fax: 53-96-59-96 / 53-96-60-20
E-mail: novemex@noveduc.com - info@novemex.com.mx

ISBN-10 Nº 987-9191-57-9
ISBN-13 Nº 978-987-9191-57-6

Hecho el depósito que marca la ley 11.723

Impreso en Argentina - Printed in Argentina

ÍNDICE

Presentación

La presente obra está compuesta por una revisión de los artículos referidos a la enseñanza de las operaciones en el primer ciclo, aparecidos en la revista *En la Escuela*, en los números 25 a 31.

Es preciso explicitar el enfoque que ha presidido la elaboración de las temáticas abordadas y las propuestas didácticas que se presentan: básicamente, los desarrollos de la didáctica de la matemática francesa, en particular las contribuciones de Brousseau sobre la enseñanza de la división y los de Vergnaud referidos al campo conceptual de problemas aditivos y multiplicativos.

Asimismo, se apoyan en indagaciones y publicaciones realizadas en nuestro país, principalmente por Delia Lerner, Patricia Sadovsky, Irma Saiz, Cecilia Parra y el Equipo de Dirección de Curriculum del GCBA, integrado por Patricia Sadovsky, Cecilia Parra, Horacio Itzcovich y Claudia Broitman.

Por último, se ha adoptado la perspectiva constructivista para los procesos de aprendizaje escolar: los alumnos interactúan con el objeto de conocimiento, reorganizando sus conceptos y procedimientos en dirección a los conocimientos propios de la disciplina.

Los artículos que integran esta publicación no pretenden abordar la totalidad de los problemas relativos a la enseñanza de las operaciones en el primer ciclo. En cambio, se centran en la diversidad de problemas y estrategias de cálculo a ser abordadas en la escuela, como así también en los procedimientos de resolución que los niños utilizan.

Los trabajos presentados tampoco tienen pretensiones de originalidad, pues no responden a resultados de investigación. Más bien, su intención es proporcionar a los maestros algunas orientaciones fundamentadas para examinar, organizar y seleccionar propuestas didácticas.

Esta compilación consta del siguiente material:

a. **"Sumar no es siempre agregar, ni restar es siempre quitar"** presenta un análisis de los diferentes tipos de problemas de suma y resta y los posibles procedimientos y dificultades que tienen los niños frente a cada uno de ellos. Su objetivo es mostrar la diversidad y complejidad de dicho campo de problemas y la necesidad de ampliación hacia nuevos problemas a resolver en la escuela.

b. **"Cambian los problemas, cambian los procedimientos de resolución"** se refiere a las variables que se pueden comandar en los problemas y a su influencia en los procedimientos de resolución de los niños para los problemas de suma y resta. Si bien se profundiza sobre este tipo de problemas, el análisis realizado sobre variables didácticas se puede considerar extensible a los problemas de multiplicación y división.

c. **"Diversas estrategias de cálculo para sumas y restas"** propone un análisis crítico sobre la enseñanza prioritaria del algoritmo vertical y resalta la importancia del trabajo con cálculo mental desde las primeras aproximaciones de los niños al cálculo.

d. **"La enseñanza de la multiplicación en los primeros años"** presenta un análisis de los diferentes problemas de multiplicación que pueden ser abordados en el primer ciclo y los posibles procedimientos de resolución para los mismos. Se proponen problemas para abordar su enseñanza y, por último, se plantean aspectos referidos a estrategias de trabajo sobre las relaciones numéricas y herramientas de cálculo.

e. **"La enseñanza de la división en los primeros años"** incluye diversas clases de problemas a ser abordados en el ciclo, posibles procedimientos y dificultades que pueden tener los niños. Se analizan las relaciones entre estos problemas y los de multiplicación. Por último se presentan diversas estrategias de cálculo para ser abordadas en el aula.

La preocupación central de las propuestas es promover un trabajo en el aula que favorezca en todos los niños la adquisición de conocimientos cargados de significado y que dicha adquisición sea producida en un clima favorable para la producción y el intercambio alrededor de la actividad matemática.

Se destacan la importancia crucial de los problemas en el proceso de construcción de los sentidos de las operaciones; la diversidad de problemas que se resuelven por una misma operación; la diversidad de procedimientos y de estrategias de cálculo para resolver un mismo problema.

Se ha enfatizado el trabajo colectivo de comunicación, difusión e intercambio de ideas, así como la relevancia de que los niños tomen conciencia de aquello que han hecho, de modo que les sea posible reutilizarlo en nuevos problemas.

Estos artículos insisten en que, para poder instalar en el aula un trabajo acorde con las características mencionadas, se requiere un tipo de intervención docente. Básicamente, que esté dirigida a proponer situaciones que involucren un desafío para los alumnos, a trabajar en consecuencia con diferentes estrategias y respuestas, con las dificultades y errores. Se destaca, también, la importancia de su rol para dar lugar al avance de estrategias por parte de los alumnos y a la reorganización constante y progresiva de sus conocimientos.

En síntesis, hemos tratado de argumentar acerca de la posibilidad de generar una actividad constructiva por parte de los niños allí donde la enseñanza ha sido el lugar paradigmático de la repetición, la ejercitación y la memorización.

Parece importante hoy -en tiempos de sobrevaloración de la eficacia y eficiencia individual- promover en el terreno de la enseñanza de las operaciones la experiencia de "hacer matemática en el aula" como una construcción social.

Por último, me permito mencionar que se incluyen algunos trabajos de niños que pertenecen a la Escuela para el Hombre Nuevo y a la Escuela N° 2 del DE 14, "Mariano Acha", a cuyos equipos directivos agradezco la confianza y la autorización para publicarlos. Agradezco, también, a todos los docentes de primer ciclo de diferentes escuelas, con los que he compartido aulas, especialmente a Mariana López, Pía D'Ovidio, Marcela Subijana, Daniela Gallipolli, Florencia Fiori, Marisa Ravitti, Roxana Liniestky, Fernanda Penas, María Scheiner, Mariana Payró y Claudia David.

1

Sumar no es siempre agregar ni restar es siempre quitar

Durante mucho tiempo se ha considerado que los niños debían aprender primero a realizar las cuentas de sumar y restar para luego aplicarlas en situaciones problemáticas. Al hacer una recorrida por los diferentes textos escolares o por nuestra propia práctica con alumnos, reconoceremos dicho "orden" como así también seguramente la importancia asignada al manejo de las cuentas como principal objeto de aprendizaje en los primeros años.

Aprender a sumar y a restar ha sido identificado con el aprendizaje de los algoritmos. Pero la investigación didáctica y las prácticas educativas contemporáneas van en otra dirección: los niños deben aprender en la escuela conocimientos provistos de sentido (Brousseau, 1986). Es decir, conocimientos funcionales, que puedan ser utilizados para resolver situaciones problemáticas. Ahora bien, podemos preguntarnos: ¿qué significa, entonces, saber sumar? ¿Qué significa saber restar? ¿Cuáles son las relaciones entre las cuentas y los problemas?

Para los alumnos no es suficiente poder resolver las cuentas para estar en condiciones de tomar decisiones acerca de su empleo. La construcción del sentido de los conocimientos matemáticos involucra, por lo tanto, diferentes aspectos: la suma y la resta incluyen tanto el dominio de diversas estrategias de cálculo (entre las cuales están los algoritmos) como el reconocimiento del campo de problemas que se resuelven con dichas operaciones.

Hoy se sabe, gracias a numerosas investigaciones, que la construcción de estos conocimientos lleva varios años a los niños. Desde esta perspectiva es posible cuestionarse la clásica distribución de la suma y la resta como "temas de enseñanza" de primer año, la multiplicación como "tema" de segundo, y la división de tercero, etcétera. Será necesario asumir la complejidad y el largo plazo de estos aprendizajes (Vergnaud, 1976). En los diferentes años se precisará generar condiciones para que los alumnos continúen ampliando tanto el dominio de variadas estrategias de cálculo como de los problemas que dichas operaciones permiten resolver.

Si se considera entonces que la suma y la resta son un contenido a ser abordado durante todo el primer ciclo, ¿cómo se pueden ir ampliando progresivamente los conocimientos de los niños sobre estas operaciones? ¿Qué problemas de suma y resta podrán resolver los niños en cada año? ¿Cuáles les presentan dificultades, aun cuando ya dominen los cálculos?

Diferentes problemas de suma y de resta

Los manuales escolares han definido clásicamente la suma y la resta como las acciones de "agregar" y "quitar". Los problemas en los que se trata de agregar o quitar elementos de una colección son problemas de suma y resta respectivamente, pero esto no significa que todos los problemas puedan ser englobados dentro de dichas acciones.

Hay un amplio espectro de problemas de suma y resta. Adoptamos para este punto las ideas de Vergnaud (1976, 1981) acerca del campo de los problemas aditivos. Los problemas de estructura aditiva son todos aquéllos para cuya resolución intervienen sumas o restas y no pueden estudiarse en forma separada, pues pertenecen a una misma familia, a un mismo "campo conceptual". Vergnaud propone una clasificación de problemas según estén involucrados **medidas, estados relativos** o **transformaciones**. Veamos el significado de estos últimos conceptos a partir de estas tres situaciones.

" Laura tiene 5 figuritas rojas y 3 figuritas verdes. En total tiene 8 figuritas."
"Laura tiene 5 figuritas y gana 3 en un partido. Ahora tiene 8 figuritas."
"Laura tiene 5 figuritas y Malena tiene 3 más que ella. Malena tiene 8 figuritas."

Aunque las tres pueden ser expresadas mediante la operación 5 + 3 = 8 , las relaciones entre esos números son diferentes en cada una de ellas. En la primera, 5 y 3 son **medidas** de la colección de figuritas, en tanto 8 es la medida de la colección total. El 8 no representa ningún cambio en la cantidad de figuritas, sólo expresa la unión de ambas colecciones. En el segundo caso, el 5 es la medida de la colección de figuritas, pero el 3 representa una **transformación**. Laura ha ganado 3 y su colección ha aumentado. Una transformación positiva se ha operado sobre una medida. El estado inicial de la colección era 5 y el estado final es 8. La transformación tuvo lugar en un tiempo: antes tenía 5 y ahora tiene 8.

En la tercera situación, el 5 es la medida de una colección, pero el 3 no representa una medida como en la primera, ni una transformación como en la segunda. El 3 en este caso representa una **relación** entre la cantidad de figuritas de ambas niñas.

Estos tres problemas, **desde el punto de vista matemático son equivalentes, pero no lo son desde el punto de vista de los niños.** Numerosas investigaciones muestran (Vergnaud, 1981, 1982; Fayol, 1986) que existen diferen-

cias de varios años entre el reconocimiento de algunos tipos de problemas de suma y de resta. Esto no significa que sea suficiente "el paso del tiempo" para que los niños los reconozcan. Por el contrario, a causa de las dificultades que les son propias, distintos problemas de suma y resta deben ser abordados como objeto de estudio en la escuela para que sean efectivamente reconocidos por los niños. En consecuencia, el estudio de la suma y la resta precisa ser encarado a lo largo de varios años.

Muchos problemas para las mismas cuentas

Sobre la base de la distinción entre medidas, estados relativos y transformaciones, se pueden clasificar las relaciones numéricas aditivas en seis categorías. A la vez, en el interior de cada una de estas últimas encontraremos diferentes clases de problemas.

Esta clasificación es una herramienta interesante para pensar en la distribución por años de la enseñanza de la suma y la resta: ¿Qué tipos de problemas habitualmente se plantean en cada uno? ¿Cómo secuenciar su diversidad?

No es esperable que entre los tres años sean distribuidas todas las clases de problemas, pero sí que se aborden a lo largo de diferentes años variados sentidos de la suma y la resta.

Aclaramos que los nombres de las diferentes categorías o subclases de problemas no se presentan para ser comunicados a los niños, sino como instrumento de trabajo entre los docentes para seleccionar, comparar, analizar y proponer diferentes problemas a sus alumnos.

Para presentar los diferentes tipos de problemas se ha optado por plantear situaciones con el mismo contexto, los mismos números, con textos breves para identificar mejor las diferencias entre los problemas y el rol que juega cada uno de los números involucrados.

1. Composición de dos medidas

Ejemplo:

"Laura tiene 5 figuritas y Malena tiene 6. En total tienen 11 figuritas".

Como ya se ha planteado, 5 y 6 son medidas de ambas colecciones y 11 es el resultado de una composición de medidas. A partir de esta situación, podemos encontrar dos tipos de problemas: si la incógnita es encontrar alguna de las medidas (ver a), o bien si es encontrar el total (ver b).

a. El problema *"Laura y Malena tienen juntas 11 figuritas. Si Laura tiene 5, ¿cuántas tiene Malena?"* se resuelve con la operación 11 – 5 = 6. Muchos niños -dado el tamaño de estos números- podrán resolverlo sin hacer la resta, procediendo por conteo a partir de 5: 6, 7, 8, 9, etc., o bien buscando un número que sumado a 5 dé 11 y pensar, por ejemplo, 5 + 5 = 10 y si le agrego 1 para que sea 11 es 6.

Justamente, abordar este tipo de problemas implicará trabajar a partir de los procedimientos de conteo y de suma para que en otros problemas con números más grandes los niños puedan reconocer que se resuelven con una resta.

Por ejemplo:

"Laura y Malena tienen entre las dos $ 159. Si Laura tiene 46, ¿cuánto tiene Malena?"

tiene una estructura equivalente al anterior, pero el tamaño de los números dificulta u obstaculiza el procedimiento de ir contando de a 1 o de probar con un número hasta que se encuentre el valor de la incógnita.

Considerar como objeto de trabajo este tipo de problemas significa plantearles a los alumnos otros similares, primero con números pequeños y luego con números más grandes, en donde se discuta la diversidad de procedimientos posibles y se analice como procedimiento económico la utilización de la resta.

A partir de estos análisis y de las conclusiones a las que se arriba en la clase -por ejemplo: *"estos problemas se pueden resolver restando"*, *"se puede hacer de muchas formas, pero restar es la más corta"*, etc.-, los niños estarán abordando el aprendizaje de un nuevo sentido de la resta. Este sentido podrá ser abordado a fines de primer año y especialmente en segundo.

b. Si el problema es, en cambio, *"Laura tiene 5 figuritas y Malena tiene 6. ¿Cuántas tienen entre las dos?"*, encontramos una situación que posiblemente no tenga ninguna dificultad, incluso en el inicio de la escolaridad primaria. Es uno de los sentidos de la suma que primero reconocen los niños.

2. Una transformación opera sobre una medida

Ejemplo

"Laura tenía 5 figuritas y ganó 6. Ahora tiene 11."

En esta situación se opera una transformación en el tiempo sobre las medidas de la colección. Al principio (estado inicial) Laura tenía 5 figuritas. La transformación (positiva porque su colección aumentó) hace que luego tenga 11 (el estado final).

A partir del esquema:

Estado inicial (Ei) – Transformación (T) – Estado Final (Ef)

se encuentran seis tipos de problemas diferentes, según que la transformación sea positiva o negativa y según el lugar de la incógnita:

a. Transformación positiva. Incógnita en el estado final.

"Laura tenía 5 figuritas, ganó 6. ¿Cuántas tiene ahora?"

En este caso, el sentido de la suma que está en juego tampoco es muy complejo para los niños. El clásico sentido de la suma como "agregar" fácilmente es reconocible por los alumnos de primer año como un problema que se resuelve con una suma.

b. Transformación positiva. Incógnita en el estado inicial.

"Laura ganó 6 figuritas. Ahora tiene 11. ¿Cuántas tenía antes de jugar?"

La búsqueda del estado inicial es para los niños mucho más compleja. Diversas investigaciones (Vergnaud, 1981, Fayol, 1986) muestran que entre los niños que resuelven sin dificultades problemas de búsqueda del estado final, sólo la mitad logra resolver problemas de búsqueda de estado inicial. En este caso, averiguar cuánto tenía "antes de jugar" implica un cambio temporal. Suelen ser más fáciles los problemas en los cuales aquello que hay que averiguar permite aplicar una transformación siguiendo una cronología con el tiempo real: "se averigua después aquello que efectivamente sucedió después". En este problema, en cambio, se precisará reconstruir la situación para comprenderla e interpretar que había una colección desconocida inicial menor a la colección final dada.

Por otra parte, para resolver este problema hay que restar 6 a 11. Sin embargo, es un problema en el que "se ganó". ¿Puede un problema en el que se "ganan" figuritas resolverse con una resta? Esto no será evidente para algunos niños. Nuevamente, nos encontramos con un sentido de la resta más complejo, que también precisa ser abordado sistemática e intencionalmente en la escuela para ser reconocido por todos los niños.

c. Transformación positiva. Incógnita en la transformación.

"Laura tenía 6 figuritas. Después de jugar se quedó con 11. ¿Cuántas ganó?"

Este tipo de problemas también propone un mayor desafío a los alumnos. Muchos niños identifican el estado final con la transformación y dicen que, en realidad, "ganó 11" en total. Tienen dificultad en reconocer qué se está preguntando. Se trata de otro problema a resolver con una resta, aunque se refiera a una transformación positiva. Tampoco en este caso a los niños les resulta evidente cuál es la operación.

Es posible que con números muy pequeños los niños utilicen procedimientos de conteo o de complemento, tanteando cuál es el número que sumado a 6 da 11 y logren resolver el problema ¿Pero qué sucede con los números mayores? Para poder reconocer la resta como solución al problema planteado será necesario abordar en el aula una secuencia de problemas similares y tomarlos como objeto de discusión y análisis colectivo.

d. Transformación negativa. Incógnita en el estado final.

"Laura tenía 6 figuritas. Perdió 3. ¿Cuántas tiene ahora?"

Este problema no presenta dificultades a los niños, el sentido de la resta involucrado es de los primeros en ser construido: "perdió y su colección disminuyó". Es bastante sencillo para los alumnos, incluso en el inicio de primer año, reconocer que se trata de un problema de resta.

e. Transformación negativa. Incógnita en el estado inicial.

"Laura perdió 3 figuritas. Ahora tiene 6. ¿Cuántas tenía antes de jugar?"

Aquí vuelven a aparecer las dificultades que encuentran los niños para hallar el estado inicial. Pero ahora, inversamente a lo planteado en el caso "b", se trata de utilizar una suma en un problema "de perder". La suma tiene un nuevo sentido: permite averiguar estados iniciales en problemas de transformaciones negativas. Este sentido de la suma podrá también ser "descubierto" por los alumnos a través de la resolución de variados problemas y de la discusión colectiva acerca de si es "de sumar" o "de restar".

f. Transformación negativa. Incógnita en la transformación.

"Laura tenía 6 figuritas. Después de jugar se quedó con 3. ¿Cuántas perdió jugando?"

Para los niños averiguar una transformación es más trabajoso que encontrar el estado final: en los primeros años no les es sencillo reconstruir la situación y averiguar qué pasó "en el medio".

3. Una relación entre dos medidas

Ejemplo:

"Laura tiene 7 figuritas. Malena tiene 6 figuritas más que Laura. Malena tiene 13."

En este caso, el 6 es un "estado relativo" que vincula al 7 y al 13. Se trata de una relación estática dado que no hay transformaciones, no "cambian" las colecciones.

Las situaciones que vinculan dos medidas varían, en primer lugar, según el tipo de incógnita: la medida de una de las colecciones o la relación entre ambas. En segundo lugar, varían según como se explicita la relación entre ambas: "más que" o "menos que".

Por ejemplo:

- Variación en el lugar de la incógnita:

  a. *"Laura tiene 7 figuritas. Malena tiene 6 figuritas más. ¿Cuántas tiene Malena?"* (incógnita en una de las medidas).

  b. *"Laura tiene 7 figuritas. Malena tiene 13. ¿Cuántas más tiene que Laura?"* (incógnita en la relación).

- Variación en el modo de explicitar la relación (más que, menos que):

  a. *"Laura tiene 7 figuritas. Malena tiene 6 figuritas más. Malena tiene 13."*

  b. *"Malena tiene 13 figuritas. Laura tiene 6 figuritas menos. Laura tiene 7."*

A partir de la combinación de ambas variaciones pueden surgir diferentes problemas. Éstos -también llamados de tipo Comparación (Fayol, 1990)- presentan en muchos casos una exigencia de mayor elaboración conceptual para los niños que algunos de las primeras dos grandes categorías. Aparentemente, un obstáculo para su resolución reside en la comprensión de la situación enunciada.

4. Dos transformaciones se componen para dar lugar a otra transformación

Ejemplo:

"Laura perdió en el primer partido 6 figuritas, en el segundo partido perdió 3 figuritas. En total perdió 9 figuritas."

En este tipo de situaciones, dos transformaciones se componen para dar lugar a una tercera. También aquí existen diversos tipos de problemas según se trate de transformaciones positivas o negativas y según el lugar de la incógnita.

a. Incógnita en la composición. Transformaciones negativas

"Laura perdió primero 6 figuritas, luego 3 figuritas. ¿Cuántas perdió en total?"

En este caso, los niños no suelen tener dificultades para encontrar la composición de dos transformaciones del mismo tipo. Sin embargo, en los primeros problemas que resuelven de esta clase, los chicos suelen decir que "no se puede saber qué pasó si no se sabe cuánto tenía" o bien "que no puede haber perdido 6 si no tenía nada antes".

En general, los problemas planteados exclusivamente en términos de transformaciones generan a los alumnos dificultades: no conocen el estado inicial, ni preguntan por el estado final.

Otro aspecto a señalar es que, a veces, cuando los niños están habituados a resolver problemas similares, se instala en la clase –e incluso algunos textos la proponen como "pista" para resolver problemas– la idea de que todos los problemas de "perder" se resuelven con una resta, porque perder implica "tener menos" que antes. Es interesante discutir con los niños para cuestionar esta idea o afirmación. Este problema es un buen ejemplo de que "algunos problemas de perder se resuelven sumando".

b. Incógnita en una de las transformaciones. Transformaciones negativas

"Laura perdió en el primer partido 6 figuritas. Entre el primero y el segundo partido perdió 9 figuritas. ¿Cuántas perdió en el segundo partido?"

A los niños suele resultarles más complejo encontrar una de las transformaciones que la composición de ambas. En este caso, tienen que hacer una resta para calcular la pérdida del segundo partido y no siempre les resulta evidente. Del mismo modo que para algunas clases de la segunda categoría, este tipo de problemas exige un abordaje específico en el aula a partir de la resolución de varios problemas similares y la reflexión sobre los mismos, de tal manera que les permita a los niños reconstruir la situación. Es decir, este sentido de la resta se propone para ser "estudiado" en la clase.

c. Incógnita en la composición. Transformaciones positivas

"Laura ganó en el primer partido 6 figuritas, en el segundo ganó 3 figuritas. ¿Cuántas ganó en total?"

En este caso, los niños no suelen tener dificultades, pues hay que sumar dos números positivos.

d. Incógnita en una de las transformaciones. Transformaciones positivas

"Laura ganó en el primer partido 6 figuritas. Entre el primero y el segundo partido ganó 9 figuritas. ¿Qué pasó en el segundo partido?"

La pregunta que aquí se formula provoca en los alumnos alguna perplejidad acerca de lo que tienen que averiguar. Otro aspecto ya mencionado es la aparente contradicción: "un problema de ganar se puede resolver restando". Es el caso inverso del analizado en "a".

Con respecto a los procedimientos utilizados, es frecuente que realicen un conteo para tener mayor control de su actividad comparado con el que exige un cálculo. Es posible que también puedan realizar un tanteo con diferentes números, o que precisen realizar una representación gráfica de la situación.

El trabajo en el aula estará dirigido a que los alumnos reconozcan que este problema puede ser resuelto por medio de una resta. Esta operación aparece en la clase como un producto colectivo, aunque haber llegado a esta conclusión no implica que en un nuevo problema directamente todos los niños "confíen" en que la cuenta de restar lo resuelve. Será necesario abordar varios problemas de este tipo. Posiblemente, durante un tiempo los niños sólo puedan reconocer la resta a posteriori de su resolución.

e. Incógnita en la composición. Una transformación positiva y una negativa

"Laura perdió en el primer partido 6 figuritas, en el segundo partido ganó 3 figuritas. ¿Qué pasó en total?"

En este ejemplo deben "agregarse" dos números de signo contrario. Según el tamaño de los números esto se torna más complejo. Los niños suelen decir que "no puede haber perdido más de lo que ha ganado", y exigen conocer el estado inicial de figuritas para evaluar si es posible o no. No reconocen que puede haber perdido más de lo que ha ganado, pues existe un estado inicial de figuritas desconocido. Suponen que, como no se plantea en el enunciado cuánto tenía Laura antes de jugar, empezó a hacerlo sin ninguna figurita, y por lo tanto no pudo haber perdido más de lo que ha ganado.

Seguramente será necesario analizar qué sucedería con diferentes estados iniciales hipotéticos discutiendo acerca de si es posible o no en cada caso. Será necesario plantearlo con números pequeños, inclusive a los niños de tercer año, para que puedan "controlar" los cálculos que hacen y centrarse en el enunciado del problema. A muchos niños del segundo ciclo esta situación les sigue resultando compleja.

f. Incógnita en una de las transformaciones. Una transformación positiva y una negativa

"Laura perdió en el primer partido 6 figuritas, dice que entre ambos partidos perdió 3 figuritas. ¿Qué le pasó en el segundo partido?"

En este último caso se incrementa la dificultad, ya que la operación y el valor de la transformación total dependen de la magnitud de los valores de las transformaciones. Hasta en niños del segundo ciclo de la escolaridad aparecen dificultades para resolver este problema, aun cuando se les plantee con números pequeños. La operación que resuelve el problema es muy simple, sin embargo, el problema no lo es, porque en él está involucrada una compensación entre las ganancias y las pérdidas que dista de ser sencilla.

Este problema de suma y resta puede ser propuesto a finales de tercer año con números muy pequeños. Posiblemente utilicen procedimientos diversos para resolverlo. Se propondrá como trabajo colectivo posterior a la resolución, la búsqueda del cálculo que hubiera permitido encontrar la solución.

5. Una transformación opera sobre un estado relativo

Ejemplo:

"Laura le debía 6 figuritas a Malena. Le devuelve 4. Ahora sólo le debe 2."

En esta situación, el 6 y el 2 son estados relativos, es decir, que vinculan a Laura y a Malena. El 4 es una transformación. En el interior de esta clase de situaciones pueden plantearse diferentes problemas, según si la transformación es positiva o negativa y según si se trata de conocer el estado relativo inicial, el estado relativo final o la transformación que se ha operado. No plantearemos aquí todas las posibilidades porque son similares a las ya analizadas para otras categorías.

6. Dos estados relativos se componen para dar lugar a otro estado relativo

Ejemplo:

"Laura le debe 6 figuritas a Malena, pero Malena le debe 3 a Laura. Laura entonces le debe sólo 3 figuritas a Malena."

En esta situación, los estados relativos 6 y 3 se componen y el 3 es el resultado de la compensación entre ambos. Es bastante similar a la cuarta categoría, en donde dos transformaciones se componen para dar lugar a una tercera, pero la diferencia radica en que en este caso no hay un orden temporal. Hay simultaneidad entre los estados relativos. En este caso, el cálculo del estado relativo final surge de restar 3 a 6, lo cual puede no ser evidente para los niños.

El tamaño de cada uno de los números determina por otra parte el estado relativo que se ha compuesto. En este problema se debe evaluar "quién le debe a quién" además de cuánto le debe. Esto se determina a partir de la magnitud de cada una de las "deudas".

Veamos un ejemplo diferente:

"Laura debe 3 figuritas a Malena y 6 figuritas a Carina. En total debe 9 figuritas."

Aquí, los estados relativos de Laura se suman porque están vinculados a diferentes personas. Estas situaciones pueden variar si la búsqueda está en uno de los estados relativos o en la composición de ambos y, como hemos visto en los ejemplos, si los estados relativos se complementan o compensan entre sí o no.

Los problemas en el aula: un trabajo colectivo

Hasta este momento se han presentado una gama de situaciones y se han destacado las que ofrecen un mayor desafío para los alumnos; justamente por ello proponemos considerarlas como objeto de trabajo en la clase. La ampliación del tipo de problemas que los niños pueden resolver en la escuela exige un trabajo específico. Los problemas aditivos no constituyen una clase homogénea, presentan una estructuración que se desarrolla durante un largo período de tiempo.

Considerar como objeto de enseñanza a los problemas significa asumir su amplitud y su diversidad interna. Seguramente los niños tendrán dificultades para resolver individualmente muchos problemas. Proponemos, en primera instancia, una fase de trabajo individual en la que es esperable que aparezcan variados procedimientos de resolución y diferentes respuestas al problema. (Si todos los niños resolvieran bien el problema y del mismo modo estaríamos ante un problema de reinversión o de aplicación, no en una situación de aprender algo nuevo.)

Una vez que los niños han resuelto individualmente o en parejas el problema, se plantea una instancia de trabajo colectiva. En esta fase se comunican las diferentes respuestas al problema y los procedimientos utilizados. El docente provoca luego un debate para analizar las diferentes respuestas. Es recién en el momento de discusión y de análisis del problema por el conjunto de la clase que puede quedar instalada la solución correcta y posibles modos de resolverlo.

El trabajo colectivo es una nueva oportunidad para que los niños reorganicen aquello que saben sobre los problemas. Con posterioridad a esta fase de debate se subrayan las conclusiones a las que se ha arribado y se registra la solución. En otras clases, el maestro enfatiza algún procedimiento como el más económico. El objetivo de este momento de la clase es que dicho conocimiento sea reinvertido en otros nuevos y para ello será necesario que los niños puedan tomar conciencia de qué han aprendido con este problema.

Fragmentos de una clase ¿de sumar o de restar?

Presentamos un extracto de una clase[1] para ilustrar la fase colectiva de trabajo luego de la resolución individual. En esta clase, la maestra plantea a los niños, a finales de primer año, el siguiente problema perteneciente a la segunda categoría del tipo "búsqueda de estado inicial con una transformación negativa".

"Lucas tiene ahora 25 figuritas. Ayer perdió 15. ¿Cuántas tenía antes de perderlas?"

La docente les propone a sus alumnos que lo discutan y resuelvan en grupos, les entrega una copia del problema, les pide que escriban la respuesta. Anuncia que luego conversarán entre todos sobre el problema. Luego de un tiempo de trabajo en pequeños grupos, les pregunta a sus alumnos:

Maestra: *¿Qué hicieron en cada grupo?*

Un alumno de cada grupo expone:

Alumno del grupo A: *Había que pensar cuántas tenía que tener para quitarle 15. Ya tiene un 5, entonces le saco 10. Nos dio 35.*

Alumno del grupo B (explicando el procedimiento utilizado para sumar ambos números): *Hacemos 20 + 10 = 30 ; 5 + 5 = 10 y 30 + 10 = 40.*

Alumno del grupo C: *Hacemos 25 + 15 y nos dio 40. 25 +10 = 35 y 35 + 5 = 40.*

Alumno del grupo D: *Habíamos hecho 25 – 15, pero a mí se me ocurrió que podía dar 15. Yo había hecho un problema así, el otro día hicimos uno, entonces daba 15.*

Alumno del grupo E: *Hicimos la cuenta 25 – 15 y nos dio 10.*

Alumno del grupo F: *Nos dio 40. Hicimos 20 + 10 = 30 ; 30 + 5 = 35 y 35 + 5 = 40.*

1. Clase conducida por la docente Mariana López, maestra de primer año en la Escuela para el Hombre Nuevo, a quien agradezco el registro de la discusión y el material de sus alumnos.

Transcribimos a continuación un fragmento de la discusión posterior.

Alan: *¿De dónde sale el otro 5?* (preguntando acerca del 5 que algunos chicos "separan" para hacer los cálculos).

Tomás: *Es cuanto tenía antes.*

Gastón: *Yo pongo el 15 y el 5 ya está en el 25.*

Guido: *El 25 también tiene un 15. ¿Viste? Te pregunta antes, antes de perderlas. Antes tenía ese 15 menos.*

Jerónimo: *¡Más!*

Gaby: *¡Era de menos!*

Guido: *¡De más!*

Gastón: *Si yo le saco 25 – 15...*

Guido: *Lo tenía que sumar.*

Gastón: *Mirá, si a 25 -¡ya te lo dije, por si no me entendiste!– le sacan 15...*

Guido: *Es de sumar.*

Tomás: *Te voy a leer el problema a ver si lo entendés.* (Lee el problema.) *Antes de perderlas tenía 40.*

Jerónimo: *Cuánto tenía antes.*

Gaby: *La cuenta es de menos.*

Malena: *¡Es de menos!*

Guido: *¡Es de más! ¡Cuántas tenía antes! Ahora tiene 25. Antes tenía más.*

Diana: *Cada uno lo hizo como pudo...*

Tomás: *Esto es Forum* (aludiendo a un programa televisivo de debate).

Alan: *Si el resultado "daría" 40, ¿cómo haría para sacarle 15 a 25 y que me dé 40?*

Podemos analizar un aspecto de la tarea del docente: en la fase de la discusión que se ha transcripto no da "pistas" acerca de cuál es la respuesta correcta, sino que favorece el intercambio entre los alumnos acerca de dicho resultado. Luego del fragmento presentado continúa la clase, y en esta fase la docente interviene del siguiente modo: retoma lo planteado por los alumnos, se vuelve a analizar lo planteado por el problema, se destaca el resultado correcto, favorece la justificación por parte de los alumnos del mismo, propone modos de "comprobarlo". (Por ejemplo, con cuentas, con dibujos, que muestren que si Lucas antes tenía 40 y perdió 15, ahora le quedan 25.)

Los niños plantean sus dudas y, finalmente, la docente aclara que podía resolverse de diferentes modos (se muestran cuáles), pero que el resultado es 40. Se analizan las respuestas erróneas de los alumnos. Posiblemente la niña que dijo "cada uno lo hizo como pudo" había pensado que tal vez todos estaban bien, como había sucedido en otras clases con problemas abiertos de varias soluciones. Si así fuera sería necesario poner en discusión si este problema tiene una sola solución o varias.

La maestra pregunta a los niños:

Maestra: *¿Por qué a algunos chicos les parece un problema que se resuelve con una cuenta de menos?*

Gaby: *Porque perdió y no ganó.*

Santiago: *Si yo tengo 25 y le pongo 10 y 5 es 40.*

Gastón: *La cuenta no dice cuánto tiene ahora, sino cuánto tenía* ***antes*** (resaltando esta palabra).

El nivel de dificultad experimentado por los alumnos para comprender que había que averiguar lo que tenía "antes" se refleja en la manera en que es resaltado este aspecto por varios niños a sus compañeros. Para estos alumnos, entender que se preguntaba por información sobre el "antes" parecía ser la clave para comprender el problema y por eso lo subrayaban ante sus compañeros que restaban.

La dificultad de Gaby en reconocer que se trataba de sumar cuando era un problema "de perder", muestra otro aspecto mencionado.

Evidentemente, esta discusión no agota el proceso necesario para este aprendizaje. Simplemente es el inicio de un largo recorrido que apunta a instalar la reflexión infantil acerca de si el problema es "de menos o de más". Estas discusiones sientan precedentes para nuevos problemas. Como dijo Malena, la representante del grupo D que habló al principio: "Yo había hecho un problema así el otro día".

Y aunque esta vez su conclusión no fue correcta, podrá aprender que los problemas resueltos otro día le permiten pensar sobre los nuevos y la ayudarán a seguir aprendiendo.

2

Cambian los problemas, cambian los procedimientos de resolución

En el artículo anterior ha sido planteada la diversidad de problemas que presenta Vergnaud a partir de la distinción realizada entre medidas, estados relativos y transformaciones. Se analizaron las distintas dificultades que presentan dichos problemas para los niños, a pesar de la equivalencia desde el punto de vista matemático de los mismos.

En el análisis de las clases de problemas hemos incluido los posibles procedimientos y errores de los niños, éstos últimos vinculados con el reconocimiento de la operación involucrada.

Abordaremos ahora otros aspectos que hacen variar los problemas para el punto de vista de los niños y los posibles procedimientos a utilizar para su resolución.

Los problemas pueden ser más fáciles o más difíciles

Existen cierto tipo de variables (Brousseau, 1987; Vergnaud, 1986, 1996, etc.) en las tareas presentadas a los alumnos, cuya elección influye en las estrategias de resolución que pueden usar los niños y en el grado de complejidad conceptual que involucran. Estas variables pueden ser comandadas por los docentes intencionalmente con el objetivo de provocar cambios en las estrategias de resolución.

Ha sido analizada, para ciertos problemas que presentan mayor dificultad para los alumnos, la estrategia didáctica de presentar inicialmente situaciones con números pequeños para que los niños puedan desplegar diferentes estrategias de resolución, controlar las acciones que realizan, despreocuparse de los cálculos y centrarse en los problemas.

Un ejemplo de problemas que los niños pueden resolver si se trata de números muy pequeños es el siguiente:

"Andrés tenía 7 figuritas antes de jugar. Después de jugar tenía 11 figuritas. ¿Cuántas ganó?"

En este caso, los niños pueden resolver este problema contando a partir de 7. Posiblemente puedan decir 8, 9, 10 y 11. Ganó 4. Es decir que a través de un procedimiento vinculado con el conteo pueden resolver el problema. Otros niños se preguntarán cuánto hay que agregarle a 7 para llegar a 11 y podrán apelar al resultado memorizado de 7 + 4 = 11, encontrando el 4 como solución al problema, o bien pensar 7 + 3 = 10 y 10 + 1 = 11; 3 + 1 = 4.

Pero seguramente, si se presenta este mismo problema con números como 46 y 189, el procedimiento de conteo con una diferencia tan grande los lleve a obtener un resultado que no sea correcto. ¿Por qué? Es posible que muchos alumnos tengan dificultades para controlar simultáneamente el conteo a partir de 46 y a la vez la cantidad de números que van nombrando. Por otra parte, no disponen en memoria de ninguna relación numérica que vincule dichos números, como sí podrían tenerla para 46 y 146.

Puede suceder que algunos niños intenten llegar a 189 a partir de 46 por medio de sumas sucesivas. Por ejemplo, que agreguen 10 sucesivamente al 46 y que cuenten: 56, 66, etcétera. Para ello deberán simultáneamente contar cuántos "dieces" van agregando y a cuánto van llegando.

Tanto el problema que tiene números pequeños como el que tiene números grandes pertenecen a la categoría de problemas de búsqueda de una transformación positiva a partir del conocimiento del estado inicial y del estado final. Sin embargo, para resolver el segundo problema -dado el tamaño de los números- se torna "casi necesario" reconocer que se resuelve por medio de una resta.

Partir de situaciones con números pequeños permite a los alumnos desplegar procedimientos no expertos. Aumentar su tamaño permite al docente provocar en los niños la necesidad de reconocer y utilizar una operación.

Analicemos el siguiente problema:

"Andrés está leyendo un libro que tiene 25 páginas. Si va por la página 20, ¿cuántas le faltan leer?"

Niños de primero o de segundo año frente a dicho problema posiblemente utilicen el conteo (21, 22, 23, 24 y 25) o un cálculo memorizado (20 + 5 = 25).

En el artículo anterior se ha planteado la importancia de la fase colectiva de trabajo para instalar nuevos procedimientos y resaltar las conclusiones a las que se arriba luego del debate, como así también la importancia de la reflexión posterior a la resolución del problema. En este caso será necesario abordar en el aula la diversidad de formas de averiguar la respuesta del problema y, entre otras, resaltar que "también se podía resolver con una resta".

Luego el docente podrá aumentar el tamaño de los números y plantear el problema con números "no redondos". El aumento del tamaño de los números tiene el objetivo de provocar el abandono de los procedimientos de conteo; y el que los números que se presenten no sean redondos se dirige a lograr que a los alumnos no les resulte suficiente con ciertas operaciones memorizadas. Para resolverlo, los niños deberán evocar el análisis posterior a la resolución del problema, es decir, apelar al conocimiento de que "este tipo de problemas también se podía resolver restando". Para poder invertir lo aprendido, en este nuevo problema los alumnos, anteriormente, deberán haber podido realizar un cierto recorrido que les permita ahora "confiar" en la operación.

Es decir, que el tamaño de los números y su "redondez" pueden variarse para posibilitar la aparición u obstaculización de ciertos procedimientos. En algunos casos, los números pequeños posibilitarán que los niños puedan resolver problemas complejos. En otros casos, posteriormente al abordaje de una clase de problemas en el aula, aumentar el tamaño de los números permitirá inhibir la utilización de aquellos mismos procedimientos que en otro momento se intentó que los alumnos desplegaran para provocar el avance hacia otros más económicos.

A estas variables que producen modificaciones en los procedimientos de los niños se las llama variables didácticas (Brousseau, 1987).

El concepto de variables didácticas permite profundizar en el análisis de los problemas. Dicho análisis permite anticipar cuáles podrían ser los procedimientos a ser utilizados por los alumnos en cada situación y evaluar las diferencias entre los mismos.

Algunas de las variables que se pueden comandar intencionalmente y tener en cuenta para comprender la complejidad de un problema son las siguientes.

Los números en juego

Un aspecto a considerar es el rango de números involucrados en la situación. Los números pueden ser grandes o pequeños; evidentemente, los últimos permiten a los niños un mayor grado de control de las acciones que realizan. También los números pequeños permiten apoyarse en procedimientos ligados al conteo.

La proximidad de los números involucrados es otro aspecto a considerar. Por ejemplo, en el siguiente problema:

"Estoy leyendo un libro que tiene 132 páginas y voy por la página 129. ¿Cuántas me faltan leer?"

En este caso, los números no son tan pequeños, pero la corta distancia entre ambos favorece también los procedimientos de conteo (130,131 y 132).

Para evaluar el posible grado de dificultad que puede presentar a los niños una situación, es preciso considerar también si los números son «redondos» o de manejo muy cotidiano (10, 100, 250, 12; etc.). Todos sabemos que es más fácil operar con ciertos números grandes «redondos» que con números más pequeños. Por ejemplo, es más sencillo:

"Estoy leyendo un libro que tiene 250 páginas y voy por la página 100. ¿Cuántas me faltan leer?"

que el mismo problema con los números 64 y 17.

El análisis de esta variable permite anticipar los procedimientos a utilizar por los niños y el grado de control de los cálculos que realizan. Los números pequeños y los números redondos favorecen el uso de procedimientos de conteo, de cálculos mentales sencillos o bien de relaciones memorizadas. El uso de ciertos recursos memorizados permite a los niños «despreocuparse» de los cálculos y centrarse mejor en el desafío de la resolución del problema. Permiten una mayor facilidad para la estimación previa de los resultados y el control posterior.

Es importante analizar esta variable en el marco de una secuencia del trabajo con un cierto tipo de problemas y la intencionalidad de cada clase. ¿Se trata de los primeros problemas que los niños van a resolver de este tipo? ¿Se pretende que reconozcan la operación porque esto ha sido objeto de trabajo durante algunas clases? ¿Se darán problemas similares con diferentes números a distintos alumnos según los procedimientos que hasta ese momento utilizaron?

Los tipos de magnitudes

El rol de los contenidos evocados también es importante al analizar un problema. Para los niños no son equivalentes problemas que involucren figuritas, litros, monedas, centavos, animales o años. Los problemas pueden referirse a magnitudes continuas o discretas. Las magnitudes *discretas* se refieren a aquéllas en las que es posible contar (figuritas, animales, etc.). Las magnitudes *continuas* a aquéllas en las que es necesario medir (tiempo, capacidad, peso, etc.). Operar con magnitudes discretas permite una representación más inmediata de la situación (Documento número 4, Matemática, GCBA, 1997).

Dos problemas aparentemente iguales no lo son para los niños.

Por ejemplo:

"Me dijeron que en esta granja hay 47 animales. Si ya vi 18, ¿cuántos me faltan ver aún?"

"Un señor se va de viaje por 47 días. Si ya pasaron 18, ¿cuántos le faltan aún para volver?"

Evidentemente, el primero les es más sencillo. Especialmente en los primeros años, en los que aún muchas veces recurren a representaciones gráficas para resolver un problema. ¿Cómo representar los días? ¿El de hoy como se cuenta? ¿Vuelve de mañana o de noche?, etcétera.

El análisis de las magnitudes involucradas permite, por lo tanto, realizar un estudio más completo en términos didácticos de las situaciones planteadas a los alumnos. La variable numérica y estas otras aparecen combinadas en cualquier situación. Se trata de combinarlas según el objetivo de la clase.

El orden de presentación de las informaciones

Las informaciones pertinentes para la solución de un problema pueden estar dadas de diferentes maneras: en forma ordenada conforme al desarrollo temporal, en orden inverso a cómo se "produjeron los hechos", o bien "desordenadas".

Por ejemplo, estos dos problemas:

"Ana tenía una caja con varios alfajores. Le regaló 8 a Camila. Se quedó con 10. La caja tenía .... alfajores."

"Calculá cuántos alfajores tenía Ana si le regaló a su hermana 8 y le quedaron 10."

Estas situaciones no son equivalentes para los niños, aunque ambas pertenezcan a una misma categoría (cálculo del estado inicial dado el estado final y la transformación negativa), se resuelvan con la misma operación (8+10=18) e involucren las mismas magnitudes (alfajores).

Especialmente en los primeros años, los niños experimentan más dificultades en la resolución del segundo problema. Éste no presenta un orden cronológico de la información, a diferencia del primero, donde se anuncia que "tenía una cierta cantidad de alfajores", la cual, a pesar de ser desconocida, es organizadora para el alumno. Es una marca temporal (Brissiaud, 1984). Quien empieza a leer el enunciado ya sabe que tenía algo antes, y que posiblemente deba averiguar cuántos.

Es importante tener en cuenta los aspectos vinculados a cómo se organizan las informaciones verbales, dónde está la pregunta, si es una pregunta explícita o es un "lugar para llenar" como en el primer problema, etcétera. Se han observado cambios importantes en niños pequeños en la posibilidad de resolver los problemas frente a modificaciones muy pequeñas del enunciado. El análisis puede permitir comprender la dificultad que tienen ciertos problemas para los niños y abordarlos en la clase como aspectos fundamentales de la comprensión de enunciados.

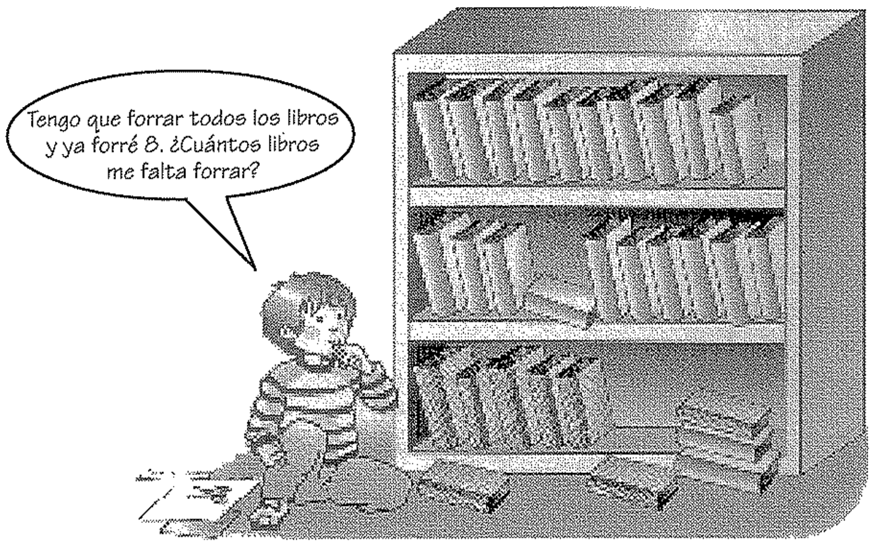
Las formas de representación

El mismo problema matemático puede estar representado de diferentes formas (Vergnaud, 1991). Quien dispone de un cierto conocimiento matemático reconoce un mismo problema en dos situaciones con diferentes formas de representación, pero esto no siempre sucede con los niños.

Algunas situaciones están representadas en lenguaje natural, otras en un diagrama o esquema, por medio de un dibujo, otras mediante una escritura algebraica. Cada una de ellas exige desafíos diferentes.

Los problemas pertenecientes a la misma categoría, con los mismos números y magnitudes, pueden ser distintos entonces para los niños. Es preciso incluir en el análisis de un problema las formas de representación involucradas. Este aspecto está vinculado a la lectura y al tratamiento de la información.

Comparemos por ejemplo estos dos problemas:



Completar la siguiente tabla:

Libros	libros forrados	libros sin forrar
30	8	....

Estos dos problemas se resuelven con el mismo cálculo, tienen los mismos números, las mismas magnitudes. Sin embargo, el segundo es de mucha mayor dificultad, pues la forma de representación utilizada es más abstracta y formalizada. Comprender qué es lo que se les solicita y averiguar e interpretar la información provista es, para los niños, más complejo que en el primer caso.

El tipo de realidad a que se hace referencia

Es evidente que un problema planteado a los niños sobre objetos totalmente desconocidos para ellos genera un obstáculo para la comprensión del enunciado. Según Brissiaud (1984), frente a la lectura de un problema deben responder a dos preguntas: ¿de qué habla? y ¿qué debo hacer? Para tratar la primera les es preciso utilizar conocimientos generales sobre el mundo.

Si el alumno lee el enunciado de un problema sobre un contexto desconocido, no podrá interpretar siquiera cuál es el problema matemático que debe resolver. Para poder construir una respuesta posible de un problema, es necesario tener ciertos conocimientos que permitan estimar una respuesta como plausible.

La preocupación por producir contextos conocidos y significativos para los problemas matemáticos en una clase llevó a considerar que éstos se debían referir a la vida cotidiana o al mundo circundante de los alumnos, siendo así "interesantes" para ellos. Se hablaba de "problemas concretos", "problemas de la realidad de los niños", "temas de su interés". Esta concepción, postulada por las corrientes de la Escuela Nueva y tomadas por la Reforma de la Matemática Moderna, se basó principalmente en la valoración de los intereses de los alumnos.

Ahora bien, considerar como interés de los alumnos a su vida cotidiana tiene algunos riesgos. En principio, deja afuera de la enseñanza problemas planteados en términos puramente matemáticos, por ejemplo:

"Estoy en el número 36 y quiero llegar al 78. ¿Cuántos me faltan?" o bien *"¿Cuántos números hay entre el 26 y el 95?"*

Son llamados también problemas internos y resultan bien interesantes para los alumnos por el desafío intelectual que les provoca.

Brissiaud (1984) describió algunas dificultades que aparecen en las producciones de los niños con los problemas de un mundo muy conocido. Por ejemplo, qué sucede cuando una maestra propone a sus alumnos de segundo año el siguiente problema:

"En un lugar de alquiler de caballos, hay 5 ponys en la caballeriza verde y 12 ponys en la caballeriza naranja. 19 chicos llegan juntos para alquilar. ¿Pueden montar todos en el mismo momento?"

Un niño contesta que no pueden "porque los niños son muy pequeños para montar solos", otro niño contesta que no pueden montar los 19 al mismo tiempo porque "es peligroso, se pueden caer".

El autor muestra que la referencia a una experiencia vivida, lejos de ayudarlos a resolver el problema, los aleja de la situación planteada en él. Sus conocimientos sobre el peligro de muchos niños cabalgando simultáneamente no les permiten considerar el problema como una situación hipotética. Los niños, para resolver este problema, deben ignorar de algún modo su experiencia personal y ubicarse ante él "matemáticamente".

Otros aspectos que influyen en la complejidad de los problemas

La pertinencia de la información presentada para responder a la pregunta

Los problemas pueden incluir informaciones no necesarias para su resolución, en cuyo caso la selección de los datos es parte de la tarea de resolver el problema. Tradicionalmente, los problemas que se les planteaban a los niños en la escuela eran todos similares, con los datos justos, para aplicar una operación aprendida. Evidentemente, es diferente resolver un problema con los datos justos que tener que seleccionar los necesarios según la pregunta planteada.

La intención de incluir en la escuela problemas con datos de más es que los niños tengan que seleccionar cuál es la información pertinente para la pregunta planteada.

Podemos comparar estos dos problemas:

"Analía tiene 18 pesos y quiere comprarse un juego que cuesta 13. ¿Cuánto le sobra?"

"Analía es una nena que recibió para su cumpleaños $ 18 de regalo. Su tía le dio un billete de $10, un billete de $5 y 3 monedas de $1. Ella quiere comprarse un juego para 4 jugadores que cuesta $13. ¿Cuánto le sobra?"

En el segundo planteo, el niño tiene que realizar una lectura de la información provista en el enunciado, determinar cuáles son los datos pertinentes y cuáles innecesarios. Posiblemente muchos niños utilicen los datos innecesarios y esto deba ser abordado en la clase como tema de trabajo. En este sentido, dicho aspecto otorga mayor o menor complejidad a un problema y puede influir en el tipo de respuestas que aparezcan. Su inclusión en el aula permite ampliar el tipo de decisiones que los niños tienen que tomar en el momento de resolver un problema.

Además de las variables recientemente analizadas, se han investigado también cómo influyen otros aspectos sobre el punto de vista infantil en un problema. Algunas otras variables estudiadas (De Corte y Verschaffel, 1985, 1987, citados en Fayol, 1990) son: el vocabulario, la longitud del enunciado, el lugar de la pregunta, el tiempo verbal utilizado (Bovet, 1978, mencionado en Brun, 1990), etcétera.

Se han dado diversos criterios para examinar los problemas de suma y resta teniendo en cuenta, por un lado, el aspecto semántico de los problemas, es decir, el significado de cada uno de los números en juego (en el primer artículo) y por otro lado algunas variables que siempre están presentes en un problema. Éstas son el tamaño de los números, el tipo de magnitudes, la forma de presentar y organizar las informaciones y las preguntas. Todas ellas generan mayores o menores dificultades en los niños en la resolución de un problema.

Sin embargo, comprender la cantidad de factores que influyen en la complejidad no significa que debamos evitarla, proponiendo a los niños problemas siempre con los datos justos, con números pequeños y redondos, con la información ordenada. Se trata, por el contrario, de plantear diversos tipos de enunciados, manejando las variables de tal manera que se gradúen o compensen las dificultades entre ellas.

Además, es conveniente establecer secuencias de problemas que provoquen avances en los conocimientos de los niños.

Al incrementar la variedad de los componentes o las relaciones involucradas en un problema asumimos el "riesgo" de que los niños tengan dificultades en su resolución. Pero es un riesgo que vale la pena correr. Desde esta modalidad de trabajo se espera que los niños lleguen a diferentes respuestas y obtenidas por diferentes caminos. El trabajo posterior a la resolución de los problemas será el que permita una fase de reflexión y análisis sobre los mismos. El rol del docente cobra sentido justamente con aquellos problemas en los que aparece una variedad de respuestas y una variedad de procedimientos.

Este análisis permite diversificar el tipo de problemas de suma y resta a ser planteados a nuestros alumnos de primero, segundo y tercer año y favorece la interpretación del origen de algunas dificultades que experimentan los niños frente a ciertos problemas. (Es frecuente que los maestros piensen: "Este problema hoy a los chicos no les salió y era igual que el que habíamos hecho la semana pasada". Es posible que los problemas fueran muy similares, equivalentes para el docente, pero no para el punto de vista de los niños.)

Procedimientos de resolución para los problemas de suma y resta

Se ha señalado que muchos niños están en condiciones de resolver algunos de los problemas más complejos si el tamaño de los números les permiten utilizar diferentes estrategias de resolución. Hay estudios acerca de la diversidad de procedimientos que utilizan los niños (Fayol, 1990).

En las clases, estos procedimientos pueden ser objeto de análisis y de discusión y es importante aclarar que no son "niveles" que los niños deben atravesar. Por el contrario, los mismos niños utilizan uno u otro según el problema. Se ha mostrado que existe una fuerte correlación entre el tipo de problema y el procedimiento que la mayoría de los niños utiliza.

Anticipar los procedimientos posibles exige un análisis del problema. De tal modo, no es posible plantear procedimientos en forma general para todos los problemas de suma y resta. Es un trabajo a realizar frente a cada uno, pues, como hemos intentado mostrar, influyen numerosos factores.

Por otra parte, es imposible anticipar los procedimientos que utilizarán los niños sin saber cuáles son aquellos conocimientos de los cuales disponen. Por ejemplo, en un problema puede ser un procedimiento apelar a la suma memorizada de 5 + 5 = 10. Obviamente, esto es posible en un grupo de niños que dispone de dicho conocimiento.

De todos modos, se han estudiado algunos tipos de procedimientos que suelen utilizar los niños y que -ya hechas las aclaraciones acerca de los límites de su generalidad- creemos útil compartir. En esta enumeración se incluyen procedimientos no algorítmicos para resolver problemas de suma y de resta.

La construcción del conocimiento del campo de problemas sobre la suma y la resta se hace simultáneamente con la construcción de las estrategias de cálculo. Los niños son capaces de resolver gran cantidad de problemas de suma y resta sin conocer la "cuenta" de sumar o de restar. En otros casos, aunque conozcan las cuentas, utilizan otros procedimientos, porque no reconocen cuál es la operación que resuelve el problema, o bien porque en ocasiones es más sencillo recurrir a otros caminos.

Algunos procedimientos para las sumas son:

a. Reunir físicamente las colecciones y contar los elementos a partir de uno.

b. Representar las colecciones con ayuda de los dedos, gráficamente o con símbolos (palitos, por ejemplo) y luego contar el total. Hay una imitación o simulación de la situación descripta.

c. Tanto para el procedimiento "a" como para el "b" es posible contar a partir del primer cardinal (en este caso se realiza un sobreconteo).

d. Sumar, es decir, realizar una recuperación directa de resultados ya conocidos (por ejemplo, disponer directamente que 5 + 5 = 10) o bien apoyarse en un resultado conocido para averiguar uno desconocido (por ejemplo, para 6 + 5 pensar en 5 + 5 = 10 y 10 + 1 = 11).

Para las restas:

a. Separar físicamente. A partir del conjunto mayor contar y separar los elementos de la colección menor.

b. Descontar de 1 en 1 a partir del número mayor.

c. Agregar. Partir del número menor e ir contando de 1 en 1 hasta llegar al número mayor. Este procedimiento implica contar simultáneamente a partir del menor número y a la vez controlar cuántos se van agregando.

d. Sumar. Puede ser recuperar en memoria una suma o bien tantear con números e ir probando si al sumar se obtiene el mayor. Puede ser una suma única (por ejemplo, para encontrar la diferencia entre 35 y 50 encontrar el 15 directamente) o bien ir haciendo sumas sucesivas y controlar simultáneamente cuánto se va sumando y cuánto todavía falta (por ejemplo, para encontrar la diferencia entre 35 y 97 pensar 45 -agregué 10- ; 55 -agregué 20-; 65 -agregué 30-; etc.).

e. Restar. Recuperación directa en memoria de restas con resultados conocidos (por ejemplo, recordar que 10 – 2 es 8), o bien apoyarse en una resta conocida para averiguar una desconocida (por ejemplo, para hacer 25 – 11 pensar en 25 – 10 = 15 y 15 – 1 = 14).

¿Qué hacer frente a la diversidad de procedimientos?

La difícil tarea de provocar avances

Luego de la fase de resolución -individual o por parejas- de los problemas, el docente propone una fase de trabajo colectiva. Su intervención estará dirigida, en primer lugar, a la comunicación de procedimientos. Se trata de que los niños tomen conciencia de la diversidad de procedimientos utilizados y de que posteriormente puedan hacerlos evolucionar. No se trata de "enseñar" los procedimientos más avanzados, sino de generar un espacio de comparación y análisis de los mismos que les permita a los niños utilizar otra estrategia más económica en una nueva situación.

Se ha hecho referencia, en la clasificación de problemas del primer artículo, a algunos de gran complejidad para los niños. En dichos problemas es esperable que la mayoría utilice los procedimientos más "primitivos". Sin embargo, el trabajo en el aula puede estar dirigido al reconocimiento de un cálculo posible: "este problema también se podía resolver con esta resta", por ejemplo.

El trabajo en el aula sobre los procedimientos de resolución presenta un gran desafío para el docente: por una parte, debe favorecer la diversidad y por la otra provocar evoluciones. Se trata de un proceso en el que es necesario gestar condiciones de trabajo en la clase propicias tanto para la creación o elección personal de estrategias, como para que los niños abandonen procedimientos construidos y se apropien de nuevos recursos. La construcción de nuevos sentidos de las operaciones es una tarea progresiva y colectiva y la apropiación individual no será inmediata ni en el mismo momento para todos los niños.

Como suele suceder al analizar cualquier objeto de estudio matemático, se abre con respecto a la enseñanza de la suma y la resta una diversidad de aspectos y relaciones que sugieren un aprendizaje a largo plazo. Parece que no hay un modo "sencillo" ni breve de abordar un objeto de estudio "complejo".

3 Diferentes estrategias de cálculo para sumas y restas

En los artículos anteriores se han tratado los diferentes tipos de problemas de suma y resta, así como la influencia de cierto tipo de variables sobre los procedimientos de resolución de los niños.

En este artículo se enfatizarán algunos aspectos vinculados con la enseñanza de las estrategias de cálculo. En la enseñanza no se plantean en forma independiente el campo de problemas y la construcción de las estrategias de cálculo, ambos aspectos están interrelacionados y están implicados en la construcción del sentido de la suma y de la resta. A pesar de ello, analizaremos aquí los aspectos vinculados con la construcción de recursos de cálculo con el fin de tratar aspectos didácticos específicos para ciertas clases.

Acerca de la enseñanza de las cuentas

Tradicionalmente, la enseñanza de la suma se realizaba mediante una secuencia de operaciones que iban de una supuesta menor a una mayor complejidad. Así, por ejemplo, se introducían inicialmente cuentas de un solo dígito en forma vertical:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 5 \\ \hline 9 \end{array}$$

Luego, sumas de un dígito cuyo resultado fuera un bidígito:

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\ 8 \\ \hline 15 \end{array}$$

Luego, sumas de bidígitos:

$$\begin{array}{r} 35 \\ +\ 23 \\ \hline 58 \end{array}$$

Y, por último, sumas de bidígitos en los que la suma -de las unidades primero y luego de las decenas- superara el 9, llamadas "cuentas con dificultad".

$$\begin{array}{r} 38 \\ +\ 24 \\ \hline 62 \end{array}$$

La idea era graduar las dificultades, teniendo en cuenta algunos aspectos:

- El tamaño de los sumandos: primero con números menores que diez y luego mayores.
- La cantidad de cifras del resultado de cada una de las sumas parciales: primero que sumaran hasta 9, y luego que las dos unidades o las dos decenas sumaran más que diez.

El abordaje de las operaciones se realizaba con cuentas verticales, comunicando el procedimiento que comienza por sumar las unidades y luego las decenas. En las cuentas llamadas "sin dificultad" es indistinto comenzar a operar por las unidades o por las decenas, pero se enseñaba comenzando por las unidades para que los alumnos, al abordar las cuentas llamadas "con dificultad", no tuvieran inconvenientes relativos a la ubicación de los números.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 23 \\ +\ 68 \\ \hline 8..... \end{array} \quad 6+2=8 \text{ y } 3+8=11$$

Aunque en realidad bien podría realizarse del siguiente modo:

$$\begin{array}{r} 23 \\ +\ 68 \\ \hline 80 \\ +\ 11 \\ \hline 91 \end{array}$$

Una secuencia similar era propuesta para las cuentas de resta. Sin embargo, hoy estamos en condiciones de preguntarnos: ¿dicha progresión respeta las dificultades desde el punto de vista de los niños?

Sabemos que para los niños -y también para los adultos- es más sencillo realizar, por ejemplo, 15 + 15 que 15 + 14, a pesar de que la primera operación tradicionalmente sería considerada como una cuenta "con dificultad" y la segunda no. Disponer en la memoria del resultado del cálculo 5 + 5 facilita la operación y torna innecesario utilizar el algoritmo convencional.[2] Por otra parte, la "facilidad" de este cálculo muestra la innecesariedad de considerarlo una cuenta "con dificultades".

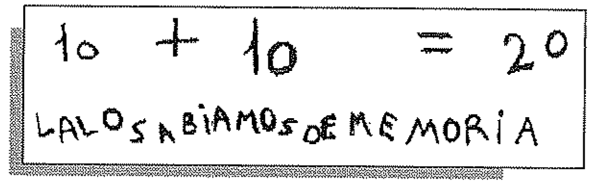
Para ciertos cálculos -como 5 + 5 o 10 + 10- es conveniente utilizar procedimientos no algorítmicos y basarse en ciertas propiedades de los números o en ciertos recursos memorizados.

No tiene sentido escribir verticalmente:

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ \\ 10 \end{array}$$

y realizar una descomposición en 0 + 0 y 1 + 1. De hecho, cuando los niños escriben estas cuentas en los años superiores, los docentes se preocupan de cómo no pueden hacer mentalmente esta operación de suma.

Este niño nos "muestra" por qué no es necesario para él escribirlo de otro modo:



Con frecuencia se observan dificultades y errores en los cálculos que realizan los niños. Parece no ser suficiente con enseñarles cómo se hace la cuenta y ejercitarla para que los alumnos dominen la operación, aunque intenten reproducir el modelo enseñado -pero numerosos errores aparecen-, ya que no dominan con seguridad el algoritmo convencional sino varios años más tarde.

Muchas veces observamos errores que ilustran que los niños utilizan el algoritmo sin realizar ningún control acerca del resultado posible de la cuenta.

En numerosos trabajos se muestra cómo los niños, en situaciones de cálculo oral, obtienen resultados correctos, pero al ser formulados por escrito, utilizando el algoritmo aprendido, obtienen resultados lejanos a los posibles (Ferreiro, 1986; Lerner, 1992).

Por ejemplo, algunos niños que frente a un problema en una situación extraescolar en la que hay que sumar 10 + 10 + 5 +5 no tienen dificultades en realizar la cuenta mentalmente:

$$10+10=20; \quad 5+5=10 \quad \text{y} \quad 20+10=30$$

frente al pedido de escritura de la operación en una situación escolar, realizan lo siguiente:

2. Consideramos "algoritmo convencional" al procedimiento utilizado en la escuela para sumas y restas verticales, en el cual se inician las sumas o restas parciales a partir de las unidades de menor orden.

$$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ + \quad 5 \\ 5 \\ \hline 120 \end{array}$$

porque han "ubicado" mal los 5, en el "lugar de las decenas".

En este caso, los niños han intentado utilizar un método aprendido para resolver las cuentas sin ningún grado de control sobre aquello que están realizando. No realizan una estimación previa ni un control posterior sobre el resultado al que han arribado. Sin embargo, el tamaño y la "redondez" de los números les permitirían realizar fácilmente un cálculo mental.

Generalmente, estas dificultades demuestran una comprensión inacabada del procedimiento algorítmico, como así también ponen de manifiesto dificultades vinculadas con la enseñanza del sistema de numeración. La enseñanza del algoritmo de la suma y de su representación escrita como una "casita" de unidades y decenas,[3] supone las descomposiciones multiplicativas (considerar el 15 como una decena y 5 unidades implica 1 x 10 +5).

Las investigaciones (Lerner, 1992) han mostrado cómo los niños realizan los algoritmos de la suma y de la resta muchas veces sin comprender las descomposiciones que realizan y cómo para ellos, a pesar de haber aprendido a iniciar las cuentas por la suma de las unidades, es más sencillo realizar cálculos mentales iniciando las sumas parciales por las decenas. Para los niños son más evidentes las descomposiciones aditivas de los números (15 como 10 + 5) que la descomposición en unidades y decenas (Lerner, 1992 ; Lerner-Sadovsky, 1994).

En realidad, tampoco los adultos inician los cálculos mentales por las unidades. Por ejemplo, en 56 + 34, muchos hacen primero 50 + 30 y luego la suma de las unidades.

El tratamiento de las cifras por separado hace perder de vista la comprensión global de los números. Así resulta más difícil realizar estimaciones. Por ello, basta con olvidarse de anotar un número para que el resultado de la cuenta resulte muy alejado del intervalo posible.

Otros problemas aparecen por el énfasis puesto en la utilización del algoritmo como único procedimiento enseñado en la escuela para resolver las operaciones. Muchas veces, los niños en la escuela, para sumar 20 + 20, escriben una cuenta vertical, cuando les sería mucho más económico recurrir a un cálculo mental que les permitiera escribir directamente el resultado 40, sin recurrir a procedimientos de descomposición en unidades y decenas (0 + 0, 2 + 2).

3. La "Casita" es una representación gráfica que se ha presentado en numerosos libros de texto para que los alumnos escriban las cuentas verticales.

Pero en muchos casos, también, los niños no han tenido oportunidades de aprender a realizar un control posterior de la operación, a estimar previamente el resultado o a realizar cálculos aproximados.

Estos conocimientos -que son utilizados en forma espontánea por muchos adultos, por algunos niños y por algunos maestros al corregir las cuentas de los niños- no han sido siempre considerados como objeto de enseñanza.

Se trata de uno de los conocimientos que durante años la escuela ha esperado que los alumnos utilicen, pero sobre los que no siempre se ha efectuado una enseñanza sistemática.

Habitualmente sucede con los conocimientos exigidos por la escuela, pero no enseñados, que sólo algunos niños parecen disponer de ellos. Al no garantizar el aprendizaje a través de la enseñanza, queda a cargo de cada alumno descubrir procedimientos de cálculo mental que le permitan controlar los algoritmos.

Desde hace algunos años se ha empezado a revalorizar la enseñanza de estos conocimientos con la intención de instalarlos como contenidos (Saiz, s/f; Parra, 1994; MCyE, 1995). Esto implica ampliar el concepto de cálculo no reduciéndolo exclusivamente a la utilización de un procedimiento único y convencional para resolver todas las operaciones.

¿Cómo puede la escuela hacerse cargo de que el cálculo mental sea un aprendizaje de todos los niños?

Las "ilusiones" de la enseñanza

Se puede considerar que la enseñanza del algoritmo convencional, como punto de partida y como prioridad para el aprendizaje del cálculo, esconde algunas ilusiones.

Ilusión 1: "El saber puede ser transmitido directamente"

Ilusión 2: "El algoritmo convencional es suficiente para el dominio del cálculo"

Ilusión 3: "La reproducción del modelo por parte de los alumnos evitará la aparición de los errores"

Analizaremos cada una de estas afirmaciones:

Ilusión 1: "El saber puede ser transmitido directamente"

Los algoritmos son construcciones sociales que resultan de varios siglos de elaboración. Son, básicamente, conjuntos de pasos que tienen la ventaja de servir para todos los casos. El algoritmo convencional es la síntesis de un conjunto de operaciones en las que se ponen en juego propiedades de los números y de las operaciones. Sus ventajas son, a la vez, las causas de muchas dificultades para los niños: la síntesis no deja al descubierto las razones de cada paso.

En la enseñanza tradicional se creyó ilusoriamente que los conocimientos a aprender por los alumnos podían ser comunicados desde el inicio y esto era suficiente para que se produjera el aprendizaje. Posteriormente, como consecuencia de las propuestas basadas en supuestos de aprendizaje conductista, se propusieron estrategias didácticas tendientes a reducir y graduar la enseñanza a sus partes más simples.

Para una perspectiva constructivista del aprendizaje de la matemática, existen diferentes aproximaciones sucesivas a un objeto de conocimiento. Es decir, que aun cuando sea importante el conocimiento y dominio del algoritmo convencional, no habría por qué suponer que éste debería ser el punto de partida del proceso de enseñanza. Pueden generarse en el aula condiciones para un proceso de construcción que tenga en cuenta los procedimientos espontáneos de los niños.

¿Qué otros procedimientos pueden aprender los niños sobre los cálculos antes de aprender a usar el procedimiento más sintético, eficaz y económico? ¿Qué procedimientos son, para los niños, aunque más largos, menos costosos, y más transparentes?

Ilusión 2: "El algoritmo convencional es suficiente para el dominio del cálculo"

Esta creencia se basa en la utilidad evidente del algoritmo para resolver todos los casos, de modo eficaz y sintético. Sin embargo, existen prácticas sociales del cálculo mental no algorítmico que para muchos casos son más económicas que el algoritmo convencional.

El aprendizaje de las estrategias de cálculo incluye muchos otros aspectos además del dominio del algoritmo. Los niños pueden aprender en la escuela, además de "a hacer bien las cuentas", a estimar resultados, a realizar cálculos aproximados, a utilizar estrategias diferentes de cálculo según el tamaño de los números involucrados, a utilizar y controlar la calculadora, etcétera.

Es decir, se plantea la enseñanza del "cálculo reflexionado" (Parra, 1994).

Lo dicho no implica abandonar la enseñanza de los algoritmos, ya que nadie duda hoy de su eficacia. Es muy importante que los niños aprendan en la escuela a usarlos, pues sirven para resolver cualquier cuenta con éxito y en un tiempo breve.

Tampoco se trata de proponer "un método de enseñanza largo" para enseñar lo mismo, sino que se amplía aquello que se enseña. El objeto de estudio no se restringe desde esta perspectiva al algoritmo, sino a la enseñanza de diversas estrategias de cálculo.

¿Qué otros recursos de cálculo son útiles para realizar cálculos aproximados? ¿Qué estrategias pueden utilizar los niños para controlar lo que realizan cuando ya saben los algoritmos convencionales? ¿Para qué casos conviene usar cálculos no algorítmicos?

Ilusión 3: "La reproducción del modelo por parte de los alumnos evitará la aparición de los errores"

Así como la creencia de que la descomposición del algoritmo en partes permitiría a los alumnos comprender las razones de cada paso, también hubo una fuerte confianza ilusoria basada en la repetición. El modelo conductista de aprendizaje suponía el refuerzo como un componente esencial del mismo. Específicamente en el terreno del cálculo, el supuesto de que si se les propone a los niños ejercitar y repetir numerosas veces la tarea de realizar cuentas, podrían aprenderlas. De ahí el origen de las prácticas repetitivas durante todos los años de la escolaridad primaria.

Sin embargo, los niños tienen sus propias ideas. Y las ponen en juego en lo que realizan. Han recibido numerosas veces la explicación del algoritmo, han ejercitado durante años las mismas cuentas y aún a fines de la escolaridad siguen apareciendo errores que muchas veces no consisten simplemente en equivocaciones.[4]

Se puede, entonces, revisar el énfasis puesto hasta ahora en los procedimientos mecanizados en general, y en particular aquéllos que resaltan la separación de las unidades, decenas y centenas por sobre la comprensión de la globalidad del número.

Desde este punto de vista, hay errores de los niños que no pueden ser concebidos como un fracaso individual del aprendizaje, por lo tanto, habrá que preguntarse qué aspectos no han sido considerados desde la enseñanza.

¿Qué actividades de cálculo se pueden proponer a los alumnos que no sean reproducir cuentas enseñadas? ¿Cómo trabajar en la clase con los errores de cálculo?

4. Distinguimos entre errores y equivocaciones, considerando que entre las producciones de los niños podemos encontrar errores que pueden ser interpretados como errores constructivos, que denotan una concepción errónea, una dificultad recurrente, y las equivocaciones que el mismo niño puede revisar, debidas a distracciones u olvidos.

Los cálculos no se reducen al algoritmo

Se ha señalado la importancia de que en el proceso de aprendizaje de las operaciones los alumnos tengan la posibilidad de estimar previamente y controlar posteriormente los resultados, de utilizar diversos procedimientos de cálculo, de tomar decisiones sobre la necesidad de realizar un cálculo exacto o aproximado.

Proponemos un abordaje de las operaciones en el que no se limite el aprendizaje de los alumnos a "hacer bien las cuentas", sino que también aprendan:

- a elegir diferentes procedimientos de cálculo según los números involucrados;
- a decidir si es necesario utilizar procedimientos de cálculo exacto o aproximado según la situación;
- a disponer de diferentes recursos de estimación previa;
- a tener práctica de control posterior de resultados;
- a usar la calculadora para operar, controlar resultados, investigar relaciones;
- a utilizar las propiedades de las operaciones para inventar procedimientos o probarlos;
- a incorporar procedimientos de cálculos inventados por otros.

De este modo, se enfoca la enseñanza del cálculo mental. Éste se puede concebir como un conjunto de procedimientos no algorítmicos, es decir, en donde no hay una serie de pasos estables a seguir. Los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones. Pueden ser cálculos realizados con lápiz y papel. El cálculo mental no necesariamente es más veloz que el cálculo algorítmico, ni memorístico, aunque se utilicen ciertos cálculos memorizados. Su característica principal es la de ser un cálculo reflexionado (Parra, 1994).

El cálculo mental puede ser exacto o aproximado. En numerosos casos, los adultos estamos ante una situación en la que tenemos que evaluar si una cantidad nos alcanza para comprar ciertos objetos, y realizamos un cálculo mental aproximado. La aproximación es también un importante recurso de estimación previa al cálculo exacto y de control posterior.

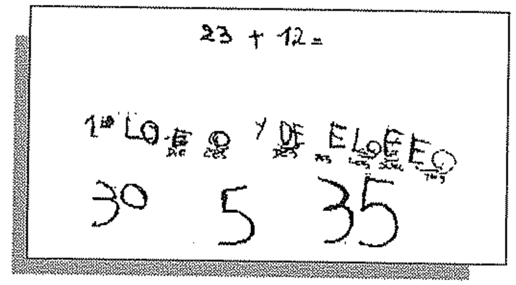
La enseñanza del cálculo mental no reemplaza el cálculo algorítmico. En la escuela se puede aprender a realizar cálculos reflexionados y también a aplicar correctamente los algoritmos. Estos últimos tienen la ventaja de poder ser aplicados en todos los casos y funcionar correctamente, pero es importante que los niños aprendan en la escuela a evaluar en cuáles casos les es más conveniente utilizarlo, en qué casos lo es el cálculo mental, a manejar la calculadora para realizar operaciones, etcétera.

Se trata de que el aprendizaje del cálculo no se reduzca a una técnica de aplicación mecánica. Es posible aprender a hacer las cuentas, a automatizarlas, a usar la calculadora sin sacrificar la comprensión de las operaciones.

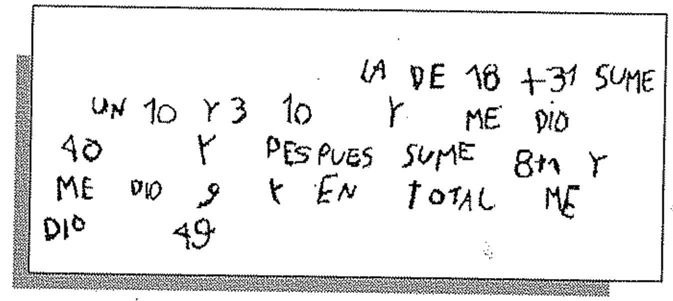
Procedimientos no algorítmicos para la resolución de operaciones

Los niños pueden resolver operaciones aun cuando no hayan aprendido un algoritmo para resolverlas. Veamos estos ejemplos de los primeros años.

Este niño, para hacer 23 + 12, descompone ambos números y registra 30, resultante de la suma de 10+20, y 5, obtenido a partir de 2 + 3, y luego suma ambos resultados parciales.



Para resolver este cálculo, este niño descompone el 18 en 10 y 8 y el 31 en 30 y 1 y suma el 10 y el 30 por una parte y el 8 y el 1 por la otra.



Estos niños no disponen de un procedimiento experto para resolver el problema, ya que no se les ha enseñado hasta el momento la "cuenta vertical", pero los conocimientos que tienen les permiten resolverlo.

¿Cuál es el objetivo de que los alumnos utilicen procedimientos diferentes para resolver una operación que nadie les enseñó, si muchos de ellos realizan procedimientos que desde nuestro punto de vista son más costosos y largos? (Documento 4 EGB, GCBA, 1997).

Los alumnos pueden -a partir de los cálculos correctos e incorrectos que realizan- analizar cuáles son las propiedades que utilizan, preguntarse acerca de si el procedimiento que usaron para una cuenta servirá para otras. Un objetivo es que los alumnos puedan reconocer las propiedades de los números y de las operaciones a partir de su uso y luego, en un trabajo colectivo, sistematizar las conclusiones obtenidas.

Tanto los procedimientos "espontáneos" de los alumnos para resolver las operaciones, como así también ciertos cálculos con números «redondos», son parte importante de la enseñanza del cálculo. Relativizamos la idea de que son "espontáneos", ya que para que aparezcan son necesarias ciertas condiciones de trabajo en el aula y ciertos conocimientos disponibles. Abordar las operaciones como un problema a resolver exige, por parte del docente, la tarea inicial de alentar en sus alumnos la invención y utilización de procedimientos.

Estas producciones de los niños muestran conocimientos que han construido sobre los números. Lerner y Sadovsky (1994) se preguntan al respecto:

> *"¿Cuál es la naturaleza de la relación entre los procedimientos infantiles para obtener los resultados de las operaciones y el conocimiento que los niños van elaborando acerca del sistema de numeración?*
>
> *"Se trata de una relación recíproca: por una parte, los procedimientos de los chicos ponen en acto –además de las propiedades de las operaciones- lo que ellos saben del sistema y, por otra parte, la explicitación de esos procedimientos permite avanzar hacia una mayor comprensión de la organización decimal"* (Lerner y Sadovsky, 1994).

Si bien los conocimientos sobre el sistema de numeración se ponen en juego para producir estos procedimientos de cálculo, no se trata de "esperar" a que los niños dominen las propiedades del sistema de numeración para poder resolver cálculos mentales. Será necesario proponer simultáneamente en el aula situaciones que favorezcan la reflexión y la sistematización de conocimientos sobre los números y sobre las operaciones.

Ha sido señalado, en los primeros artículos, un modo de organización de la clase para trabajar en la resolución y reflexión sobre los problemas. Del mismo modo, la organización de las clases sobre los cálculos también pasa por diferentes momentos. Luego de una fase de resolución individual, el docente propone a los niños que cada uno explique el "método" que ha utilizado para resolver un cálculo. Se realiza una puesta en común en la que se exponen tanto los procedimientos correctos como los incorrectos. Luego, o bien en otra clase, se les propone a los alumnos comparar los diversos procedimientos, ver en qué se parecen, analizar cuáles fueron más largos y más cortos, descubrir aquéllos que combinan dos o más procedimientos e inventar nuevos entre todos.

A partir de las estrategias de resolución por parte de los alumnos, a partir del uso de las propiedades de la suma y la resta, y de las actividades de reflexión y de sistematización de lo realizado, los niños podrán avanzar hacia la utilización de estrategias más económicas de cálculo y hacia la sistematización de algunas propiedades.

Los procedimientos de cálculo se instalan en la clase como un objeto de reflexión. Se realiza un "estudio" en el aula en el que se comparan y analizan los diferentes procedimientos.

Si bien se parte de los diferentes procedimientos de los niños, a lo largo de las clases se van instalando avances necesarios para todos, se realizan acuerdos que permiten ir aproximándose al algoritmo convencional.

Estos acuerdos permiten al docente ir provocando avances en los procedimientos de todos los niños, de tal modo que haya una cierta homogeneización de la clase. Es decir, dichos procedimientos son en primer lugar espontáneos, y luego están influidos intencionalmente por la producción colectiva y la intervención docente.

Por ejemplo, en una clase se puede resaltar que para hacer 45 + 32 se pueden hacer diferentes cálculos en los que los números se descompongan en partes y que con todos se obtiene el mismo resultado:

45 + 32 =

45 + 2 = 47 y 47 + 30 = 77

o bien:

45 + 32 =

32 + 5 = 37 y 37 + 40 = 77

o también :

45 + 32 =

40 + 5 + 30 + 2

70 + 7 = 77

La casa de mi abuela tiene 2 pisos. El otro día me regaló ...26.... pesos para que me comprara 2 buzos y 1 pantalón. Después mi tía me trajo 12 pesos. ¿Cuántos pesos tengo ahora?

¡SE 26 + 10 + 2 = 38
CON LA CUENTA

La casa de mi abuela tiene 2 pisos. El otro día me regaló ...25... pesos para que me comprara 2 buzos y 1 pantalón. Después mi tía me trajo ....12.... ¿Cuántos pesos tengo ahora?

EN LA CABESPUSE 25 Y LE SUME 25 + 2 = 10
2 Y LE SUME 10 MAS Y ME QUDO 37

Los niños utilizan algunos de esos procedimientos que están "estudiando".

En algún momento se intenta que todos puedan realizar estas sumas descomponiendo los números en "dieces" y "unos" -más allá de que no es necesario que todos registren de esta forma el procedimiento de descomposición aditiva de los números-.

Los procedimientos comunes -que han sido resaltados en la clase para homogeneizar- permiten provocar avances, pero se trata de que los chicos no pierdan el control de los pasos que realizan. Si bien son estrategias compartidas, queda a cargo de cada alumno decidir qué descomposiciones hacer y cómo registrarlas.

Este trabajo se propone a los niños durante todo primer año y durante parte de segundo, previamente a la enseñanza del algoritmo vertical convencional de la suma y la resta. Esto significa una postergación en el tiempo de la utilización de cálculos mecanizados, pero hay que advertir que el adelanto en su enseñanza provoca la aparición de errores y obstaculiza el despliegue de procedimientos de cálculo mental.

La enseñanza de diversas estrategias de cálculo no finaliza cuando los niños ya conocen el procedimiento convencional. Por el contrario, el cálculo mental es uno de los caminos hacia la construcción del algoritmo y es luego su herramienta de control (Parra, 1994). Este trabajo se extiende a lo largo de todos los años de la escolaridad, proponiendo a los alumnos constantemente situaciones en las que sea necesario investigar y utilizar diversas relaciones y propiedades de los números y las operaciones.

Para hacer cálculos mentales hace falta disponer de algunos conocimientos

El cálculo mental es un cálculo reflexivo, en el sentido de que, cada vez que lo realizan, los alumnos deben tomar decisiones, no se aplica automáticamente un mismo método para todos los casos. Desde esta perspectiva, cada operación es un problema a resolver. Para realizar cálculos mentales y decidir en cada caso un procedimiento que permita controlar lo que se está haciendo y a la vez tener una cierta economía en la obtención del resultado, es necesario disponer en memoria de ciertos recursos. Para realizar cualquier tipo de cálculos mentales se precisa disponer de resultados parciales.

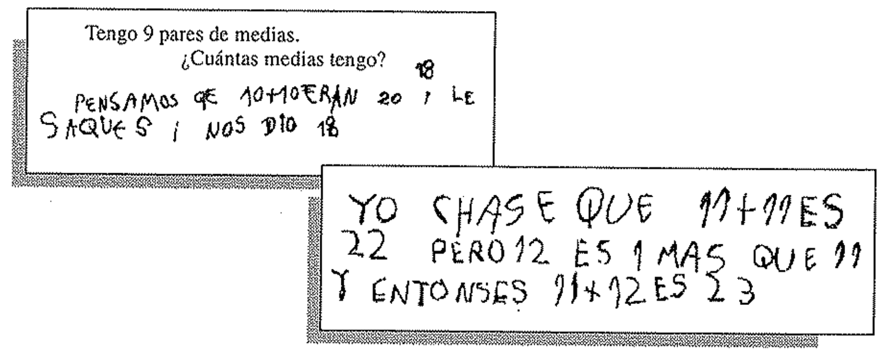
Por ejemplo, para poder hacer 125 + 135 pensándolo como 100 + 100= 200, 20 + 30 = 50, 5 + 5 = 10 y 200 + 50 + 10 = 260, utilizamos sumas de números redondos de unidad seguida de ceros (100 + 100, 20 + 30, etc.), sumas de dobles (5 + 5 = 10), etcétera.

No se conoce a priori el resultado de 125 + 135, pero se dispone de otros conocimientos a los cuales apelar que permiten descomponer estos números y realizar un cálculo mental.

Para que estos conocimientos estén disponibles es preciso realizar un trabajo sistemático de memorización de ciertas sumas y restas (Guillaume, 1988).

El aprendizaje de ciertos resultados puede permitir a los niños apoyarse en aquello que saben para averiguar lo que no saben. Se propicia, en la clase, un trabajo de construcción colectiva de un repertorio[5] memorizado. Esta tarea, lejos de ser un mero ejercicio de repetición de ciertos números, puede ser abordada a partir de un trabajo de reflexión y análisis de las relaciones entre los números.

Por ejemplo, este niño utiliza la suma memorizada de 10 + 10 para resolver un problema de 9 +9:



Una consecuencia de lo anterior es la necesidad de abordar en cada año la memorización de ciertos cálculos, y de propiciar la toma de conciencia de los mismos. Se les pueden proponer a los niños actividades donde deban utilizar recursos memorizados y donde se les pida explicitar cuáles cálculos memorizados les permitieron averiguar lo desconocido.[6]

El cálculo mental y la calculadora

El uso de la calculadora ha sido muy cuestionado. Se suele oponer el uso de la calculadora al del cálculo escrito y al cálculo reflexionado. Existen temores de que el uso de la calculadora en la escuela pueda provocar un aumento en las dificultades ya habituales al hacer las cuentas.

5. Se denomina repertorio aditivo o sustractivo al conjunto de relaciones numéricas de las que se dispone en memoria (Guillaume,1988).

6. En el artículo citado anteriormente se incluye una distribución de cálculos mentales sugeridos por año realizada por Irma Saiz para la provincia de Corrientes.

Por el contrario, consideramos que la calculadora es una herramienta que los niños pueden utilizar para realizar cálculos mentales en variadas situaciones de enseñanza. Más allá de todos los posibles argumentos a favor de dejar entrar en la escuela los avances tecnológicos -que ya justificarían la importancia de que los niños dispusieran entre sus útiles escolares de una calculadora-, es una herramienta útil para aprender. La calculadora no reemplaza los aprendizajes de los niños sobre estrategias de cálculo, sino que puede ser utilizada en la escuela para investigar relaciones entre números.

Por ejemplo, problemas como el siguiente:

"Tengo en la pantalla de la calculadora el número 154. ¿Qué cuenta tengo que hacer para que aparezca el número 104?" (Lerner, Sadovsky, 1994).

En este problema, la calculadora ofrece la posibilidad de provocar una situación de análisis de las relaciones entre los números. Posiblemente muchos niños intentarán restarle el 5, que es aquello que quieren que desaparezca de la pantalla. Probar diferentes números, reflexionar y llegar, luego del trabajo colectivo, a la conclusión "ése 5 vale 50", reflexionar acerca de por qué restarle 5 no es lo mismo que sacar un 5 de la pantalla, son claramente situaciones en las cuales la calculadora no reemplaza los conocimientos de los alumnos. Por el contrario, es un instrumento para poder buscar regularidades, encontrar leyes sobre el funcionamiento de la serie numérica y de las operaciones.

Los chicos en la escuela pueden aprender a evaluar en qué casos es realmente conveniente usar la calculadora, en qué casos pueden resolver la operación mediante algún procedimiento de cálculo mental y en cuáles conviene hacer la cuenta convencional escrita. Por ejemplo, a partir de ejercicios como el siguiente:

"¿En cuál te parece más conveniente usar la calculadora? Justifica tu elección".

23 + 34=

35 + 56 + 67 + 55 + 54=

100 + 100 + 30 +10 + 10 +20 +25=

Se trata de provocar en el aula un análisis acerca de los números involucrados en cada cálculo. Posiblemente, algunos niños dirán que los dos últimos "conviene hacerlos con la calculadora porque son muchos números", y otros niños argumentarán a favor del cálculo mental en el tercer caso, "porque son números redondos". Se puede discutir con ellos acerca de la economía de tiempo en cada caso, acerca de tener en cuenta tanto la cantidad de los números como cuáles son, etcétera.

Otro uso de la calculadora es para verificar cálculos aproximados.

Por ejemplo: *"¿Cuánto dará aproximadamente 128 + 135 + 160?"*. Se espera

que los alumnos puedan pensar 120 + 130 + 160 y anticipar que el resultado rondará el número 400. Seguramente, algunos niños pensarán que el resultado está cerca de 300, habiendo tomado solamente 100 + 100 +100. La calculadora podrá mostrarles la distancia con el resultado exacto y será necesario analizar qué ha sucedido.

Por supuesto, la calculadora también permite que los niños controlen o corrijan autónomamente el resultado de las cuentas realizadas, o puedan en algunos problemas despreocuparse de las cuentas y centrarse en el tipo de operaciones que es conveniente hacer. Ya en los primeros años, la calculadora puede ser una herramienta de análisis, un instrumento para investigar relaciones numéricas y también un elemento de control.

En este artículo han sido planteadas algunas ideas respecto de la enseñanza de estrategias de cálculo, explicitando los objetivos de aprendizaje a los que se apunta. Desde esta perspectiva de la enseñanza de la matemática también son aprendizajes para los niños:

- analizar cuáles procedimientos son correctos y cuáles no;
- decidir cuáles son las formas más económicas de resolver cada operación;
- debatir acerca de la posibilidad de utilizar varias formas para la misma operación;
- reflexionar acerca de lo que es fácil o difícil para unos y para otros;
- aprender a usar lo que se sabe para averiguar lo que no se sabe;
- comunicar a los otros lo realizado en forma oral y escrita;
- incorporar procedimientos de los otros como propios;
- reflexionar y tomar conciencia de lo que saben y de lo que no saben.

Los supuestos didácticos del enfoque presentado claramente se distinguen de los que hemos analizado críticamente para la enseñanza del algoritmo convencional como punto de partida y como prioridad. Nos hemos referido a las "ilusiones" –en el sentido de creencias que se denotan ahora falsas- que subyacían a dicha enseñanza.

Planteamos ahora, en cambio, desde esta concepción de la enseñanza de la matemática, otras "ilusiones" -pero en un sentido de la palabra diferente, esta vez como ideas que guían la acción hacia un futuro deseable- con respecto a la importancia de generar, incluso en el controvertido terreno del cálculo, una experiencia colectiva de quehacer matemático en el aula.

4

La enseñanza de la multiplicación en los primeros años

Algunas preguntas habituales con respecto a la enseñanza de la multiplicación en los primeros años son:

- *¿Es necesario que los niños aprendan primero a resolver las cuentas para luego resolver los problemas?*
- *¿Es un requisito la memorización de las tablas para resolver las cuentas?*
- *¿Es suficiente con aprender a resolver problemas?*
- *¿Qué pueden aprender de la multiplicación en cada año?*

Tradicionalmente, la multiplicación ha figurado en los programas como contenido de segundo año, y en general esto no ha cambiado mucho en los últimos tiempos.

Lo que sí ha ido variando, con el tiempo, es la respuesta a la cuestión de por dónde se inicia la enseñanza de la multiplicación. En algunos textos escolares se presenta esta operación a partir del algoritmo, en otros de las tablas, en otros a partir del signo "x" como escritura abreviada de la suma reiterada, en otros por un problema resuelto a modo de modelo, etcétera.

Una clásica preocupación en la enseñanza de la matemática es la comprensión. Actualmente se subraya la importancia de que los conocimientos que los alumnos aprenden en la escuela tengan sentido para ellos. ¿Qué significa que los conocimientos tengan sentido? Para Charnay (1988), la significación de un conocimiento debe ser considerada en dos niveles:

- Un nivel externo: ¿Cuál es el campo de utilización de ese conocimiento? ¿Cuáles son los problemas que dicho conocimiento permite resolver? ¿Cuáles son los problemas para los que este conocimiento no es suficiente?
- Un nivel interno: ¿Cómo y por qué funciona esa herramienta matemática? ¿Cuáles son sus propiedades, cuáles las reglas?

Es posible formularse, a partir de estos niveles, dos preguntas para pensar la enseñanza de la multiplicación en el primer ciclo: ¿Cuáles son los problemas de multiplicación con los que los niños se tienen que enfrentar en los primeros años? ¿Cuáles son los aspectos vinculados con el funcionamiento de la multiplicación que los niños pueden aprender (cuentas, propiedades, cálculos mentales, etc.)?

Los aprendizajes que involucran a la multiplicación son diversos. Abarcan el conjunto de problemas que se resuelven por medio de multiplicaciones: problemas de proporcionalidad (*"Calcular cuántas galletitas hay en 5 paquetes si en cada paquete hay 4"*); problemas de combinatoria (*"¿Cuántos equipos de ropa diferentes pueden hacerse combinando 4 pantalones y 3 remeras?"*); y las propiedades, el algoritmo, cálculos mentales, multiplicación por la unidad seguida de ceros, etcétera.

Es importante plantear situaciones a lo largo de la escolaridad para que los niños tengan diferentes y sucesivas oportunidades de ir construyendo y reorganizando sus conocimientos sobre las operaciones. La multiplicación no es un contenido de un año en particular, sino un aprendizaje a largo plazo (Vergnaud, 1976). Los niños, durante los diferentes años de la escuela primaria, podrán ir ampliando sus conocimientos sobre esta operación a partir de las situaciones que enfrenten y de una organización de la enseñanza que favorezca la reflexión sobre las mismas.

¿Qué significa "ir aprendiendo" cada vez más sobre la multiplicación? Significa progresivamente poder reconocer y resolver nuevos tipos de problemas, de mayor complejidad, ampliar los recursos de cálculo que se utilizan, sistematizar nuevos conocimientos sobre las propiedades de esta operación, etcétera.

En los primeros años, se trata de iniciar a los niños en el estudio de esta operación, tanto en lo referente a los problemas que pueden resolver como a las estrategias de cálculo. La construcción del sentido de la multiplicación no se logra cuando se aborda la enseñanza del algoritmo, muchos niños saben "hacer las cuentas", pero no reconocen cuál es el conjunto de problemas que se resuelven con dicha operación.

Con respecto a la relación entre las cuentas y los problemas reproducimos a continuación un extracto del Documento Nro. 4 de Actualización Curricular (GCBA, 1997).

"¿Cuentas versus problemas? *Durante mucho tiempo se ha considerado que los niños tenían que aprender primero a realizar las cuentas y luego a resolver los problemas en los que se aplica cada operación. Desde esta perspectiva, los problemas se presentaban como ejercicios de aplicación y evaluación de las operaciones.*

"Sin embargo, sabemos que para que los alumnos puedan conocer las ocasiones de empleo de cada operación no alcanza con saber hacer las cuentas, es necesario, además, convertir a los problemas en objetos de trabajo en el aula.

"A partir de esta convicción, en los últimos años han aparecido numerosas críticas con respecto a la enseñanza mecánica de las cuentas y se ha insistido en que no es conveniente plantear a los niños cuentas en forma aislada, pues sólo tiene sentido su enseñanza cuando se trata de resolver problemas.

"Creemos que tanto la enseñanza directa de los algoritmos con su posterior aplicación en problemas, como el abandono de la enseñanza del cálculo son el resultado de una falsa dicotomía: cuentas versus problemas.

"Esta dicotomía oculta el complejo interjuego existente entre los procedimientos y recursos de cálculo y la construcción y ampliación de sentido de las operaciones. Efectivamente, usar propiedades de las operaciones, anticipar, estimar, controlar resultados, son recursos que ponen en juego el sentido de las operaciones, a la vez que constituyen herramientas imprescindibles para abordar nuevos problemas."

Es decir, que su enseñanza implica el abordaje simultáneo de los niveles externo e interno. El abordaje de ambos aspectos conjuntamente será posible a través de una propuesta de enseñanza centrada en que los niños resuelvan problemas y reflexionen alrededor de los mismos para aprender los conceptos matemáticos.

¿Qué pueden abordar de la multiplicación los niños en primero y segundo año?

Ya desde primer año es posible ampliar el tipo de problemas que se les plantean a los niños habitualmente –que involucran sumas y restas-, incluyendo algunos del campo multiplicativo, aun cuando los niños no hayan aprendido "la cuenta de multiplicar". Se trata de que empiecen a tener contacto con problemas "diferentes" desde su punto de vista y de que movilicen nuevos recursos para resolverlos.

Por ejemplo:

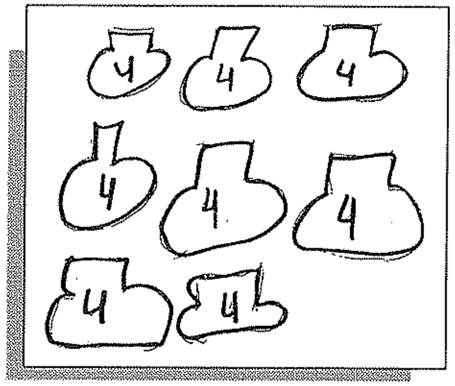
"Calcular cuántas figuritas hay en 8 paquetes si en cada paquete hay 4 figuritas."

Los chicos de primero y segundo año no reconocen que este problema puede resolverse con una operación como 4 x 8. Sin embargo, pueden resolverlo utilizando otros procedimientos a partir de lo que sí saben. No tienen una estrategia "experta", pero pueden generar una respuesta.

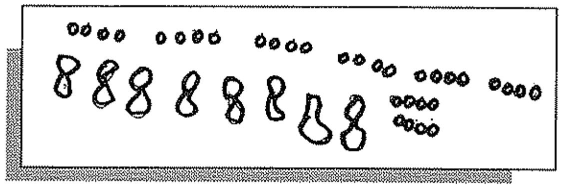
Los caminos elegidos pueden ser los siguientes:

- Algunos niños no reconocen las diferencias con problemas de suma que vienen realizando y hacen 4 + 8.
- Ciertos niños utilizan procedimientos en los que representan gráficamente los paquetes y las figuritas. Primero dibujan y luego cuentan todas las figuritas.

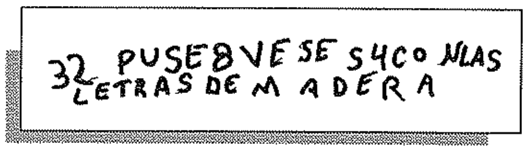
- Otros representan gráficamente los paquetes y simbólicamente las figuritas. También luego del dibujo cuentan las figuritas, realizando algún tipo de control sobre los 4 de cada paquete.



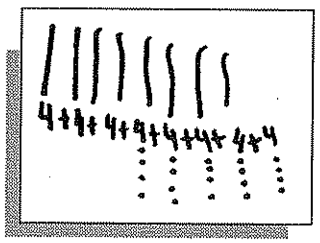
- Algunos representan directamente las figuritas, agrupándolas de a 4 sin necesidad de dibujarlas adentro de los paquetes:



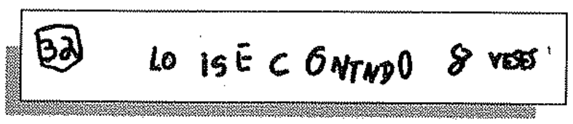
- Otros niños utilizan algún tipo de material para armar grupos de a 4, para luego contarlos:



- En ocasiones escriben la suma de los 4:



- Y, finalmente, unos pocos niños escriben de modo sintético qué operación tienen que hacer:



¿Cuál es el sentido de plantear este tipo de problemas a niños que aún no "saben" multiplicar? Se trata de realizar un trabajo colectivo de análisis y reflexión. Luego de la resolución individual, se comparan los resultados y los procedimientos. Aunque solamente pocos niños hayan sumado 4 y 8, se propone a todos analizar por qué 4 + 8 no es un cálculo que permita averiguar la respuesta a este problema. Se les puede proponer a los niños que inventen y expresen oralmente problemas para 4 + 8 y que los comparen con éste. Se puede analizar con los niños cómo este problema puede resolverse por medio de una suma, pero que esa suma es 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 y no 4 + 8. En la comparación, los chicos podrán reconocer cómo en este problema, a diferencia de otros problemas de sumar, no se suman los números "escritos en el enunciado".

En principio, en estos problemas, se espera que los niños puedan reconocer puntos de contacto con la suma y, a la vez, que puedan establecer diferencias. Por ejemplo, que puedan formular expresiones como éstas: "podés sumar, pero sumás otros números", "en estos problemas se suma muchas veces el mismo número", "no hay que sumar dos números diferentes como en los otros problemas", "el problema te dice 4 y 8, pero vos no sumás 4 + 8", "el 8 te dice cuántas veces sumar", etcétera.

Luego se comparan los diferentes procedimientos que aparecieron en la clase y por los cuales muchos niños llegaron al mismo resultado. Se resaltan aspectos en común. Se les propone a los niños comparar la economía de unos y otros. Se espera que puedan decir, por ejemplo, "no hace falta dibujar todo", "no hace falta hacer los palitos, ponés los 4", o "no hay que poner tantos 4, ponés uno y lo contás muchas veces", etcétera.

La comparación entre procedimientos y el análisis acerca de los errores en la resolución de un problema les permitirán a los niños avanzar en la comprensión de los enunciados y en las estrategias de resolución. Para muchos chicos, luego de algunas clases ya no será necesario dibujar y contar cada uno de los elementos, otros podrán establecer un cálculo con una serie sucesiva de sumas. Algunos niños empezarán a escribir en forma más breve algunas expresiones como "8 veces 4".

Es importante proponer la resolución de problemas de multiplicación que, a pesar de constituir situaciones novedosas para los niños, pueden ser resueltos con los recursos con los que cuentan hasta ese momento. En segundo año, el trabajo en la clase permitirá que los chicos puedan hacer evolucionar sus procedimientos de conteo a procedimientos de cálculo por medio de sumas. También podrán avanzar en la diferenciación de aquellos problemas de suma que no pueden ser resueltos por una multiplicación.

El tamaño de los números y la "redondez" de los mismos será una herramienta a utilizar por el docente para provocar el uso de procedimientos de cálculo en lugar de los procedimientos de conteo.[7] Por ejemplo, para calcular la cantidad de figuritas en 5 paquetes de 3 figuritas cada uno, los niños podrán realizar alguna representación gráfica y utilizar el conteo hasta 15. Otros niños irán contando directamente (1, 2, 3) (4, 5, 6) (7, 8, 9), etc., apoyándose en cierta organización oral agrupando de a 3 en el conteo. Para estos números no es evidente que sumar sea mucho más económico que realizar el conteo.

Sin embargo, para 5 paquetes de 11 figuritas se espera que algunos niños puedan empezar a pensar: "si los paquetes fueran de 10, haría 10, 20, 30, 40 y 50 y 5 más son 55". El tamaño de los números funciona en este caso como una "invitación" a buscar un medio más corto que contar hasta 55. Evidentemente, para que se produzca este cambio de estrategias, además de enfrentar a los niños a problemas con números más grandes, se requerirá paralelamente un trabajo específico en el terreno del cálculo, de tal manera que los niños tengan disponibles recursos que les permitan realizar sumas.

Se ha planteado una mirada crítica con respecto a la perspectiva que plantea la enseñanza de la multiplicación a partir de los cálculos (desde el cálculo hacia los problemas). Sin embargo, esto no significa descartar la importancia de que los niños avancen en sus estrategias de cálculo a partir de los problemas que resuelven. Retomaremos este aspecto.

Diferentes problemas de multiplicación en segundo y tercer año

Habitualmente, los "problemas de multiplicación" remiten a un mismo tipo de problemas: los de proporcionalidad (Doc. 4, GCBA, 1997). Por ejemplo:

"Tengo 5 bolsas de caramelos. Hay 5 caramelos en cada bolsa. ¿Cuántos caramelos hay en total?"

Este problema involucra una relación de proporcionalidad entre bolsas y caramelos. Es posible representar dicha relación a través de una tabla para analizar sus propiedades.

Bolsas	Caramelos
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

7. Sobre las variables didácticas y los procedimientos de resolución, nos remitimos a lo planteado en el artículo "Cambian los problemas, cambian los procedimientos de resolución".

Existe una relación "al doble de bolsas el doble de caramelos", " al triple de bolsas el triple de caramelos", etcétera. Por otra parte, si se suma la cantidad de caramelos de 1 y 2 bolsitas, se obtiene el total de caramelos de las 3 bolsas (1 + 2 = 3 y 5 + 10 = 15) (Vergnaud, 1981; Panizza, Sadovsky, 1994; Doc. 4 GCBA, 1997).

	Bolsas	Caramelos	
x 2	1	5	x 2
	2	10	
	3	15	

Bolsas	Caramelos
1	5
+ 2	+ 10
3	15

El 5 es el valor de la unidad. Corresponde a la cantidad de caramelos de 1 bolsa. A partir del 5 se puede calcular el número de caramelos de cualquier cantidad de bolsas realizando una multiplicación. El cálculo de caramelos de 4 bolsas, por ejemplo, puede realizarse haciendo 4 x 5, o bien haciendo 5 + 5+ 5+ 5 , es decir, sumando 4 veces 5.

En general, en los libros de texto, los problemas de multiplicación pertenecen a este tipo de problemas, aun cuando no suelen considerarse como problemas de proporcionalidad. La mayoría de los problemas que los niños resuelven en la escuela -y también los de la vida cotidiana- pertenecen a esta categoría (Sadovsky, Panizza, 1994). Evidentemente, no es objetivo del primer ciclo que los alumnos reconozcan las propiedades de la proporcionalidad, pero sí que empiecen a utilizarlas intuitivamente para resolver problemas como éstos:

- *Una araña tiene 8 patas. ¿Cuántas patas tendrán 7 arañas?*
- *¿Cuánto pagó Leandro por 9 lápices si cada uno le costó $3?*
- *Doña María quiere llevarle 6 caramelos a cada uno de sus 8 nietos... ¿Cuántos caramelos tiene que comprar?*
- *En dos paquetes iguales hay 10 pastillas en total. ¿Cuántas habrá en 4 paquetes?*

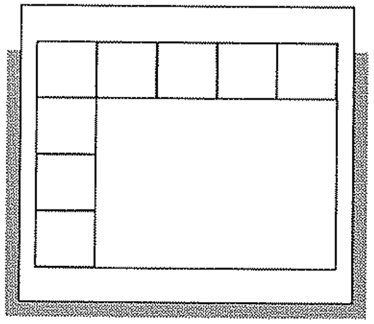
Y también :

- *Ana quiere darle a cada una de sus amigas 5 semillitas de girasol. Si tiene 45 semillitas, ¿a cuántas amigas podrá darle?*
- *Viviana repartió los 40 globos de su cumpleaños entre los 8 chicos. ¿Cuántos les habrá dado a cada uno?*
- *Mi mamá quiere hacer una torta y necesita 25 galletitas de chocolate. Si en cada paquete vienen 5, ¿cuántos paquetes necesita?*

En los artículos sobre la enseñanza de la suma y la resta se ha resaltado la importancia de trabajar en el aula con la diversidad de problemas y para ello ha sido adoptado el análisis que realiza Vergnaud (1976, 1981) para el campo aditivo. Vergnaud (1981) propone también un análisis del campo de problemas multiplicativos, al que define como el conjunto de situaciones que se resuelven por medio de multiplicaciones o divisiones. Si bien el estudio de este campo de problemas se profundiza especialmente durante el segundo ciclo, es importante, incluso en el inicio de la enseñanza de la multiplicación, la inclusión de otros problemas además de los mencionados.

Por ejemplo, aquellas situaciones que involucran organizaciones rectangulares a través de baldosas o cuadraditos como la siguiente:

"¿Cuántas baldosas se necesitan para cubrir todo el piso de este baño?



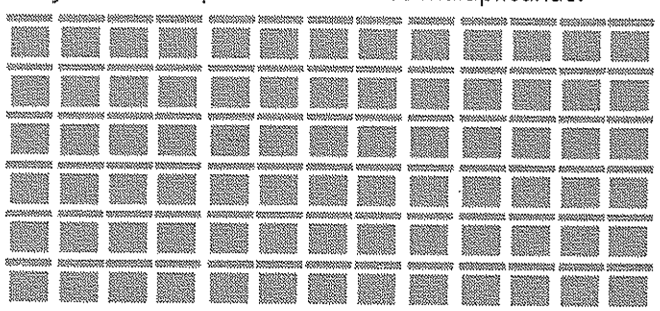
En este problema, los niños podrán dibujar las baldosas. Inicialmente utilizarán procedimientos ligados con el conteo. Se tratará de favorecer en la clase que los niños reconozcan que en todas las filas hay la misma cantidad de cuadraditos y que lo mismo ocurre con las columnas. Esto les permitirá una mayor economía en los recursos a utilizar: pasar de procedimientos de conteo a procedimientos de cálculo realizando sumas por filas o por columnas.

Una herramienta didáctica para provocar dicho avance es la modificación de la cantidad de cuadraditos del problema. La dificultad que se les presenta a los niños en contar una gran cantidad de cuadraditos favorecerá que algunos alumnos registren, al lado de cada fila, la cantidad de baldosas, y luego sumen para obtener el total.

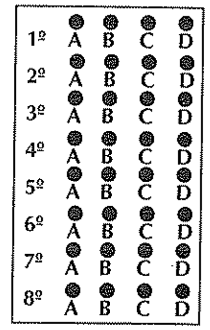
Otros problemas son aquéllos en los que hay también una organización espacial de filas y columnas, como los de asientos del cine, butacas para un acto escolar, departamentos en un portero eléctrico. Inicialmente los resolverán contando, luego sumando y finalmente podrán resolverlos multiplicando.

Ejemplos:

- *¿Cuántos asientos hay?*



- *¿Cuántos departamentos hay en este edificio?*

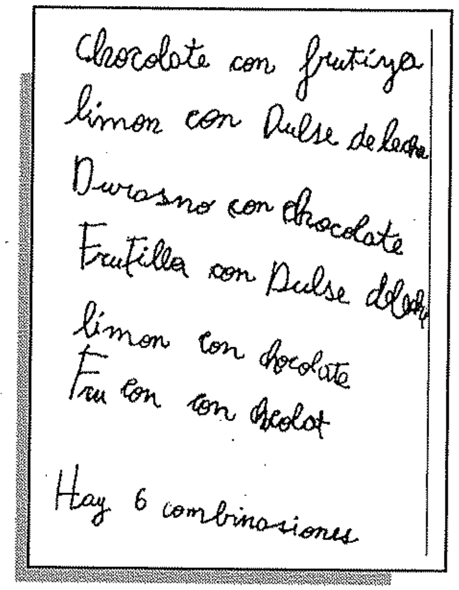


Un tipo de problemas multiplicativos que los niños pueden empezar a resolver son aquéllos en los que hay que combinar elementos de diferentes colecciones.[8]

Por ejemplo:

"Voy a comprarme un helado de dos gustos. Si quiero combinar una fruta y un dulce, ¿cuántos helados diferentes puedo elegir?

Frutas	Dulces
Limón	dulce de leche
Frutilla	chocolate
Durazno	



Posiblemente, algunos chicos probarán cada fruta con un solo dulce y dirán que hay solo dos o tres posibilidades. Será necesario explicar el enunciado para que comprendan el significado de "combinar todos con todos". Otros reconocerán que puede combinarse cualquier fruta con cualquier dulce y realizarán (por medio de un dibujo o una lista) diferentes combinaciones.

Es esperable que los niños –al no tener un "método" que garantice la exhaustividad de la lista- encuentren

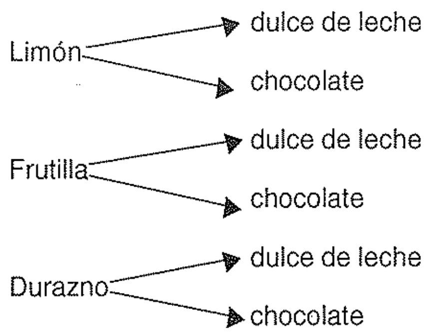
8. Estos problemas en el segundo ciclo se hacen más complejos, dando lugar al estudio de los problemas de combinatoria (Doc 4 GCBA).

varios de los casos, pero no la totalidad. A partir de los procedimientos que los niños utilicen, se podrá trabajar en la clase "cómo hacer para estar seguros de que pusieron todas las opciones".

Teniendo en cuenta las producciones de los niño, se les puede proponer organizar la información en un cuadro de doble entrada:

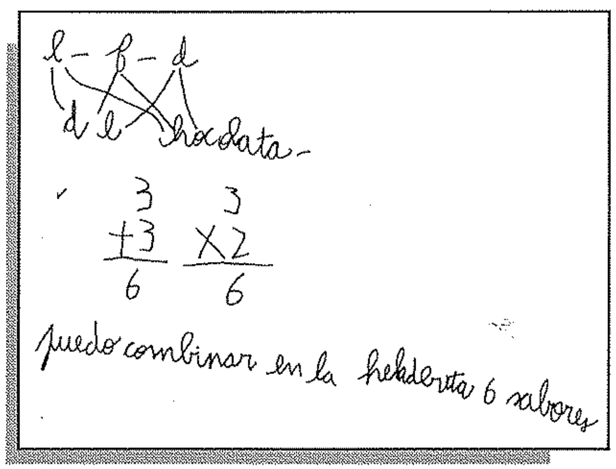
Frutas/ Dulces	dulce de leche	chocolate
Limón Frutilla Durazno		

También podrán utilizar un diagrama de árbol como el siguiente:



Los niños podrán resolver problemas similares a éste utilizando cada vez mejores estrategias y modos de organizar la información que les permitan aprender a "no olvidarse" de ninguna posibilidad.

A través de la resolución de diferentes problemas y del análisis y reflexión acerca de los mismos empezarán a resolverlos por medio de una suma como 2 + 2 + 2 o bien 3 + 3. Será una oportunidad para discutir y analizar la equivalencia de ambas operaciones. Posteriormente podrán reconocer que este problema puede resolverse realizando las cuentas 2 x 3 o 3 x 2.



La resolución y el análisis de los diferentes problemas permitirán a los niños, por una parte, conocer nuevos tipos de problemas y, paralelamente, empezar a reflexionar sobre las relaciones entre los números y las operaciones involucradas en los mismos.

Los alumnos no utilizarán las mismas estrategias para uno y otro tipo de situaciones. Los niños de segundo y tercer año, en las situaciones que involucran series proporcionales o en los problemas de cuadriculado, podrán finalmente escribir el producto y calcularlo; en cambio, para las situaciones de combinación de elementos de dos colecciones, necesitarán apelar al conteo o la suma, y la multiplicación podrá ser reconocida a posteriori de la resolución.

Un tipo de actividad interesante, que pone en juego la toma de conciencia sobre la diversidad de problemas, es la invención de los mismos por parte de los alumnos. Un ejemplo de esto último ha sido subrayado a propósito de los cálculos 4 x 8 y 4 + 8 con el objetivo de que los alumnos profundicen y reflexionen sobre las diferencias entre ambos. También es interesante promover la invención de situaciones diferentes para una misma cuenta, por ejemplo 4 x 8. En general, frente a esta propuesta, los niños producen problemas pertenecientes a la categoría que ellos más dominan. Posiblemente inventen primero problemas de proporcionalidad (paquetes y figuritas, bolsas y caramelos), pero se espera que al abordar problemas de cuadriculados o de otras organizaciones rectangulares los alumnos puedan empezar a incluirlos. Si esto no sucediera, el docente puede someter a debate si un problema que él presenta también podría estar incluido en la lista, o invitar a los alumnos a que busquen, en sus cuadernos o en los carteles del aula, otros problemas que fueron resueltos con multiplicaciones.

La actividad de concurso de problemas originales para una operación puede ser un motor de búsqueda de problemas con diferentes sentidos (Brousseau, 1987). Estas actividades permiten que los niños, además de resolver, reflexionen y tomen conciencia de la amplia gama de problemas que esta operación resuelve.

Simultáneamente a la presentación de problemas que se resuelven con una multiplicación –aunque durante un tiempo los niños los resuelvan sumando- pueden presentarse situaciones en las que esta operación es un procedimiento posible ya que involucran a la división. Así como ha sido planteado que la multiplicación no se inicia en segundo año, ni se agota en él, tampoco la división es un tema que recién se inicia en tercero.

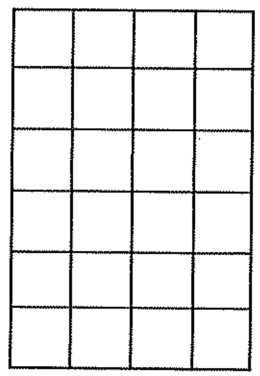
Desde finales de primero y durante segundo año los alumnos podrán resolver problemas de partición por procedimientos de conteo, de reparto 1 a 1 y tal vez por sumas sucesivas. Ya en tercer año, al conocer el algoritmo de la multiplicación, lo utilizarán cómo recurso para la resolución de ese tipo de problemas. La multiplicación se constituirá como punto de apoyo para resolver problemas de partición.[9] Por ejemplo:

"Andrés tiene que repartir sus 37 figuritas entre sus 4 hermanos de tal manera que a todos les corresponda la misma cantidad. ¿Cuál es el máximo de figuritas que puede darle a cada uno?"

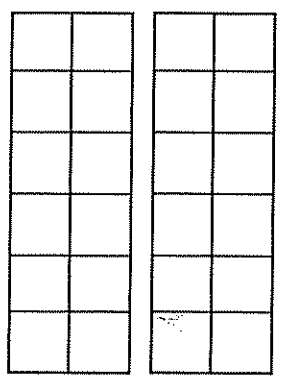
En este caso, el procedimiento experto es la división, pero la situación puede ser resuelta a partir de una multiplicación. Los niños de segundo año podrán realizar sumas sucesivas probando con diferentes números hasta llegar a que el número más grande que se puede sumar 4 veces es el 9 y se llega a 36. Por lo tanto, sobra 1 figurita. Los niños de tercer año -antes de conocer el algoritmo de la división- podrán utilizar el conocimiento memorizado de las tablas para encontrar el 9, a partir de 9 x 4 = 36

También pueden presentarse problemas "de división" relativos a organizaciones rectangulares. Por ejemplo, este problema involucra la división pero puede resolverse a partir de multiplicaciones:

"Éste es el dibujo de un patio que tiene 24 baldosas. Dibujá otros patios posibles con forma de rectángulo que tengan la misma cantidad de baldosas."



En este problema se trata de que los niños investiguen qué otros productos son posibles para obtener 24. En este caso podrán hacer un patio de 2 x 12. Algunos chicos podrán decir que se corta la mitad del patio y se pone al lado.



9. Estos aspectos serán tratados con más profundidad en el próximo artículo: "La enseñanza de la división en los primeros años".

Mayores dificultades presentan para los niños los problemas de combinatoria que involucran la división, aun con números muy pequeños:

"Voy a un restaurante que tiene precio fijo por un plato de comida y un postre. Puedo armar 8 menús diferentes. Si hay 4 platos de comida ¿cuántos postres habrá?"

Algunos alumnos dirán que hay 4 postres, pensando que cada plato se corresponde con un postre y considerando el 8 a partir de la suma de ambos. Será necesario hacer un diagrama de árbol y retomar problemas anteriores para que los alumnos puedan apelar a 4 x 2 = 8 en este problema. Este trabajo será interesante en tercer año para un trabajo de análisis colectivo, pero no se espera que todos los niños puedan individualmente resolver problemas similares usando la multiplicación.

En síntesis, los niños podrán aprender a resolver una amplia variedad de situaciones que involucran la multiplicación. Posiblemente, sus procedimientos de resolución no sean siempre apelar al producto. Usarán variadas estrategias de resolución y podrán, luego de la resolución, reconocer y registrar cuál es la operación que representa el problema. Esto nos lleva a la cuestión de la escritura y representación de la operación.

La utilización del signo "x"

Con respecto a la construcción de los recursos de cálculo, ha sido planteado anteriormente un cuestionamiento a la postura de enseñar primero la cuenta de multiplicar y luego los problemas de aplicación. Por el contrario, los niños tendrán oportunidades de realizar un análisis sobre las relaciones numéricas a partir de las situaciones que las ponen en juego.

Para los niños no es necesario tampoco conocer la utilización del signo "x" antes de la resolución de problemas. Una prematura inclusión de la representación simbólica hace que los niños utilicen el signo desprovisto de significado. Se ha subrayado que los chicos pueden resolver los problemas utilizando variadas estrategias. No es en el primer momento que precisan la utilización de una expresión nueva, de una representación simbólica convencional.

Durante algunos años, a partir de la Reforma de la Matemática Moderna, se consideró que los niños tenían que construir por sí mismos diferentes representaciones simbólicas antes de conocer los símbolos convencionales.

Sin embargo, los niños están insertos en un medio social en el que interactúan con escrituras simbólicas, forman parte de una escuela graduada en la que circulan los conocimientos de los niños de otros años, muchos alumnos tienen hermanos mayores y observan sus prácticas escolares y tienen contacto con calculadoras desde muy pequeños. Los niños saben, en general, "qué van a aprender cuando sean más grandes", tienen una cierta conciencia de la secuenciación de los conocimientos en la escuela. Estos aspectos hacen aparentemente innecesario promover en el aula la simulación de una construcción social convencional para el grupo en particular en actividades de invención de diferentes signos que representen la multiplicación.

Proponemos, por el contrario –si es que no es incluido por algunos niños en los primeros problemas que resuelven- la presentación del signo como producto de una convención social de uso difundido y accesible hoy al mundo de los niños. La fuerza social del mismo justifica su utilización directamente, sin necesidad de símbolos previos construidos por los alumnos. Sí será necesario -como se ha intentado mostrar- un proceso constructivo más complejo que favorezca los aprendizajes de los diferentes significados de la multiplicación a través de los problemas que se resuelven y sobre los cuales se reflexiona; y un trabajo alrededor de las diferentes representaciones de un problema.

Una actividad que propone el equipo ERMEL (1983) es un juego de comunicación en el que los niños reciben por grupos una cierta cantidad de sobres –todos iguales- que contienen en su interior una cantidad de fichas –todos la misma cantidad-. Los niños tienen que escribir el mensaje más corto posible para que otro grupo averigüe cuáles y cuántos sobres recibieron. El equipo que recibe el mensaje debe identificar los sobres recibidos por el otro grupo. La restricción que se le pone al mensaje que deben enviar es que no pueden incluir dibujos. De tal forma, se intenta provocar que los niños envíen mensajes con números.

Se espera a lo largo de la secuencia propuesta que haya una evolución de los mensajes producidos por los alumnos, desde el uso de expresiones en un lenguaje natural a un lenguaje simbólico. Por ejemplo, si un grupo recibió 5 sobres con 4 fichas cada uno puede escribir: "5 sobres de 4 fichas cada uno", posteriormente aparecerán escrituras de este tipo "4 + 4 + 4 + 4 + 4" y, finalmente, "5 sobres, 4 fichas," o bien en algunos casos, 5 x 4.

En otro juego de mensajes (Parra, C. y Saiz, I., 1994), los niños organizados por equipos eligen en secreto una tarjeta entre un conjunto que les ha sido entregado. Las tarjetas tienen dibujadas varias flores y todas las flores poseen la misma cantidad de pétalos. Cada equipo tiene que enviarle un mensaje –también sin dibujos- a otro equipo, para que puedan reconocer cuál es la tarjeta que eligieron. Posiblemente los niños escribirán inicialmente mensajes como "hay 6 flores y 5 pétalos en cada flor". Luego se pueden ir agregando restricciones, como "escribir el mensaje más breve posible". Esta restricción busca provocar que los niños no utilicen mensajes con tantas palabras ni con tantos números, sino que arriben a expresiones del tipo "6 veces 5", "6 flores, 5 pétalos cada una", etcétera.

Estas actividades continúan con el dibujo de mensajes a partir de escrituras multiplicativas que pueden estar propuestas por el docente. Luego se realiza un trabajo de distinción de mensajes a partir de dibujos presentados: en algunos se puede escribir una multiplicación (por ejemplo: "5 canastas, todas con 3

manzanas", "5 x 3" o "5 sobres todos con 3 fichas") y en otros no es posible (por ejemplo: "3 canastas, una con 5 manzanas, otras dos con 6 manzanas", "5 + 6 + 6" o "3 sobres con diferentes cantidades de fichas cada uno").

Se varía el tipo de desafío que se les propone a los alumnos una vez realizadas las primeras actividades: el mensaje está escrito y hay que dibujarlo o se entrega el dibujo y hay que escribir la expresión simbólica. A su vez, las secuencias proponen alternar entre actividades de comunicación entre equipos con un trabajo colectivo alrededor de las mismas y actividades individuales de reinversión de lo aprendido.

Otra situación que pretende más directamente provocar el uso del signo "x" es proponerles a los niños que envíen el mensaje más corto posible que identifique un cálculo que han recibido (Cerquetti-Aberkane, 1998). Se proponen cálculos en los que sea efectivamente simplificadora la escritura multiplicativa. Por ejemplo:

12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12 =

Todos los mensajes posibles están a la vista de los niños, pero cada pareja no sabe cuál es el que recibió la pareja complementaria a la suya. Los chicos podrán utilizar inicialmente 18 veces 12 y posteriormente 18 x 12 como escritura sintética de esta suma. En los casos seleccionados, la escritura multiplicativa es efectivamente simplificadora de información, cosa que no ocurre en 8 + 8 como 2 x 8.

Será interesante discutir con los niños acerca de la equivalencia de 7 x 8 y 8 x 7, es decir, la propiedad conmutativa, aunque no es bajo este nombre que esta propiedad empieza a analizarse en el primer ciclo. La propiedad conmutativa de la multiplicación ha podido ser trabajada con los niños a partir de algunos problemas que han resuelto. Sin embargo, en este problema, o en el de los mensajes de sobres y fichas o de canastas y manzanas, no es tan clara la equivalencia -con el fin de reproducir el mensaje- de las expresiones 4 x 8 y 8 x 4. Evidentemente, la cantidad de fichas o de manzanas es la misma, pero los niños no lograrán encontrar cuál es la tarjeta que sus compañeros han recibido.

En general, los niños consideran que 4 x 8 significa 4 sobres con 8 fichas cada uno, pero en realidad, si utilizaran 8 x 4 podría significar 8 veces 4, expresión en la cual cada 4 es una ficha de cada sobre.

Para el abordaje de la escritura multiplicativa también pueden proponerse problemas de cuadriculados. Por ejemplo, se les entregan a los niños diferentes rectángulos recortados en hojas cuadriculadas (5 x 6, 6 x 8, etc.) y se les plantea:

"¿Cómo enviar el mensaje más corto posible que indique cuál es el rectángulo que recibieron?"

Si los niños –con la intención de acortar el mensaje- enviasen sólo el dato del total de cuadraditos, no tendrían elementos para saber la cantidad de filas y de columnas. Por ejemplo, con el dato de 24 podrían hacer 12 x 2 o 24 x 1 o 6 x 4.

También se les puede proponer que dibujen rectángulos en hojas cuadriculadas, a partir de escrituras multiplicativas dadas a modo de "mensaje recibido" (Parra y Saiz, 1994).

La memorización de resultados y las propiedades de la multiplicación

La memorización de las tablas también ha sido un "lugar" de enfrentamiento o de oposiciones tajantes: "Hay que aprender las tablas porque es importante para que los niños puedan resolver las cuentas" y "No hay que enseñar las tablas de memoria porque es un aprendizaje mecánico sin sentido".

Los niños necesitarán progresivamente disponer de un conjunto de cálculos sencillos para realizar otros más complejos.[10] Por ejemplo, es necesario saber 9 x 7 = 63 para poder algún día resolver 90 x 70. La disponibilidad en memoria de ciertas relaciones numéricas es un recurso útil para los niños. Esto no significa que la memorización sea el punto de partida de la enseñanza de las estrategias de cálculo, ni tampoco que el trabajo de memorización sea realizado como una actividad puramente mecánica. Es importante realizar en el aula actividades que tengan como objetivo la memorización de ciertos cálculos multiplicativos, precedidas o acompañadas por un fuerte trabajo de reflexión y análisis de las relaciones numéricas (Kamii, 1986; Parra, 1994).

Es interesante realizar la construcción colectiva de cuadros a partir de las relaciones de proporcionalidad entre ciertos elementos:

BICICLETAS	RUEDAS
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20

TRICICLOS	RUEDAS
1	3
2	6
3	9
4	etc.
5	
6	
7	
8	
9	
10	

A través de la confección de estos cuadros, los niños podrán empezar a encontrar regularidades en los números: "podés ir sumando siempre de a 3" o bien "parece una escala de tres", "si en 2 triciclos hay 6 ruedas, para saber en 4 triciclos le sumás 6 ruedas más".

10. En el artículo "Diversas estrategias de cálculo para sumas y restas" se ha hecho mención a la importancia de que los niños dispongan de recursos memorizados (Parra, 1994, Guillaume, 1988).

Para completarlas utilizarán diferentes estrategias que podrán ser compartidas posteriormente. Estos cuadros de doble entrada (bicicletas y ruedas, triciclos y ruedas y autos y ruedas, por ejemplo) pueden constituirse en un "diccionario" de consulta. Se les propone a los niños que cuando necesiten apelar a algunos de dichos resultados en un nuevo problema, pueden consultarlos. Para ello será necesario que estén fácilmente ubicables por un tiempo en los cuadernos y en algún afiche en el aula.

Es necesario distinguir entre las actividades dirigidas a la memorización aquí propuestas, basadas en un trabajo de reflexión y análisis de las relaciones de conjuntos de números, y las "tablas" en las que cada producto debe ser memorizado aisladamente (7 x 8 = 56) o en una sucesión oral (3 x 1 = 3; 3 x 2 = 6, etc.). La memorización del recitado lleva incluso a que algunos niños solamente puedan recordar un producto a partir del recitado de la totalidad de las tablas.

Para el abordaje de todos los productos de los números del 1 al 10 se les puede proponer a los niños, en lugar de dichas tablas, que completen un cuadro de entrada -tabla pitagórica -:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

El trabajo inicial de completamiento puede ser realizado a partir de diferentes estrategias. Cada niño se apoyará en diferentes relaciones: algunos habrán descubierto que se repiten todos los casilleros, 3 x 4 = 4 x 3; otros encontrarán cómo se puede ir llenando verticalmente sumando sucesivas veces el número de la columna; otros niños harán en primer lugar las filas y columnas de números "más redondos", como el 2, el 4, el 5, etcétera.

Esta actividad, aparentemente ejercicio mecánico, puede ser una situación fértil de enseñanza cuando está mediada por una instancia de reflexión y análisis. Se les puede preguntar a los alumnos: ¿cómo hacen para llenar más rápido la grilla? Se comentan las diferentes estrategias. Seguramente todos los niños han inventado alguna forma que toma propiedades de la multiplicación y relaciones entre los números. Se espera que puedan decir: "Yo primero llené toda la fila y la columna de x 1, porque eran los mismos números y además eran iguales", "Yo hice la columna del 2 haciendo todos los dobles y para hacer la del 3 sumé la del 2 y la del 1". Se les puede proponer luego que busquen relacionar la columna del 2, la del 4 y la del 8, o vincular la del 5 y la del 10.

Cada una de las estrategias utilizadas por los niños lleva implícita una o más propiedades de la multiplicación y de los números involucrados. El pedido a los alumnos de explicitación de estrategias "de llenado" tiene como objetivo la toma de conciencia y difusión de dichas propiedades. A partir del reconocimiento e intercambio de propiedades se intenta favorecer el pasaje del uso a la enunciación de ciertas reglas, de tal manera que éstas puedan ser evocadas y reutilizadas en nuevas situaciones.

Este cuadro de doble entrada también se constituye durante un tiempo en "diccionario de consulta".

De este modo, el trabajo de memorización de productos puede partir de una situación de análisis de ese conjunto de datos organizados, de tal manera de ir generando la posibilidad de obtener conclusiones y memorizar ciertos productos a partir de un trabajo reflexivo.

Posteriormente pueden realizarse actividades diversas dirigidas a ampliar aquello que ha sido memorizado o destinadas a que todos memoricen lo que han logrado algunos. A tal fin, existen numerosas actividades (bingos, loterías, dominós, memory, etc.). No se trata exclusivamente de que los niños las vayan aprendiendo "sin darse cuenta, mientras juegan". Los niños podrán jugar, pero se trata de incluir también actividades de reflexión acerca de lo que se sabe y de lo que no se sabe, es decir, fomentar la toma de conciencia de cuáles son los productos que cada alumno ha memorizado y cuáles aún no. Pueden establecerse cuáles son los productos que ya todos saben y aquéllos que hay que saber próximamente (Parra, 1994).

Otra actividad es encontrar los resultados de productos "difíciles" a partir de otros "fáciles", apoyándose en las propiedades de la multiplicación y en productos ya conocidos. Por ejemplo (Saiz, s/f):

$$7 \times 8 = 7 \times 2 \times 2 \times 2$$

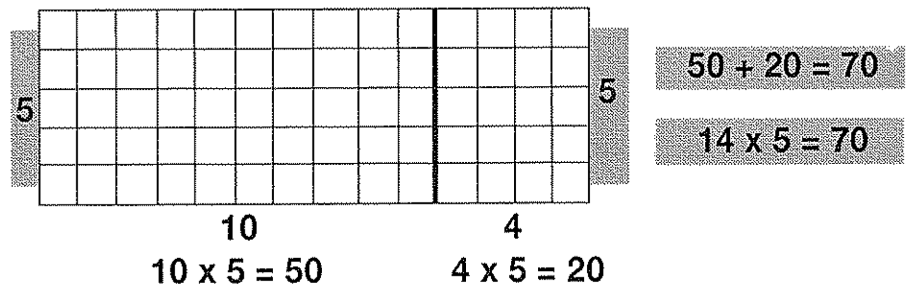
$$9 \times 6 = 9 \times 2 \times 3$$

En este caso está en juego -además de la evocación de resultados conocidos- la propiedad asociativa de la multiplicación, que en este ciclo los niños podrán utilizar, aunque no sea nombrada de este modo.

Entre los recursos memorizados de los que los niños deben disponer se encuentra la multiplicación por la unidad seguida de ceros. Para ello se podrán abordar, a partir de algunos problemas, cálculos de diferentes números x 10. Al principio, los niños realizarán sumas sucesivas mentalmente. Luego empezarán a poner en juego algunas ideas que han construido acerca de lo que sucede al multiplicar por 10. Seguramente, no tendrán dificultades en encontrar regularidades que les permitan realizar la multiplicación de cualquier número hasta 9 x 10 y empezarán a utilizar la regla "hay que agregar un 0".

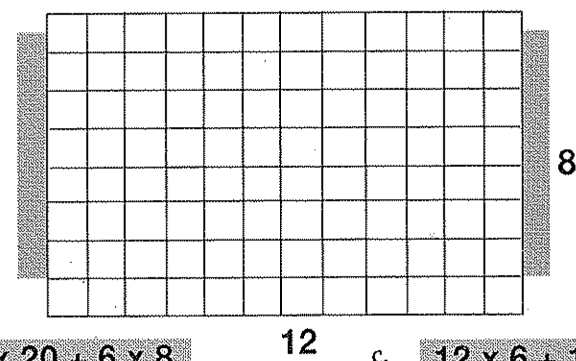
Será interesante proponerles que indaguen qué sucede cuando se multiplica 13 x 10 o 15 x 10. Algunos niños harán 15 x 10 del siguiente modo: 10 x 10 = 100 y 100 + 5 = 105; otros niños realizarán la descomposición en forma correcta, multiplicando tanto el 10 como el 5 por 10 y obteniendo 150. Será una nueva oportunidad para empezar a poner en juego la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, aunque por supuesto los niños no la formularán de dicho modo. Podrán decir: "hay que multiplicar el 10 y también el 5".

Algunos problemas sobre cuadriculados permitirán a los niños de tercer año usar la propiedad asociativa y la propiedad distributiva. Por ejemplo, para el cálculo de la cantidad de cuadraditos que tiene un rectángulo de 14 x 5 de lado, los niños podrán realizar en primer lugar 10 x 5 y luego 4 x 5 para calcular 14 x 5. O bien podrán hacer 7 x 2 x 5. Será interesante plantear a los alumnos si se pueden realizar otros cálculos, por ejemplo 8 x 5 + 6 x 5 para averiguar el total de cuadraditos.



Luego se les pueden proponer diferentes escrituras multiplicativas y aditivas para las relaciones con rectángulos dados. Por ejemplo:

"Marcá con una cruz todas las expresiones que pueden permitir calcular la cantidad de cuadraditos de este rectángulo".



a. 6 x 20 + 6 x 8 c. 12 x 6 + 12 x 2

b. 12 x 4 + 12 x 4 d. 6 x 4 + 6 x 4

El análisis que exige reconocer que solamente b y c son correctas involucra tanto las propiedades de la multiplicación como el sentido vinculado a las organizaciones rectanculares.

La cuenta de multiplicar

A fines de primer año, los niños podrán resolver algunos sencillos problemas que involucran la multiplicación, utilizando dibujos y procedimientos de conteo, con la finalidad de que resuelvan situaciones para las cuales no conocen directamente un cálculo. En este año, los objetivos de esta inclusión son más bien de orden metodológico, ligados al tratamiento de la información: producir estrategias, compararlas, analizar diferentes formas de resolver un nuevo problema.

Durante segundo año estarán en condiciones de reconocer, frente a un problema, la cuenta de suma que permite resolverlo. Por ejemplo 5 + 5 + 5 + 5. Posteriormente se empezará a exigir a los niños que escriban, luego de la suma reiterada, cuál es el producto que sintetiza la operación, en este caso 4 x 5.

También en este año, los alumnos podrán resolver problemas con números más grandes, en los que tengan que realizar, por ejemplo, el producto 16 x 3. ¿Cómo se espera que puedan resolverlo los niños si aún no saben el algoritmo de la multiplicación? Podrán apoyarse en descomposiciones aditivas y realizar procedimientos de cálculo mental.

Por ejemplo (evidentemente los alumnos no escribirán estas expresiones):

para resolver 16 x 3 = pensar 16 + 16 + 16. Entonces se puede hacer 30 (de 10 + 10 + 10) + 6 + 6 + 6, que es, finalmente, 30 + 18 = 48.

Estarán utilizando intuitivamente la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Luego de que los niños han aprendido a utilizar diferentes procedimientos de cálculo mental apoyándose en descomposiciones, se les puede proponer la invención de una cuenta vertical. El objetivo de esta actividad es que los niños produzcan diferentes representaciones de las acciones realizadas.

Se espera que los niños, apoyándose en el algoritmo de la suma, puedan en tercer año inventar estrategias de cálculo mental escrito para cuentas como la siguiente:

126
x 3

Por ejemplo:	O bien:	también:
126	126	126
x 3	x 3	x 3
300 (de 3 x 100)	18	360 (de 120 x 3)
+ 60 (de 3 x 20)	+ 60	+ 18 (de 6 x 3)
18 (de 3x 6)	300	378
378	378	

Los niños podrán resolver, entonces, diferentes cálculos utilizando procedimientos de cálculo mental primero, luego se aproximarán a procedimientos de cálculos verticales realizando diferentes descomposiciones y analizando si obtienen o no el mismo resultado.

El algoritmo convencional se presenta, luego, como un procedimiento más sintético a partir de los utilizados por los niños, pero basado en la misma propiedad: se realizan diferentes multiplicaciones a partir de descomponer el número.

126
x 3
378

Una vez que los niños conocen el algoritmo de la multiplicación no "desaparece de la escena" el cálculo mental. Se continúan proponiendo ejercicios de estimación y verificación de cálculos, planteando problemas que no exijan resultados exactos, etcétera.

Por ejemplo:

"Colocar mayor o menor sin hacer la cuenta:"

125 x 3 .... 230 x 4

56 x 8 .... 98 x 5

O bien:

"Señalá cuál de los tres números puede ser el resultado correcto y justificá por qué lo elegiste."

135 x 5 = 675 - 1076 – 345

231 x 4 = 2140 – 924 - 804

También :

"La mamá de Nicolás le pidió que le trajera galletitas para hacer una torta. Le dijo que iba a necesitar aproximadamente 100, pero que comprara de más porque siempre se rompen algunas. Nicolás se fijó que en cada paquete vienen 12. ¿Cuántos paquetes crees que compró?"

El cálculo mental permite realizar, en tercer año, multiplicaciones por números mayores que 10, por ejemplo:

120 x 25 = 120 x 10 + 120 x 10 + 120 x 5

Sin embargo, el algoritmo convencional de la multiplicación por dos cifras es más complejo, pues "oculta" una doble propiedad distributiva. Por ejemplo, para 126 x 23, al multiplicar primero 126 x 3 y luego 126 x 20 se realizan seis multiplicaciones:

126 x 23 = 3 x 6 + 3 x 20 + 3 x 100 + 20 x 6 + 20 x 20 + 20 x 100

Lo cual justifica su abordaje recién en cuarto año.

En este artículo han sido planteados criterios y actividades para abordar la enseñanza de la multiplicación en los primeros años. En síntesis:

- La enseñanza de la multiplicación es de tal complejidad que abarca varios años de la escolaridad. En los diferentes años se irán reorganizando los conocimientos sobre dicha operación.
- En el inicio del estudio de la multiplicación es importante la diferenciación de los problemas de sumas no reiteradas
- El aprendizaje de la multiplicación no se agota con los problemas de proporcionalidad. Es importante incluir problemas diferentes.
- Los niños están en condiciones de empezar a resolver sencillos problemas multiplicativos utilizando diversos procedimientos, aun antes de disponer de recursos de cálculo multiplicativo,
- La enseñanza de la multiplicación incluye tanto el campo de problemas como la construcción de recursos de cálculo.
- Las estrategias de cálculo, la representación simbólica y la memorización no son requisitos previos para la resolución de problemas.
- En el abordaje de la multiplicación es importante incluir la resolución de problemas llamados clásicamente "de dividir".
- Entre las estrategias de cálculo se encuentran los procedimientos de cálculo mental que ponen en juego las propiedades de la multiplicación y de nuestro sistema de numeración y que pueden ser abordadas previamente al aprendizaje del algoritmo convencional y luego simultáneamente.

Se ha intentado también mostrar, para los diferentes aspectos, la importancia del trabajo colectivo de reflexión y análisis de los problemas planteados. De este modo se promueve la comunicación, la explicitación y la difusión de propiedades y conclusiones para que se tornen accesibles a todos los niños.

5
La enseñanza de la división en los primeros años

En artículos anteriores se ha abordado la construcción de los sentidos de la suma y la resta, como así también de la multiplicación. Se presentó un breve análisis crítico acerca de la concepción de la enseñanza de los cálculos como requisito previo para la resolución de problemas que involucran una operación. Por el contrario, se ha asumido una perspectiva en la que es central la actividad de resolución de problemas para la construcción del significado de las operaciones y en donde la construcción de los recursos de cálculo puede ser abordada a partir de los mismos.

Este posicionamiento implica que, por una parte, los niños están en condiciones de resolver problemas previamente al dominio de los cálculos y, por otra, es a partir de los problemas que resuelven que podrán ir ampliando dicho dominio. Se ha enfatizado, para el análisis de la suma, la resta y la multiplicación, que la construcción de los sentidos de las operaciones involucra tanto las técnicas operatorias, el dominio de un conjunto de situaciones problemáticas, el uso de formas de representación, el estudio de propiedades, etcétera.

Desde dicha perspectiva podemos preguntarnos ahora: ¿por dónde iniciar la enseñanza de la división? ¿Cómo hacer evolucionar los conocimientos de los alumnos sobre esta operación en cada año? ¿Cuáles son los diferentes tipos de problemas de división para trabajar en el primer ciclo?

En primer año es posible "dividir" sin saber "dividir"

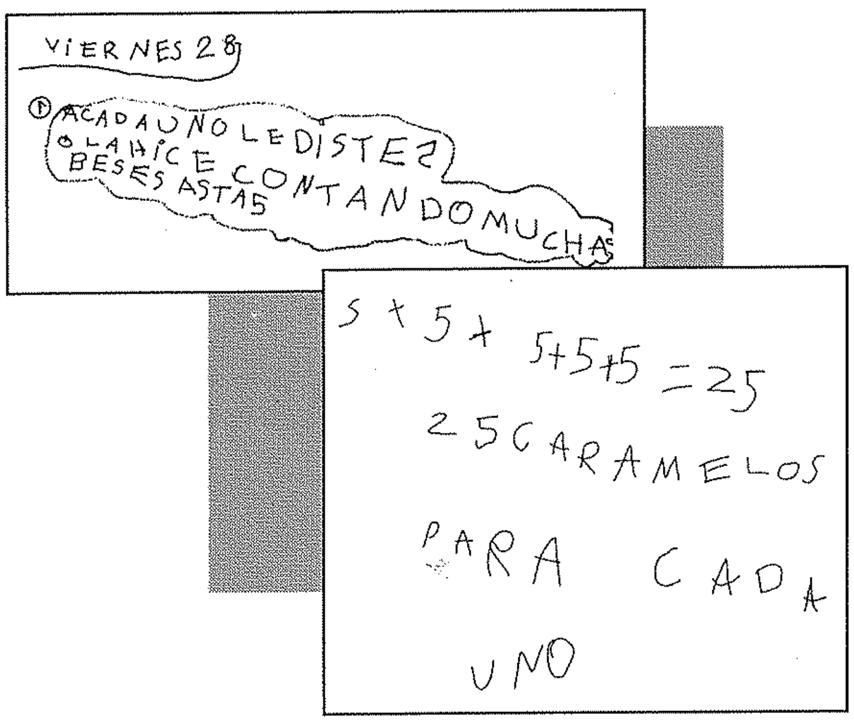
Analicemos el siguiente problema:

"Tengo 25 caramelos para repartir en partes iguales entre 5 niños. ¿Cuántos para cada uno?"

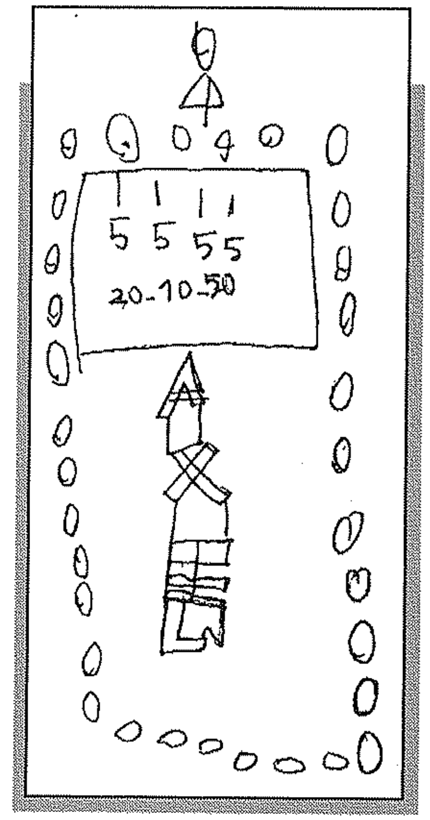
Los chicos de primer año no han aprendido aún a reconocer que este problema puede resolverse con una operación como 25: 5. Sin embargo, pueden resolverlo.

Algunos alumnos utilizan procedimientos en los que representan gráficamente a los niños y luego dibujan un caramelo o una marca, repartiendo de 1 en 1 entre los 5 niños. Finalmente cuentan los caramelos de cada niño.

Otros niños utilizan algún tipo de material o dibujan palitos para distribuir y luego contar. Algunos prueban con diferentes sumas sucesivas: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 y no les da 25, luego prueban con 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5.



Y otros restan un número a 25 varias veces, hasta encontrar que es el 5.



El objetivo de que los niños resuelvan un problema como éste es que aprendan a enfrentarse a situaciones para las cuales no tienen un procedimiento experto y por lo tanto tienen que producir una estrategia propia de resolución a partir de lo que sí saben. Para los niños pequeños, resolver un problema como éste con los conocimientos que ellos disponen tiene un gran desafío vinculado a la comprensión de la situación, al tratamiento de la información, a la necesidad de organizar los datos, etcétera.

Es importante que los niños desde primer año tengan oportunidades de resolver problemas como éste, en lugar de restringir las propuestas a aquellos problemas para los cuales conocen la operación.

Por otra parte, su resolución permitirá ir abonando progresivamente en la comprensión de un nuevo tipo de problemas: de reparto, en este caso.

En primer año, los niños podrán resolver problemas similares a través del conteo, del reparto uno a uno, de sumas y de restas.

Durante segundo y tercero, la resolución de problemas de partición permitirá seguir cargando de significado lo que se ha ido aprendiendo sobre la multiplicación. Es importante que los niños se enfrenten simultáneamente a problemas de partición a la vez que resuelven problemas "de multiplicar". Justamente por la relación entre ambos tipos de problemas, los niños irán reconociendo cómo la multiplicación es un conocimiento útil para la resolución de problemas de división, aunque disponiendo de los recursos no los utilicen inmediatamente en estos problemas.[11]

Ahora bien, hay aspectos específicos que es importante abordar en una propuesta de enseñanza sobre la división en segundo o tercer año especialmente.

11. Este aspecto ha sido mencionado en el artículo sobre la enseñanza de la multiplicación.

Las particiones no son siempre muy justas

Aprender sobre la división significará ir progresivamente aproximándose a sus propiedades. La división puede significar una partición en partes iguales. Sin embargo, es interesante proponerles a los niños de primero, segundo y tercer año que resuelvan diversos problemas en los que no sea siempre un requisito que las partes sean iguales. Por ejemplo:

"Un señor tiene 18 caramelos y quiere dárselos a sus 4 hijos. ¿Cuántos les dará a cada uno?"

Aquí nada indica que hay que darle la misma cantidad de caramelos a cada niño. El objetivo de incluir problemas de este tipo es analizar, luego de su resolución, que las posibilidades de distribución son variadas. Algunos niños responderán que les dará 6, 6, 5 y 1 y argumentarán que a los más grandes se les puede dar más. Otros dirán que les va a dar 4, 4, 4 y 6, diciendo que al único varón le puede dar más.

Pero, posiblemente, la mayor parte de los niños considere injusto que el señor les dé más caramelos a unos hijos que a otros. Habrá que desviar esta discusión sobre los principios "morales" que subyacen a las decisiones del señor hacia el análisis de lo que "dice" el problema. Y en el problema no se exige un reparto equitativo. Se les podrá proponer a los niños la reelaboración del enunciado. ¿Qué habría que cambiarle a este problema para que todos tengan que tener lo mismo? El problema, luego de ese trabajo colectivo, podría quedar enunciado de este modo:

"Un señor tiene 18 caramelos y quiere repartirlos entre sus 4 hijos, dándoles lo mismo a cada uno. ¿Cuántos caramelos les puede dar?"

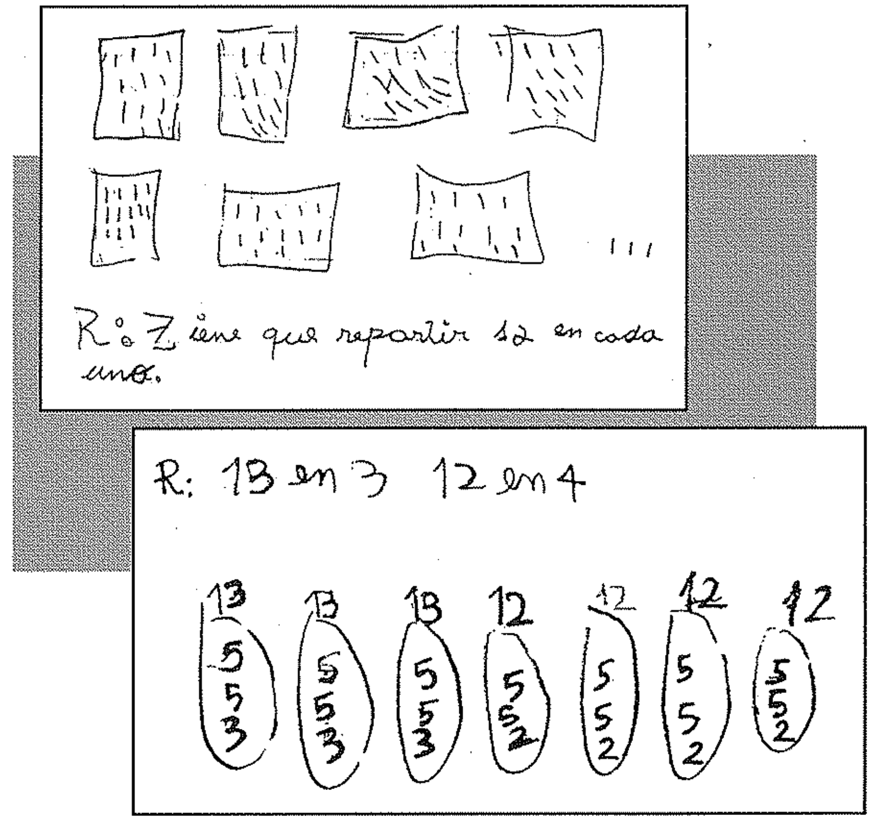
Es decir que es posible proponer a los niños tanto situaciones de particiones no equitativas, como otras que exijan una distribución en partes iguales. El docente podrá intervenir con el objetivo de provocar la formulación de alguna conclusión que pueda ser reutilizada. Se espera que, luego de resolver los problemas, analizarlos y discutir sobre ellos, los niños puedan sacar conclusiones de este tipo: "cuando el problema no lo dice se puede dar más a unos que a otros, pero cuando lo dice hay que darles a todos lo mismo".

A veces sobra (pero lo que sobra no siempre se reparte)

Simultáneamente, se pueden proponer problemas de reparto en los que el resto sea 0 y problemas en los que el resto sea distinto de 0. Será interesante discutir con los niños "qué se hace con aquello que sobra". Es habitual que intenten repartir lo que sobra, dándoles a algunos más que a otros.

Por ejemplo:

"Malena compró 87 regalitos de cotillón para repartir en partes iguales a sus 7 amigos el día de su cumpleaños ¿Cuántos regalitos le dio a cada uno?"



Algunos niños de tercer año responden que 12 a cada niño y sobran 3 y otros dicen que les da 12 a algunos niños y 13 a otros.

Será una nueva oportunidad para seguir trabajando el significado del reparto equitativo. Se promoverá la discusión acerca de si son posibles o no, en este problema, ambas respuestas.

También se intenta que los niños distingan entre aquellos problemas en los que sobran elementos y no se puede repartir, de aquéllos en los que no hay resto porque los objetos se pueden partir. Por ejemplo:

"Andrea tiene 18 globos y quiere repartirlos entre 4 niños en partes iguales. ¿Cuál es la mayor cantidad de globos que puede darle a cada uno?"

"Andrea tiene 18 chocolates y quiere repartirlos entre 4 niños en partes iguales. ¿Cuál es la mayor cantidad de chocolates que puede darle a cada uno?"

En el primer caso los niños realizarán –por medio de un dibujo o de sumas sucesivas- el reparto entregando 4 a cada niño. La respuesta correcta es 4 a cada niño y sobran 2 globos.

En el segundo, algunos niños contestarán igual que en el problema anterior. Otros, en cambio, dirán que se les puede dar 4 chocolates y medio a cada nene. Se tratará de promover una discusión acerca de si se pueden o no partir los chocolates. Luego de haber establecido la respuesta correcta en la puesta en común, el docente resaltará ciertas reflexiones realizadas por los niños acerca del carácter "fraccionable" de los objetos involucrados. Por ejemplo: "A veces se pueden partir las cosas que hay que repartir y otras veces no". El objetivo de esta intervención del docente es que la conclusión se torne disponible para todos.

En este caso tenemos dos problemas aparentemente iguales, pero que la variable del tipo de objetos hace que no lo sean. Los niños aún no han abordado sistemáticamente el aprendizaje de las fracciones, sin embargo, están en condiciones de utilizar nociones intuitivas de las mismas, que les permitirán escribir expresiones como las siguientes: "Les da, a cada nene, 4 chocolates y medio".

Rta:
a cada chico le voy a dar 4 choco-
lates y medio a cada chico.

No es lo mismo repartir que averiguar las partes

"Laura tiene 25 caramelos y quiere repartirlos entre sus tres amigos en partes iguales. ¿Cuántos les dará a cada uno?

"Laura tiene 25 caramelos y quiere darle 3 a cada uno de sus amigos. ¿A cuántos amigos puede darles?"

Estos dos problemas son matemáticamente equivalentes, se resuelven con la operación 25 : 3. En ambos casos, el resultado será 8 y sobrará 1. Los niños que reconocen la división la utilizarán en ambos problemas. Pero esto no siempre sucede. Desde el punto de vista de algunos niños no son iguales. ¿En qué consisten las diferencias?

En el primero se conoce la cantidad de partes (tres niños) y se pide averiguar el valor de cada parte (cuántos caramelos a cada uno). Los niños podrán utilizar procedimientos de repartir uno a uno.

En el segundo, en cambio, se conoce el valor de cada parte (cuántos a cada uno) y es necesario averiguar en cuántas partes se puede dividir la colección de 25 (cuántos amigos). Para resolverlo no es posible repartir de uno en uno, porque no se sabe "en cuántos repartir". Será necesario partir la colección restándole 3 a 25 tantas veces como sea posible (Doc. 4, GCBA,1997).

Otro problema en el que se conoce el valor de cada parte es el siguiente:

"Tengo 45 empanadas y quiero colocarlas en platos, de tal manera que haya 8 en cada plato. Calcular cuántos platos necesito."

Algunos niños sumarán varios 8 hasta acercarse a 45. Otros utilizarán la resta para ir "descontando" sucesivamente 8 a partir del 45. Seguramente, en tercer año ya muchos niños utilizarán productos:

6 x 8 = 48 (me pasé)

5 x 8 = 40 (puede ser... y sobran 5)

Se puede esperar que este segundo tipo de problemas les resulte a los niños más complejo que los del primer tipo, justamente porque se inhibe la posibilidad de hacer el reparto de uno en uno.

Es importante que el docente estimule la resolución de ambos tipos de problemas y la difusión en la clase de procedimientos posibles, especialmente para aquellos problemas para los cuales los alumnos han encontrado dificultades.

Repartos equivalentes

Otro tipo de problemas de reparto que puede plantearse a los niños son distribuciones equitativas, pero en las cuales no se da el valor de cada parte ni la cantidad de partes. Por ejemplo:

"Una señora tenía 24 caramelos y los repartió entre unos chicos, de tal manera que a todos les dio la misma cantidad. Averigua a cuántos chicos pudo haberles dado caramelos y cuántos a cada uno."

En este caso podrán encontrar diferentes soluciones a este problema:

1 chico,	24 caramelos
2 chicos,	12 a cada uno
3 chicos,	8 a cada uno
4 chicos,	6 a cada uno
6 chicos,	4 a cada uno
8 chicos,	3 a cada uno
12 chicos,	2 a cada uno
24 chicos,	1 a cada uno

Muchos niños se conformarán con haber encontrado una sola solución. El trabajo posterior de la clase estará dirigido a que los niños tomen conciencia de que diversas soluciones eran posibles. Podrán registrar todas las respuestas en sus cuadernos y buscar –si es que no han aparecido todas las opciones- nuevas posibilidades entre todos.

Una diferencia importante entre plantear este problema a niños de segundo y de tercer año es el tipo de procedimientos que se pretende que los niños utilicen. Al plantear este problema en segundo, algunos niños utilizarán sumas sucesivas. Se espera, en cambio, que los niños de tercero dispongan de conocimientos sobre la multiplicación que les permitan buscar directamente "multiplicaciones que den 24". Podrán entonces realizar alguno de estos cálculos:

$$
\begin{array}{rcrcr}
1 & x & 24 & = & 24 \\
2 & x & 12 & = & 24 \\
3 & x & 8 & = & 24 \\
4 & x & 6 & = & 24 \\
6 & x & 4 & = & 24 \\
8 & x & 3 & = & 24 \\
12 & x & 2 & = & 24 \\
24 & x & 1 & = & 24
\end{array}
$$

En el momento de puesta en común será interesante, en este año, además de debatir sobre la cantidad de soluciones, comparar estrategias utilizadas. El docente resaltará aquellas intervenciones de los alumnos que muestren la economía de utilizar la multiplicación –"si multiplicás no necesitás dibujar", "en vez de sumar muchas veces conviene buscar multiplicaciones que den 24".

La resolución de este tipo de problemas y el análisis acerca de los procedimientos permitirán poner en juego la multiplicación como un recurso para resolver problemas de partición, recurso que se utilizará en otros problemas.

A veces lo que sobra cambia todo el problema

Se han distinguido problemas en los que no hay resto y otros en los que sí lo hay; problemas en los que se pueden partir los objetos (chocolates) y otros en los que no se puede (globos). En otros problemas de división, el resto "no se puede partir", pero determina el resultado, son algunos problemas de búsqueda de cantidad de partes. Por ejemplo:

"Quiero alquilar motos para 9 personas. En cada moto pueden subir hasta dos personas. ¿Cuántas motos tengo que alquilar?"

Este caso puede resolverse con la división 9 : 2 = 4 y sobra 1.

$$
\begin{array}{r|l}
9 & 2 \\ \cline{2-2}
1 & 4
\end{array}
$$

Pero si se alquilan 4 motos –el cociente– no entran las 9 personas. La existencia de un resto que no es cero exige alquilar una moto más. La respuesta al problema es 5 motos.

Es posible que algunos niños no se den cuenta de que es necesaria otra moto, o crean que no es posible alquilar una moto para una sola persona. Otros niños se darán cuenta de la respuesta. Será necesario, luego de la resolución individual, confrontar resultados y permitir a los niños defender sus ideas.

Otro ejemplo puede ser el siguiente:

"Hay que transportar 34 personas en taxis. En cada uno sólo entran 4 personas. Calcular cuántos taxis es necesario alquilar."

Será necesario alquilar un taxi más para las personas que sobran. Algunos niños de tercer año que utilizan la multiplicación para resolverlo, dicen por ejemplo "hay que pasarse de 34" para que entren todos, es decir 9 x 4 = 36

Lo mismo ocurre en problemas en los que, por ejemplo, se desean empaquetar 52 libros en paquetes en los que entran 10 libros por paquete o colocar 53 empanadas en fuentes en las que en cada una entran 9. Será necesario considerar que el resto exige un paquete o una fuente más.

Este tipo de problemas permite poner en juego el análisis del resto (Documento Nro. 4, GCBA, 1997). Evidentemente, no será suficiente con resolver un solo problema de este tipo para que todos los niños estén en condiciones de realizar individualmente este análisis. Será importante enfrentar a los niños a varios problemas similares e incluirlos entre otros para exigir la decisión en cada situación.

Cuando los niños dominan el algoritmo de la división, es interesante retomar este tipo de problemas para que tomen conciencia de que no alcanza "con hacer la cuenta" para resolverlo. Frecuentemente se presentan problemas en los que la respuesta está dada por el cociente. En este caso no es suficiente con averiguar el cociente para saber el resultado del problema. Es necesario un paso más: analizar qué sucede con el resto.

Este tipo de problemas se empieza a poner en juego en tercer año, pero cobra su sentido más pleno en el segundo ciclo, cuando los niños operan con racionales y tienen que tomar decisiones vinculadas con el resto, según el contexto del problema.

Dividir en problemas de proporcionalidad

No todos los problemas de división son problemas de reparto. Por ejemplo, los problemas de proporcionalidad en los que hay dos series involucradas y hay que averiguar el valor de la unidad, o dado el valor de la unidad hay que averiguar cuántas unidades hay.

Para averiguar el valor de la unidad:

"Compré 7 remeras iguales y todas costaron 84 $. Calcular el precio de una remera"

o bien para averiguar la cantidad de unidades:

"Compré remeras a 12 $ cada una. Pagué 84 $. ¿Cuántas remeras compré?"

REMERAS	PRECIO
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60
6	72
7	84

Si organizamos el conjunto de los datos involucrados en ambos problemas en una tabla, podremos reconocer dos series proporcionales, pero en cada uno de los problemas la incógnita está en un lugar diferente. Ambos son problemas de proporcionalidad en los que hay que dividir.

En el primero:

REMERAS	PRECIO
7	84
1	.....

Y en el segundo:

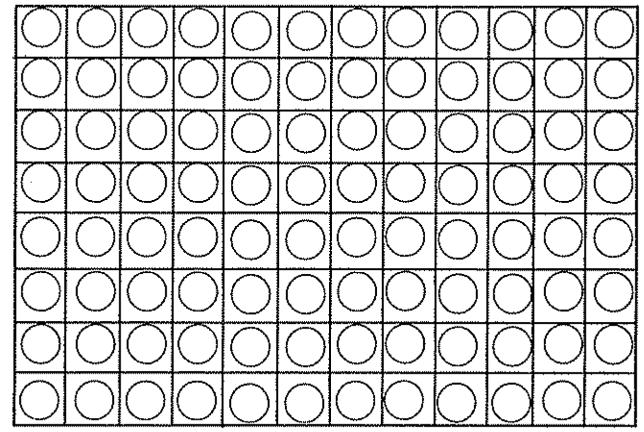
REMERAS	PRECIO
1	12
.....	84

Estos problemas –a diferencia de los de reparto- son problemas que no tienen resto. Esta distinción es importante a los fines de variar el tipo de problemas que se plantean, aunque como hemos mencionado para la multiplicación, no se espera que en el primer ciclo los niños los reconozcan por este nombre, ni que sean capaces de explicitar sus propiedades.

Dividir en problemas de organizaciones rectangulares

Además de los problemas de reparto y de los de proporcionalidad, es importante incluir también otros tipos de problemas. Por ejemplo, situaciones en las que los niños tengan que trabajar con organizaciones rectangulares a través de baldosas o cuadraditos. Por ejemplo:

"Ésta es una plancha de ojalillos. Dibujá otras planchas diferentes que tengan la misma cantidad de ojalillos."



En este caso, estamos frente a un problema similar al ya analizado: "*Una señora tiene 24 caramelos y quiere dárselos a chicos de tal manera que todos tengan la misma cantidad. Averiguá a cuántos chicos puede darles caramelos y cuántos caramelos a cada uno*". Si bien uno es de reparto y el otro de una organización rectangular, son similares en el sentido de que involucran la búsqueda de productos.

Los chicos podrán resolver también problemas de división en los que hay una organización espacial de filas y columnas. Por ejemplo:

"En un portero eléctrico hay 27 botones. Si hay 3 departamentos por piso, ¿cuántos pisos hay?"

Los niños seguramente dibujarán el portero eléctrico agrupando los botones de a 3 y luego contarán los pisos. Posteriormente a la resolución de algunos problemas tratados de un modo colectivo, es esperable que los niños de fines de segundo o de tercer año comiencen a reconocer que se pueden resolver multiplicando, y luego en tercero dividiendo.

Diversos problemas para construir los sentidos de la división

Han sido presentados problemas de repartos no equitativo y equitativo, problemas con resto y sin resto, problemas de proporcionalidad, problemas en los que el resto hace necesario un análisis y problemas de organizaciones rectangulares, etcétera. Muchos de ellos responden simultáneamente a varios aspectos de los mencionados, pues no se trata de una clasificación. Existen aun otros tipos de problemas que involucran la división y que también son posibles de ser presentados a los niños, pero que son objeto de trabajo específico del segundo ciclo (Documento Nro. 4 de Actualización Curricular GCBA,1997).

¿Cuál es el objetivo de proponer problemas diferentes? ¿No es más difícil para los niños acaso reconocer tanta diversidad?

Tradicionalmente se han presentado primero los cálculos y luego problemas similares de aplicación. Desde dicha concepción, el objetivo era asegurarse de que los niños resolvieran bien las situaciones. Al ser éstos todos iguales y ya conocer el algoritmo, se suponía que los niños aprenderían a dividir. Son conocidas las dificultades con las que nos encontramos: no es suficiente con conocer el algoritmo para saber cuándo utilizarlo. Reconocer el campo de utilización de una operación ha sido un aprendizaje que ha quedado a cargo de los alumnos, no forma parte de aquello que se consideraba "aprender a dividir".

Desde esta perspectiva, por el contrario, el objetivo es favorecer la construcción de diferentes significados posibles de la división. Para ello es necesario que los niños resuelvan y conozcan diferentes tipos de problemas, ya que esta operación no sirve exclusivamente para resolver los de un solo tipo. Los niños reconocen más fácilmente la división en unos que en otros problemas y será necesario precisamente abordar en la enseñanza aquellas situaciones donde experimenten más dificultad.

Los recursos de cálculo en tercer año

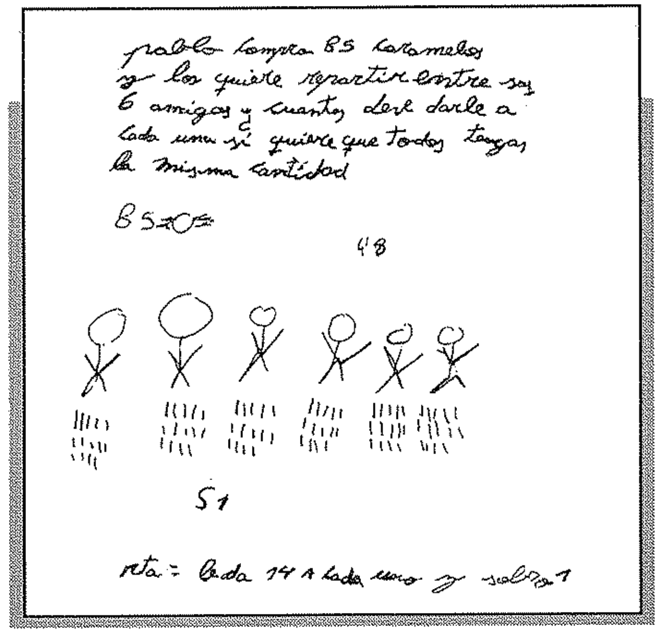
Se han ejemplificado algunos procedimientos que los niños de primero utilizan para resolver problemas de partición. En segundo año continúan utilizando diferentes procedimientos, pero además se espera que empiecen a utilizar la multiplicación como recurso para su resolución. En tercero será necesario abordar nuevos recursos de cálculo a partir de los problemas que resuelven.

¿Cómo se gestan en la clase las condiciones para que los niños avancen y produzcan nuevos procedimientos? ¿Cómo introducir las cuentas de dividir? ¿En qué momento será necesario que realicen cálculos mentales?

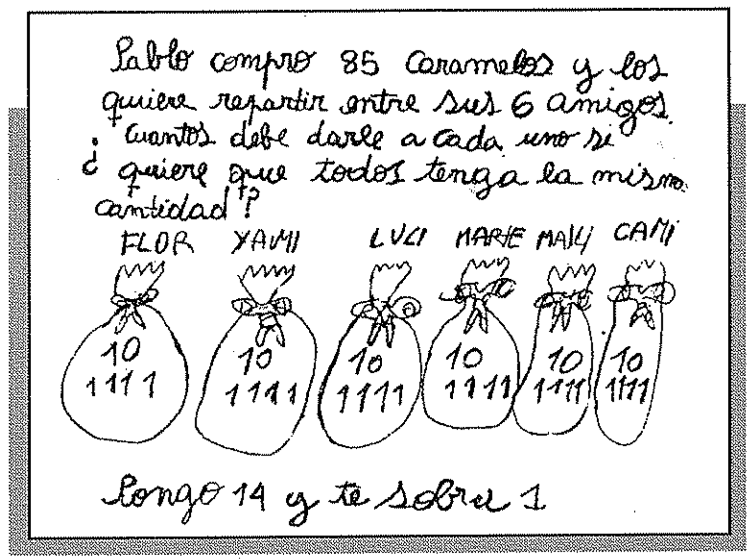
Es posible que, frente a los primeros problemas -incluso en tercer año-, aparezcan procedimientos que van desde el conteo hasta la multiplicación. Por ejemplo, para un reparto de 85 elementos en 6 niños, los niños podrían utilizar:

- procedimientos en los que realizan 85 marcas y dibujan los 6 nenes, luego unen con líneas distribuyendo uno para cada uno,

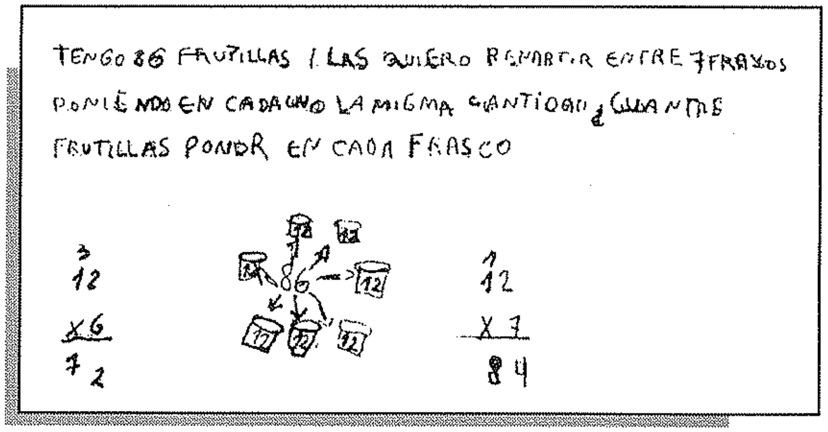
- procedimientos de reparto uno a uno y conteo a partir de 1 hasta 85 en los que los niños dibujan los 6 nenes, luego cuentan de 1 en 1 y simultáneamente hacen marcas,



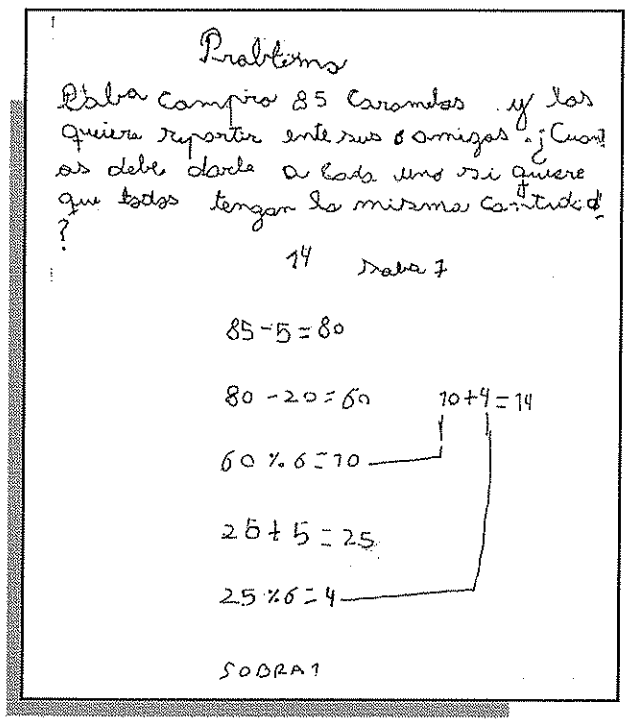
- procedimientos en los que dibujan los 6 niños y luego prueban darle una cantidad a cada uno, Por ejemplo 10 a cada uno, luego 2 más a cada uno, etcétera. Mientras reparten controlan el total repartido, primero 60, luego 12 más, etcétera.



- búsqueda de productos cercanos al número 85. Por ejemplo, probar 6 x 10 = 60 ; como falta, se sigue seguir probando con 6 x 11= 66 ; luego 6 x 12 = 72, etcétera.



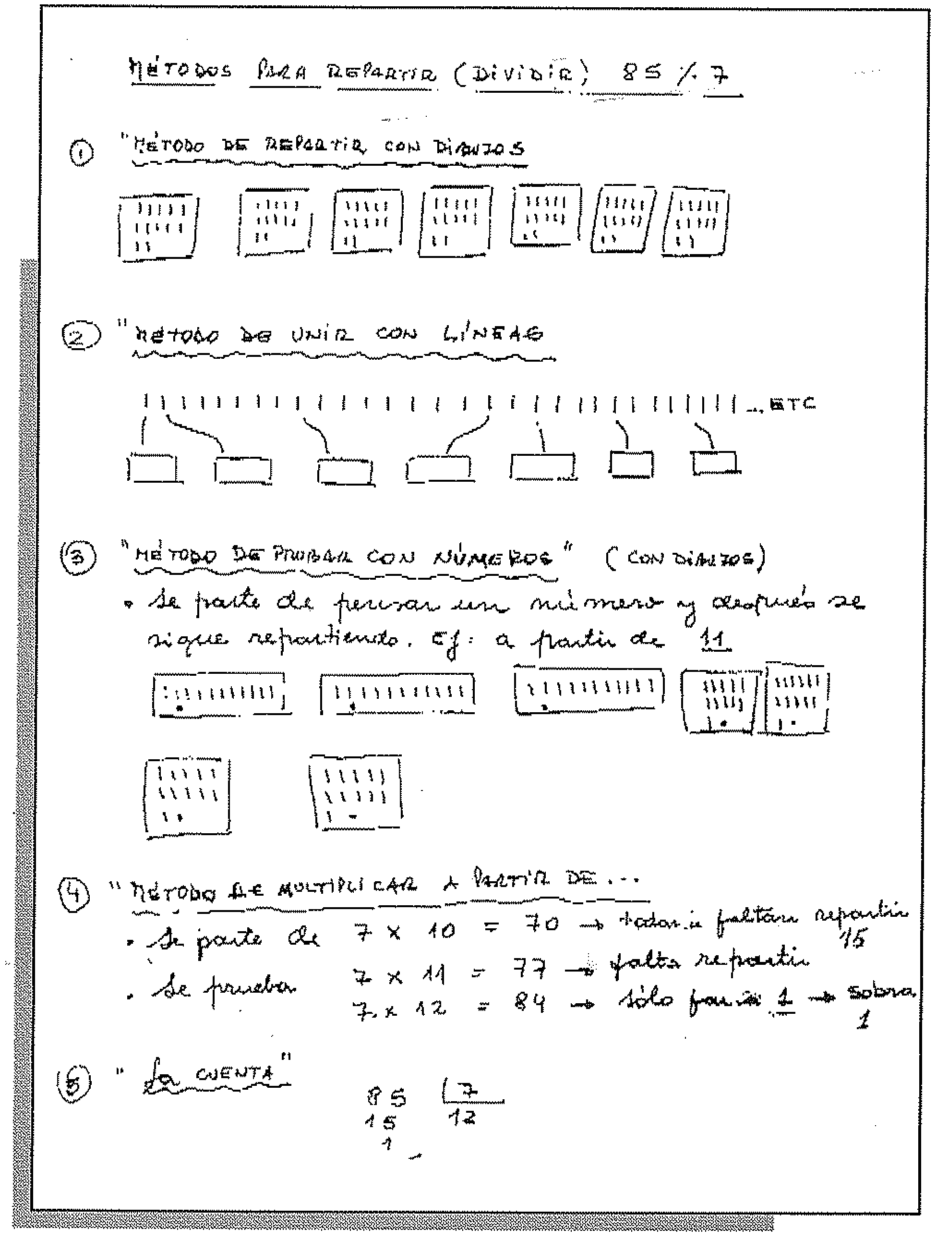
- procedimientos en los que se hace un reparto por partes. Por ejemplo, 10 x 6 = 60, luego se sigue repartiendo lo que sobra, que es 25. Entonces se puede hacer 6 x 4 = 24, ya se repartieron 60 + 24 = 84 y sobra 1. A diferencia del caso anterior, las multiplicaciones no se reemplazan por una nueva, sino que se van acumulando los resultados parciales hasta llegar al reparto total.



¿Qué hacer en la clase frente a estos primeros problemas? En primer lugar, es importante promover la comunicación de procedimientos.

No es necesario que todos los alumnos muestren cómo han resuelto el problema; cuando un niño explica la estrategia utilizada, es importante que el resto pueda en forma creciente empezar a reconocer si ha hecho algo parecido.

Se puede hacer un listado de los procedimientos posibles. Por ejemplo*:



* Puesta en común conducida por las docentes Daniela Gallipoli y Marcela Subijana de tercer año de la Escuela para el Hombre Nuevo.

Luego el docente propone la comparación. Se les pregunta a los niños en qué se parecen y se diferencian, y cuáles son las ventajas y desventajas de cada "método".

Se espera que, a partir de un listado construido en la clase sobre los diferentes modos de resolver el problema, los niños realicen comentarios como los siguientes: "El método de dibujar todas las cosas y unir después con flechas es muy largo", o "Conviene ir probando con un número grande, si probás con uno pequeño tardás mucho", etcétera.

No se pretende que los alumnos de tercer año "pasen" por todos los procedimientos. Por el contrario, se tratará de provocar que utilicen lo más rápidamente posible procedimientos de cálculo.

Para que los niños puedan hacer evolucionar sus recursos serán necesarios nuevos problemas, para cuya resolución se fomente la incorporación de procedimientos utilizados por otros alumnos. El docente debe para ello explicitar la intención de "acortar" la resolución, incitar la búsqueda de formas cada vez más económicas y favorecer el intercambio. "Vamos a resolver un problema parecido y tratar de usar alguno de los 'métodos' más cortos que usaron otros compañeros. Para eso pueden fijarse en los carteles o pedir ayuda."

Los niños empiezan a utilizar multiplicaciones, sumas y restas. A medida que avanzan en los procedimientos de resolución de dichos problemas, se empieza a abordar la construcción colectiva de cálculos que permitan registrar los pasos que se van realizando. Estos procedimientos diversos de los niños serán en un momento homogeneizados.

A partir de los procedimientos inicialmente espontáneos, se provoca la utilización de formas multiplicativas principalmente. Por ejemplo, para el cálculo 85 : 6, recién analizado, se usa:

6 x 10 = 60 llegué a repartir 60

6 x 4 = 24 ya repartí 84 y queda 1

La representación escrita de las operaciones realizadas puede variar. Por ejemplo:

A 85 le saco 60 (10 veces 6) y queda 25.

Le saco 24 (4 veces 6) y sobra 1

O bien:

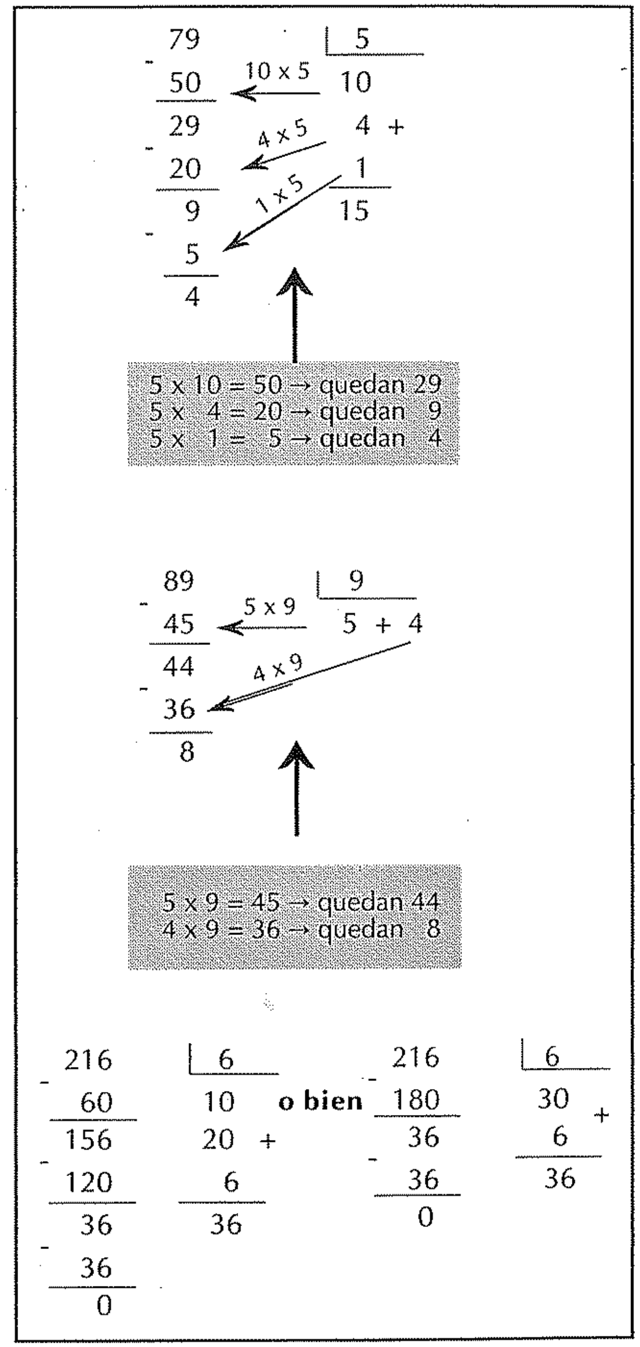
85 – 60 = 25 y 25 – 24 = 1

(10 veces) y (4 veces) = 14

Los procedimientos de los niños –esto ha sido planteado también en relación con los procedimientos de cálculo para sumas y restas- no son total-

mente espontáneos, pues han sido dirigidos colectivamente hacia un tipo específico de cálculos: restas y multiplicaciones. Para ello es requisito que los niños tengan disponibles cálculos mentales x 10 y x 100, los productos hasta el 9, restas de números redondos , etcétera.

Posteriormente se avanza hacia un algoritmo propuesto por Brousseau y que actualmente es tomado por varios textos y documentos curriculares. ¿Por qué "otro algoritmo" intermediario entre los procedimientos de los niños y el algoritmo convencional? Hay numerosos trabajos que muestran las dificultades importantes que tienen los niños con la cuenta de dividir (Saiz, 1994; Lerner, 1992) y textos que intentan promover recursos de cálculo más "transparentes".



¿Cuáles son las ventajas de presentar a los niños este algoritmo en lugar de la enseñanza directa del convencional?

Sin duda, el algoritmo convencional es más corto. Sin embargo, en éste hay más cálculos escritos que posibilitan a los alumnos controlar lo que hacen en cada paso. Habitualmente, los niños se confunden en las cuentas de dividir y los resultados que obtienen muestran una distancia significativa de la solución posible. Cada paso del algoritmo convencional para los niños carece de significado, y por lo tanto hace perder de vista el posible campo de números que puede tener el resultado de la división.

Este algoritmo, al operar con la globalidad de los números –en lugar de separarlos en unidades, decenas y centenas- permite desde el primer momento tener una idea aproximada del cociente. Favorece también la estimación y el control posterior. En el algoritmo convencional, cuando se coloca el primer número del cociente, por ejemplo 4, no se sabe si ese 4 "se convertirá" en un 4, un 40 o un 400. En este algoritmo "se trabaja" con el 400 directamente.

3456	8
- 3200	400

En el algoritmo convencional, los niños tienen que encontrar el mayor número posible "que entra" en otro, es decir, el mayor múltiplo que sea menor al número que se considera parcialmente como dividendo. En este algoritmo, en cambio, los niños pueden ir "repartiendo" por partes y si les sobra pueden seguir repartiendo. Por ejemplo:

Algoritmo convencional

475	8	tengo que tachar y empezar de vuelta con 5
- 32	~~4~~	
15		

como sobran 15 puedo "más que 4"

En este algoritmo

475	8	podía 50, pero calculo primero 40 y luego 10, luego podrá 9 pero tomo primero 5 y luego 4 y no hace falta empezar de vuelta.
- 320	40	
155	10	
- 80	+ 5	
75	4	
- 40	59	
35		
- 32		
3		

El algoritmo convencional es difícil para los niños de ser aprendido y, a pesar de su costo, solamente es útil para dividir por una cifra. Luego los niños tendrán que aprender otro -en el que las dificultades y errores aumentarán enormemente- para dividir por dos cifras. Éste, en cambio, permite a los niños desde tercer año realizar divisiones con cocientes mayores que 10 -que habitualmente son abordadas en cuarto- utilizando el mismo procedimiento:

321	15
- 21	21
6	

321	15
- 150	10
171	+ 10
- 150	1
21	21
- 15	
6	

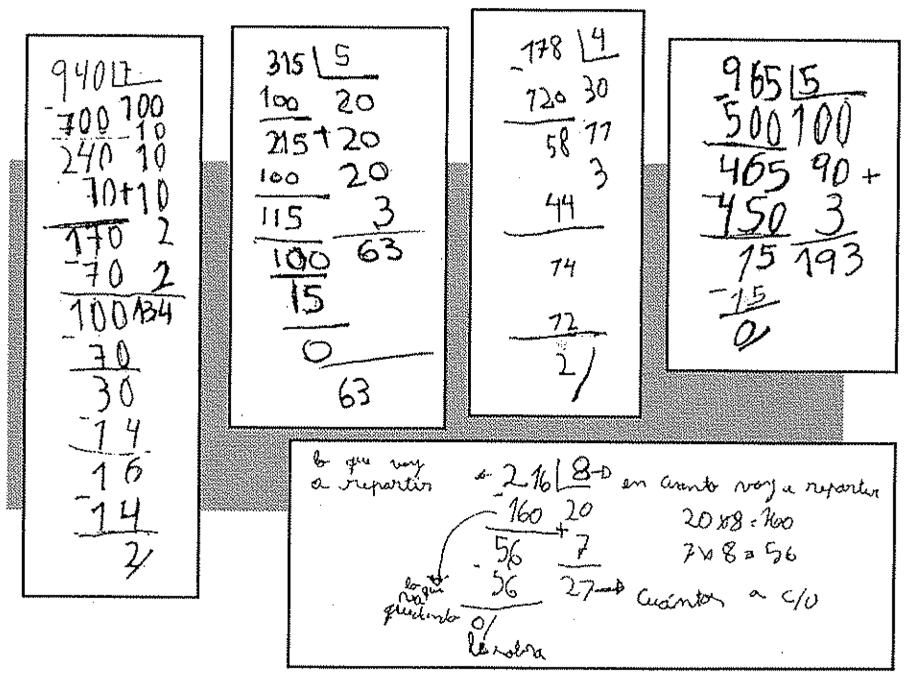
E incluso podría utilizarse para dividir por tres cifras de números redondos:

Por ejemplo :

4675	120
-3600	30

etcétera.

Los niños de tercero o cuarto año lo utilizan de este modo:



¿Esto significa que los niños no precisan aprender el algoritmo convencional? Tal vez en algún momento ya no lo precisen, y la escuela pueda enseñar diferentes algoritmos para que cada alumno decida el que le resulte más conveniente. Pero, por ahora al menos, el uso social justifica el esfuerzo de "pasar" del algoritmo presentado al más difundido. A partir del dominio de estrategias de cálculo y de este algoritmo, los niños están en mejores condiciones de avanzar hacia el conocimiento del algoritmo convencional. ¿Cómo se produce este avance?

Al principio, los niños utilizan variadas multiplicaciones para la búsqueda de cociente.

Luego se les propone buscar el mayor número posible, tratando de acortar la cuenta:

La cuenta me salió bien, pero también se puede hacer mas corta.

```
  526  |3          |    526  |3
- 300   100        |  - 300   100
  226    50 +      |    226    75 +
- 150    25        |  - 225   175
   76   175        |      1
-  75
    1
```

Estas dos cuentas son muy parecidas pero la segunda es más corta

```
  189  |6          |    189  |6
-  60   10         |  - 180   30
  129   10         |      9    1 +
-  60   10 +       |  -   6   31
   69    1         |      3
-  60   31
    9
-   6
    3
```

Ahora trata de acortar esta:

```
  422  |7
-  70   10
  352   10
-  70   10
  282   10 +
-  70   10
  212   10
-  70   60
  142
-  70
   72
-  70
    2
```

En un momento posterior se les enseña a estimar la cantidad de cifras del cociente y a escribir los lugares del mismo:

```
457 |5            10 x 5 = 50
    □□
                  100 x 5 = 500
    ↓
                  entre 10 y 100
va a tener        pero más cerca
dos cifras        del 100
```

```
  457   |5
- 450    9  1
    7    |  |
-   5    |  1 x 5 = 5
    2   hago 90 x 5 = 455
```


Posteriormente, se les presenta a los niños el algoritmo convencional, pero manteniendo la escritura de la resta. Se pretende que los niños dominen simultáneamente ambos, pues para algunos cálculos será mucho más breve este algoritmo que el que se usa actualmente. Por ejemplo:

```
  15025  |5
- 15000   3000
     25      5 +
-    25   3005
      0
```

o bien

```
  4237  |7
- 4200   600
    37     5 +
-   35   605
     2
```

Con respecto a los recursos de cálculo es relevante continuar abordando estrategias de estimación, control posterior acerca del resultado obtenido, recursos de cálculo mental, etc., aspectos necesarios para seguir avanzando tanto en la construcción del algoritmo convencional como en la utilización de variadas estrategias de cálculo (Parra, 1994 ; Saiz,1994).

Nos damos cuenta de que, en tiempos de la calculadora, la velocidad ya no es tan importante como cuando se inventó el algoritmo que se enseña actualmente en la escuela. Parece mucho más necesario el control de la calculadora, la estimación, el cálculo aproximado. Después de todo, también los algoritmos son producto de la historia y cambian con el tiempo.

En el presente artículo se han planteado ciertas contribuciones para la enseñanza de la división en el primer ciclo. Se pueden resumir algunos de los puntos:

- abordar la construcción de los sentidos de la división a través de la resolución de problemas y la reflexión en torno a los mismos,
- instalar como objeto de estudio los problemas de la división aun cuando los niños no dispongan todavía de procedimientos expertos para resolverlos,
- presentar variedad de problemas, pues la división es un recurso que sirve para resolver diferentes tipos de situaciones,

- proponer luego de una instancia de resolución individual la comunicación y el debate sobre los resultados y los procedimientos incluyendo errores y procedimientos poco económicos,
- trabajar posteriormente a la resolución de problemas en forma colectiva, enfatizando las conclusiones a partir de lo realizado, para que dicho conocimiento empiece a tornarse disponible para nuevos problemas,
- favorecer la difusión de estrategias producidas por los niños para que sean posibles de ser apropiadas por todos,
- abordar la enseñanza de la división a lo largo de varios años,
- enseñar diferentes recursos de cálculo algorítmico y mental.

Los aspectos mencionados son apenas el inicio del estudio de la división cuyo aprendizaje se profundiza en años posteriores. En ellos los niños podrán continuar reorganizando progresivamente sus conocimientos, de tal modo que les permitan resolver una mayor variedad de situaciones, disponer de nuevos recursos, y estudiar sus propiedades.

Sin embargo, se ha subrayado la significación de generar, aun desde los primeros años, condiciones de trabajo que permitan a los niños construir conocimientos –necesariamente provisorios-, posibles de ser usados para resolver "verdaderos" problemas.

Bibliografía

Brissiaud, R., "La lecture des énoncés de problemes", en *INRP, Rencontres pédagogiques*, Nro 4, París, 1984.

Broitman, C., Itzcovich, H., Parra, C, y Sadovsky, P., *Documento de actualización curricular número 4*, EGB, Buenos Aires, Área de matemática, Secretaría de educación, GCBA, 1997.

Brousseau, G., *Problemas en la enseñanza de los decimales*, traducción de Dilma Fregona, UNC, 1994.

Brousseau, G., "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", tesis, Burdeos, 1986.

———, "Representaciones y didáctica del significado de la división", *Actas del coloquio de Sevres*, ficha mimeografiada,1987.

Brun, J., "La résolution de problemes aritmétiques: bilan et perspectives", en *Math ecole*, año 29, N° 141, 1990.

Cerquetti-Aberkane, *Enseñar matemática en los primeros ciclos*, Buenos Aires, Edicial, 1998.

Charnay, R., "Aprender por medio de la resolución de problemas", en Parra y Saiz (comps.), *Didáctica de las matemática*, Buenos Aires, Paidós, 1994.

———, "De l'analyse d'e erreurs en mathematiques aux dispositifs de remediation: quelques pistes", *Grand* n 48, traducción para el PTFD, MCYE, 1988.

Douady, R., "Rapport enseignement apprentissage: dialectique outil-objet,jeux de cadres", *Cahier de didactique des mathematiques* N° 3, Irem de Paris, traducción para el PTFD, Ministerio de Cultura y Educación, 1987.

Fayol, M., *L'enfant et le nombre*", París, Delachaux et Niestlé, 1990.

Ferreiro, E., "El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria", en *Proceso de alfabetización .La alfabetización en proceso*, Buenos Aires, Ceal, 1986.

Guillaume, J., "La memorización del repertorio aditivo en primer grado", Ficha traducida por Saiz, I., 1988.

INRP, *Apprentissages a la résolution des problemes au cours élémentaire*, Francia, Ermel, 1986.

Kamii, C., *El niño reinventa la aritmética*, España, Visor, 1986.

Lerner, D., *La matemática en la escuela*, Buenos Aires, Aique, 1992.

Lerner, D., Sadovsky, P., (c/col. Wolman, S.), "El sistema de numeración. Un problema didáctico», en Parra y Saiz (comps.), op. citada.

Maza Gómez, C., "Estructura de los problemas de suma y resta". En *Sumar y restar*, España, Visor, 1989.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*, 1995.

Panizza, M. y Sadovsky, P., *El papel del problema en la construcción de los conocimientos matemáticos*, Buenos Aires, Flacso, 1992.

Parra, C. y Saiz, I., "Multiplicación en segundo grado", Ficha mimeografiada, 1994.

Parra, C., "Cálculo mental en la escuela primaria", en Parra y Saiz, *Didáctica...*, op citada.

Parra, C., Sadovsky, P. y Saiz, I., *Matemática y su enseñanza*, Documento curricular, Ministerio de Cultura y Educación, 1994.

Parra, C., Broitman, C., Itzcovich, H., *Documentos de actualización curricular 1 y 2* EGB, Buenos Aires, área de matemática, Secretaría de Educación, MCBA, 1995.

Parra, C., Saiz, I, *Los niños, los maestros y los números*, Documento curricular de la MCBA, 1992.

Saiz, I., *Documentos de apoyo n° 4, 5 y 6*, Consejo General de Educación, provincia de Corrientes.

Saiz, I., "La dificultad de dividir o dividir con dificultad", en Parra y Saiz (comps.), *Didáctica...*, op citada.

Saiz, I., "Algunas consideraciones acerca de la suma", ficha mimeografiada, provincia de Corrientes, 1990.

Saiz, I., «Resolución de problemas», en *Fuentes para la transformación curricular*, Ministerio de Educación, 1994.

Schubauer-Leoni, M. I y Ntamakiliro, I., "La construction de réponses a des problemes impossibles" en *Revue des Sciences de L'education*, vol xx, nro 1, 1994.

SEP-OEA, *Problemas y operaciones de suma y resta*, México, D.G.E.E., 1988.

Vergnaud, G., *El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las matemáticas en la escuela*, México, Trillas, 1981.

Vergnaud, G., *Aprendizajes y didácticas: ¿qué hay de nuevo?*, Buenos Aires, Edicial, 1997.

Vergnaud, G. y Durand, C., "Estructuras aditivas y complejidad psicogenética" en Coll, C. (comp.), *Psicología genética y aprendizajes escolares*, México, Siglo XXI, 1983.

Vergnaud, G. y Ricco, G., "Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y métodos", en *Revista Argentina de Educación* n 6, AGCE.

Se terminó de imprimir
en el mes de marzo de 2010
en los Talleres Gráficos Nuevo Offset,
Viel 1444, Ciudad de Buenos Aires.
Tirada: 2000 ejemplares.

Para poder instalar en el aula una actividad constructiva, se requiere un tipo de intervención docente dirigida a proponer situaciones que involucren un desafío para los alumnos. Esto exige, en consecuencia, trabajar con diferentes estrategias y respuestas, con las dificultades y errores.

Este libro, referido a la enseñanza de las operaciones en el primer ciclo, se centra en la diversidad de problemas y estrategias de cálculo a ser abordadas en la escuela, como también en los procedimientos de resolución que los niños utilizan. La preocupación central es promover un trabajo en el aula que favorezca en todos los niños la adquisición de conocimientos cargados de significado y que dicha adquisición sea producida en un clima favorable para la producción y el intercambio alrededor de la actividad matemática.

Claudia Broitman es profesora de Enseñanza Primaria y Licenciada en Ciencias de la Educación (UBA). Actualmente es miembro del Equipo de Matemática de la Dirección de Curriculum de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires; coordinadora del Área de Matemática de la Red Latinoamericana de Alfabetización –Argentina-; docente del Seminario de Didáctica de la Matemática en el Programa de Actualización del Nivel Inicial de la UBA y asesora del Área Matemática en la Escuela para el Hombre Nuevo.

COLECCION RECURSOS DIDÁCTICOS

I.S.B.N. 987-9191-57-9

ISBN 987-9191-57-9

Ediciones
NOVEDADES EDUCATIVAS