TEMA: ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA FAVORECER EL DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE NÚMERO.

Baroody, Arthur J. (1997), "Técnicas para contar", "Desarrollo del número" y "Aritmética informal", en *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial,* Genís Sánchez Barberán (trad.), 3ª ed., Madrid, Visor (Aprendizaje, 42), pp. 87-106, 107-126 y 127-148.

Técnicas para contar

Contar oralmente, ¿implica aptitudes numéricas? ¿Qué técnicas de contar se suelen desarrollar durante los años preescolares? ¿Podemos suponer que los niños de educación especial adquirirán técnicas básicas para contar de una manera informal? ¿Qué técnicas suelen requerir instrucción durante los primeros cursos escolares?

A) EL DESARROLLO DE TÉCNICAS PARA CONTAR

Una jerarquía de técnicas

En su mayor parte, la capacidad de contar se desarrolla jerárquicamente (Klahr y Wallace, 1973). Con la práctica, las técnicas para contar se van haciendo más automáticas y su ejecución requiere menos atención. Cuando una técnica ya puede ejecutarse con eficiencia, puede procesarse simultáneamente o integrarse con otras técnicas en la memoria de trabajo (a corto plazo) para formar una técnica aún más compleja (por ejemplo, Schaeffer, Eggleston y Scott, 1974). Consideremos qué se necesita para realizar la tarea aparentemente sencilla de determinar si un conjunto de nueve puntos es "más" o "menos" que otro de ocho. Realizar esta comparación entre magnitudes numéricas requiere la integración de cuatro técnicas.

En primer lugar, la técnica más básica es generar sistemáticamente los nombres de los números en el orden adecuado. A los dos años de edad, Alexi ya había empezado a dominar *la serie numérica oral* y, a veces, podía contar hasta 10 de uno en uno. Sin embargo, cuando se le pedía que contara objetos, aún no podía decir los números en el orden correcto de forma coherente. Por ejemplo, a veces no empezaba a contar desde "uno". Hacia los tres años de edad, los niños suelen empezar a contar un conjunto a partir de "uno" y al empezar párvulos ya pueden usar la secuencia correcta para contar conjuntos de 10 elementos como mínimo (Fuson, Richards y Briars, 1982).

En segundo lugar, las palabras (etiquetas) de la secuencia numérica deben aplicarse una por una a cada objeto de un conjunto. La acción de contar objetos se denomina *enumeración.* Aunque Alexi podía generar la serie numérica hasta 10 correctamente, no podía enumerar un conjunto de nueve elementos, y ni siquiera de tres, porque todavía no había aprendido que debe aplicarse una, y sólo una, etiqueta a cada elemento de un conjunto. La enumeración es una técnica complicada porque el niño debe coordinar la verbalización de la serie numérica con el señalamiento de cada elemento de una colección para crear una correspondencia biunívoca entre las etiquetas y los objetos. Como los niños de cinco años pueden generar correctamente la serie numérica y señalar una vez cada uno de los elementos de una colección, pueden coordinar con eficacia las dos técnicas para ejecutar el acto complejo de la enumeración (al menos con conjuntos de hasta 10 elementos).

En tercer lugar, para hacer una comparación, un niño necesita una manera conveniente de representar los elementos que contiene cada conjunto. Esto se consigue mediante la *regla del valor cardinal:* la última etiqueta numérica expresada durante el proceso de enumeración representa el número total de elementos en el conjunto. En otras palabras, un niño de cinco años puede resumir la serie "1, 2, 3,..., 9", con "nueve" y la serie "1, 2, 3, ..., 8" con "ocho". Como Alexi no podía ni enumerar conjuntos, no había descubierto que la última etiqueta de este proceso tiene un significado especial. A sus dos años de edad, Alexi todavía no asociaba la serie numérica con la definición de la cantidad de un conjunto.

En cuarto lugar, las tres técnicas acabadas de describir son indispensables para comprender que la posición en la secuencia define la *magnitud.* A los dos años de edad, los números no definían tamaños relativos para Alexi. Sin embargo, los niños pequeños llegan a aprender, tarde o temprano, que la serie numérica se asocia a una magnitud relativa. Aun los niños muy pequeños pueden realizar comparaciones gruesas entre magnitudes como "10 es más grande que 1", quizá porque saben que el 10 viene mucho más tarde en la secuencia de enumeración. Hacia los cinco años, los niños pueden llegar a hacer con rapidez comparaciones precisas entre magnitudes de números seguidos como el 8 y el 9, porque están muy familiarizados con las relaciones de sucesión numérica ("cuando me pongo a contar, el 9 viene después del 8, así que el 9 es más grande").

Por tanto, contar para determinar que un conjunto de nueve puntos es más que un conjunto de ocho no es, cognoscitivamente hablando, un acto trivial. Aunque los adultos pueden dar por sentadas las cuatro técnicas implicadas, éstas constituyen un reto intelectual imponente para los niños de dos años de edad. Cuando lleguen a los cinco años, la mayoría de los niños habrán dominado estas técnicas básicas y estarán listos para enfrentarse a nuevos desafíos.

Algunos de ellos (sobre todo los que proceden de entornos con carencias, los que tienen lesiones cerebrales o los mentalmente atrasados) pueden no haber llegado a dominar estas técnicas básicas y necesitarán una atención especial. En lo que resta de capítulo se describirán con mayor detalle las cuatro técnicas básicas para contar y otras técnicas más elaboradas que se desarrollan durante las primeras etapas de la escolarización.

Contar oralmente

A una edad tan corta como los dieciocho meses, los niños empiezan a contar oralmente de uno en uno ("1, 2, 3..."). La mayoría de los niños de dos años pueden contar "1, 2" pero luego empiezan a omitir términos (Fuson *et al.*, 1982). Al principio, los niños pueden aprender partes de la serie numérica hasta 10 para unirlas más adelante. Por ejemplo, Alexi (hacia los veinte meses de edad) empezó a usar, de una manera regular, la serie "8, 9, 10". Más adelante añadió "2, 3, 4" para hacer "2, 3, 4, 8, 9, 10". Después añadió el 5 y el 6 y, finalmente, el 1 y el 7 para completar la serie hasta lo. A los veintiséis meses, Alexi añadió los números de dos cifras 19 y 20 y, muy poco después, insertaba la ristra "11, 12, 13" entre el 10 y el 19.

Contar oralmente suele equipararse con "contar de memoria". Como ilustra el caso de Alexi, contar de memoria es una buena descripción de las primeras técnicas orales que emplean los niños para contar. Su manera de contar era, simplemente, una cantinela verbal sin sentido. La serie numérica inicial de Alexi parecía no ser más que una cadena de asociaciones aprendidas de memoria y enlazadas gradualmente entre sí. Sin embargo, contar de memoria es una descripción menos adecuada de los posteriores intentos de contar. Con demasiada frecuencia, este término se emplea para indicar que los niños aprenden toda la serie numérica por memorización. Aunque la memorización desempeña un papel determinado, sobre todo durante las etapas iniciales, el aprendizaje regido por reglas tiene una importancia fundamental para ampliar esta serie. Aunque es probable que los términos hasta el 1 5 2 se aprendan de memoria, la mayor parte de la serie numérica posterior puede generarse mediante reglas (Ginsburg, 1982). Los restantes números hasta el 20 pueden generarse continuando con la secuencia original (6, 7, 8, 9) y anteponiendo "10 y.."; (por ejemplo, "dieciséis, diecisiete..."). Los números de la segunda decena (21, 22, 23, ..., 29) se pueden generar mediante la regla de anteponer "20" a cada una de las unidades (del 1 al 9) una por una. En realidad, para contar de uno en uno hasta 99 el niño sólo tiene que aprender esta regla y el orden de las decenas (10, 20, 30..., 90).

Los errores que cometen los niños al contar son una buena señal de que existen reglas que subyacen a su cuenta oral, sobre todo de 20 para arriba. Muchos niños (incluyendo los que presentan retraso mental) se inventan términos como "diecicinco" por 15, "diecidiez" por 20, o "veintidiez, veintionce", para 30 y 31 (Baroody y Ginsburg, 1984; Baroody y Snyder, 1983; Ginsburg, 1982b). Estos errores indican claramente que los niños no se limitan a imitar a los adultos, sino que tratan de construir sus propios sistemas de reglas (Baroody y Ginsburg, 1982). Se trata de errores razonables porque son ampliaciones lógicas, aunque incorrectas, de las pautas de la serie numérica que el niño ha abstraído. Así, aun los niños mentalmente atrasados parecen ser capaces de ver, emplear y, a veces, aplicar mal las pautas de la serie numérica.

Aunque la mayoría de los niños que se acaban de incorporar a la escuela ya hacen progresos con la parte de la serie numérica regida por reglas, muchos no se dan cuenta de que las decenas ("10, 20, 30, 90") siguen una pauta paralela a la secuencia de las unidades (Fuson *et al.,* 1982). Aún no se sabe con certeza cómo llegan los niños a resolver el "problema de las decenas", es decir, su orden correcto para contar hasta 100 de uno en uno. Una hipótesis es que los niños aprenden las decenas de memoria en forma de extremos finales de cada serie (por ejemplo, el niño forma la asociación entre "29-30" o "39-40"). Hay algunos datos que respaldan esta conjetura. Algunos niños no pueden contar por decenas pero pueden contar hasta 30 ó39 porque parecen haber aprendido que 30 va después de 29, pero no han aprendido qué va después de 39 (Baroody y Ginsburg, 1984). Otra hipótesis es que los niños aprenden las decenas (contar de diez en diez) de memoria y emplean este conocimiento para rellenar la secuencia de contar de uno en uno. Otra hipótesis, completamente distinta, es que los niños aprenden las decenas como una versión modificada de la secuencia del 1 al 9 y emplean esta pauta (repetir la secuencia de las unidades y añadir *-enta)* para rellenar la cuenta de uno en uno. Un ejemplo de esta última hipótesis es el caso de Ten, una niña levemente atrasada que cuando llegaba al final de una decena (por ejemplo, "..., 58, 59") se ponía a contar para sí para averiguar la siguiente decena (por ejemplo, "1, 2, 3, 4, 5, 6 ah, ..., sesenta") (Baroody y Ginsburg, 1984). Luego iba repitiendo este procedimiento hasta llegar a 100.

En realidad, la mayoría de los niños pueden aprender de memoria algunas decenas (hipótesis 1 y 2) y emplear reglas para generar el resto (hipótesis 3). Esto tiene sentido porque la mayoría de las decenas sigue una pauta y sería ineficaz aprenderlas todas de memoria. Sin embargo, se puede tener que aprender de memoria la primera parte, incluyendo quizá algunos casos regulares como 40, antes de descubrirse la pauta. Por tanto, aprender las decenas (contar de diez en diez) puede ser algo parecido a aprender a contar de uno en uno: al principio, los niños adquieren una parte por memorización y luego emplean una pauta para ampliar la secuencia.

Elaboraciones de la serie numérica. Con la experiencia, los niños aprenden a usar su representación mental de la serie numérica con más elaboración y flexibilidad (Fuson *et al.*, 1982). A medida que se van familiarizando más y más con la serie numérica correcta, los niños pueden citar automáticamente el número siguiente a un número dado. A los veintiséis meses, Alison ya podía hacerlo *si* se le "daba el pie".

MADRE: Alison, ¿qué número va después del 9?
ALISON: [No responde.]
MADRE: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y...
ALISON: 10.

De no ser así, Alison no lo podía hacer o sólo lo hacía a veces.
MADRE: ¿Qué número va después del ocho?
ALISON: El ocho.
MADRE: ¿Y después del dos?
ALISON: El nueve.
MADRE: ¿Y después del seis?
ALISON: [No responde.]
MADRE: (Un poco más tarde): ¿Qué va después del ocho?
ALISON: Nueve, diez.
MADRE: ¿Y después del dos?
ALISON: El cuatro.

Hacia los cuatro o cinco años de edad, los niños ya no necesitan empezar desde el 1 para responder de manera coherente y automática preguntas relativas a números seguidos, al menos hasta cerca del 28 (Fuson *et al.*, 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Uno de los desarrollos que pueden producirse un poco más tarde es la capacidad de citar el número anterior. Cuando los niños captan las relaciones entre un número dado y el anterior, ya está preparado el terreno para contar regresivamente. Además, los niños de edad escolar aprenden gradualmente a contar por grupos. Entre las más precoces de estas nuevas pautas se encuentran contar por parejas, de cinco en cinco y de diez en diez.

Numeración

Enumeración. Los niños deben aprender que contar objetos implica algo más que agitar un dedo señalando un conjunto o deslizarlo por encima de otro mientras pronuncian con rapidez la serie numérica. Aunque los niños pequeños aprenden con rapidez al menos la parte memorística de la serie numérica (véase, por ejemplo, Fuson y Hall, 1983) y no tienen problemas para señalar los objetos de uno en uno (Beckwith y Restle, 1966), coordinar estas dos técnicas para enumerar un conjunto no es una tarea fácil. En realidad, la enumeración (sobre todo de conjuntos con más de cuatro elementos) sólo llega a hacerse automática de una manera gradual (Beckwith y Reside, 1966; Gelman y Gallistel, 1978, y Schaeffer *et al.*, 1974). Con colecciones grandes y, sobre todo, desordenadas, los niños tienen que aprender estrategias para llevar la cuenta de los elementos que han contado y los que no. Cuando los elementos se ponen en fila, hace falta poco esfuerzo para no perder la cuenta si se empieza desde uno de los extremos. Si la colección está colocada en círculo, el niño sólo necesita recordar el elemento por el que ha empezado a contar. Con distribuciones desordenadas, el niño debe recordar qué elementos ha etiquetado y cuáles quedan por etiquetar. Esto se ve facilitado por el empleo de un método sistemático (por ejemplo, contar de izquierda a derecha y de arriba abajo) o separando los elementos etiquetados de los no etiquetados. Fuson (en prensa) encontró que muchos de sus sujetos de párvulos no empleaban la estrategia de crear un montón aparte con los elementos ya contados.

Regla del valor cardinal. Al principio, los niños pueden no darse cuenta de que la enumeración sirve para numerar. Cuando se les pide que cuenten un conjunto, los niños se limitan a enumerarlo y esperan que esto, en sí mismo, satisfará al adulto (cosa que ocurre a veces). Si se les pregunta cuántos objetos acaban de contar, vuelven a enumerar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, ida, una niña de tres años de edad, enumeró cuatro estrellas (“1, 2, 3, 4”) sin hacer ningún intento serio de emplear o recordar la información. Cuando se le preguntó cuántas estrellas había acabado de contar, alzó los hombros y volvió a enumerarlas otra vez. Como la enumeración se contempla como un fin en sí misma y no como un medio para llegar a un fin, los niños muy pequeños pueden no llegar a comprender el sentido de preguntas como “¿Cuántos hay?”. Ni preocuparse de recordar los resultados de lo que han contado.

Cuando tienen cerca de dos años, muchos niños desarrollan una conciencia primitiva de que contar es un procedimiento empleado para asignar números a colecciones (para responder a preguntas del tipo “¿Cuántos hay?”). Ahora ya realizan el intento de recordar lo que han contado. Sin embargo, como no se dan cuenta de que el proceso de enumeración se puede resumir, responden a este tipo de preguntas repitiendo la serie numérica. Después de “soltar” varios términos (“7, 8, 9”) o de repetir el mismo (“9, 9, 9”) ante un conjunto de tres objetos, un niño de dos años puede designar este conjunto volviendo a contar (por ejemplo, “7, 8, 9” o “9, 9, 9”) (Wagner y Walters, 1982). Aun después de haber aprendido a enumerar correctamente, los niños pueden no darse cuenta de que es innecesario recitar otra vez toda la secuencia cuando se les pregunta por una cantidad. Por ejemplo, después de enumerar cuatro estrellas que había en una tarjeta, George (sin volver a mirar la tarjeta) respondió a la pregunta ¿”Cuántas estrellas hay”? con: “Pues hay 1, 2, 3 y 4 estrellas”. Sin embargo, a una edad tan corta como los dos años y medio de edad, algunos niños descubren el “atajo” consistente en recitar la última etiqueta del proceso de enumeración para indicar la cantidad. En el fondo, la regla del valor cardinal traduce el término aplicado a un elemento determinado de un conjunto (el último) al término cardinal que representa el conjunto entero.

Regla de la cuenta cardinal. La regla inversa a la del valor cardinal es la regla de la cuenta cardinal. Esta regla especifica que un término cardinal como “5” es la etiqueta asignada al último elemento cuando se enumera un conjunto de cinco objetos (Fuson y Hall, 1983). Parece que los niños tienen que aprender que un término como *cinco* es al mismo tiempo el nombre de un conjunto (número cardinal) y un número para contar. Consideremos el caso de un niño al que se da un conjunto de cinco canicas junto con la consigna: “Aquí hay cinco canicas; pon cinco canicas en la taza.” El niño que no aprecia la regla de la cuenta cardinal tiene que ponerse a contar las canicas a medida que las va soltando en la taza. Este niño no puede prever que la etiqueta cinco empleada para designar el conjunto es la misma que se debe aplicar al resultado de contar el conjunto. En cambio, el niño que da por sentada la regla de la cuenta cardinal se limita a colocar todo el conjunto en la taza sin contar.

Separación. Contar (separar) un número concreto de objetos es una técnica que empleamos a diario (por ejemplo, «Dame tres lápices», “Me quedare con cuatro camisas”, “Toma cinco clavos”). Sin embargo, no se trata de una tarea cognoscitiva sencilla porque implica: a) observar y recordar el número de elementos solicitado (el objetivo); b) etiquetar cada elemento separado con una etiqueta numérica, y c) controlar y detener el proceso de separación. En otras palabras, se requiere almacenar el objetivo en la memoria de trabajo, un proceso de enumeración y, al mismo tiempo, ir comparando los números del proceso de enumeración con el número almacenado y detener este proceso cuando se llegan a igualar (Resnick y Ford, 1981). La regla de la cuenta cardinal ofrece al niño una razón para tomar nota del objetivo en la memoria de trabajo y constituye la base para detener el proceso de enumeración (Baroody y Mason, 1984). Por ejemplo, si se pide a un niño que separe tres lápices tiene que darse cuenta de que para realizar la tarea es importante recordar “tres” y que debe parar de contar lápices cuando llegue a la etiqueta “tres”.

Comparación de magnitudes

Cuando tienen unos tres años de edad, los niños descubren que los términos para contar más altos se asocian a magnitudes superiores (Wagner y Walters, 1982). Así se dan cuenta de que “dos” no sólo sigue a “uno” sino que también representa una cantidad mayor. Hacia los 3 años y medio, los niños suelen apreciar que “tres” es mayor que “dos” (Shaeffer *et al.*, 1974). Partiendo de estos datos, los niños de cerca de cuatro años de edad parecen descubrir una regla general: el término numérico que viene después en la secuencia significa “más” que el término de un número anterior. Aun antes de entrar en la escuela, los niños parecen usar su representación mental de la serie numérica para hacer comparaciones toscas, pero eficaces, entre magnitudes, es decir, para comparar con rapidez y exactitud dos números bastante separados entre sí dentro de la secuencia (por ejemplo, el 3 y el 9, o el 2 y el 8) (Resnick, 1983). A medida que la relación “el siguiente de” se va haciendo automática, los niños pueden llegar a ser capaces de hacer comparaciones entre magnitudes más próximas (entre números seguidos). En realidad, cuando la mayoría de los niños empiezan a asistir al parvulario ya pueden realizar con bastante precisión comparaciones entre números adyacentes hasta el 5 e incluso hasta el 10.

B) IMPLICACIONES EDUCATIVAS: DIFICULTADES PARA CONTAR Y SOLUCIONES

Contar oralmente

Serie numérica. La mayoría de los niños, incluyendo los que pertenecen a minorías y a clases sociales desfavorecidas, reciben una exposición intensa a la primera parte (la memorística) de la serie numérica por parte de familiares, amigos, personal de guardería, la televisión, etc., antes de llegar a la escuela. Si un niño que acaba de incorporarse al jardín de infancia manifiesta incapacidad para generar la secuencia memorística hasta un mínimo de 10, puede dar señal de un problema grave y de la necesidad de una intervención de apoyo inmediata e intensiva (Baroody y Ginsburg, 1982b). Aunque se dan grandes diferencias individuales, el dominio de la parte memorística de la serie numérica no debería darse por sentado en niños atrasados del ciclo medio (Baroody y Ginsburg, 1984). La mayoría de los niños de cuatro y medio a seis años de edad pueden llegar a contar hasta 29 ó 39. Sin embargo, y dado que todavía no han resuelto el problema de las decenas, muchos de ellos son incapaces de ampliar la parte regida por reglas más allá de estas cifras. Muchos niños pequeños con retraso mental necesitarán ayuda para llegar a dominar incluso la primera parte de la secuencia regida por reglas (del 16 al 19 y del 20 al 29).

A partir del 15, aproximadamente, la enseñanza de la serie numérica no debería insistir en la memorización. En cambio, se debería animar a los niños a buscar y discutir las pautas subyacentes a la serie numérica. En algunos casos, el maestro puede tener que dar "pistas" o ayudar a que las pautas se hagan explícitas (véase el ejemplo 6.1). Además, es positivo que los niños cometan errores al aplicar reglas como sustituir 30 por "veintidiez". Se trata de una señal prometedora porque indica el reconocimiento de una pauta numérica y constituye un intento activo, por parte del niño, de tratar con lo desconocido en función de las reglas o de la comprensión que ya tiene. Cuando un niño comete un error al aplicar una regla, el maestro puede aprovechar el conocimiento que ya tiene diciéndole, por ejemplo: "*Otro nombre* para veintidiez es 30". Se trata de una manera constructiva de corregir al niño porque el maestro aprecia su capacidad para pensar sin dejar de ofrecerle el *feedback* necesario para su desarrollo posterior.

Ejemplo 6.1. Empleo de pautas para enseñar las decenas

Aun los niños algo retrasados pueden beneficiarse de la instrucción que explota las pautas subyacentes a la serie numérica. Tomemos el caso de Mike, un hombre de veinte años de edad con un CI de 40. Mike trataba de aprender cómo decir la hora ajustándola a los cinco minutos más próximos, pero como no conocía las decenas superiores a 30, no podía pasar de 35. Después de 35 se limitaba a repetir expresiones usadas previamente (por ejemplo, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, *30a).* Para establecer una conexión entre la secuencia de las unidades y las decenas, la educadora de Mike escribió los números del 1 al 6 en una tarjeta. Debajo de cada cifra escribió la decena correspondiente y le explicó que podía usar los primeros números que empleaba para contar para averiguar las decenas. "¿Ves? El 1 es como el 10, el 2 como el 20**,** el 3 como el 30, el 4 como el 40, el 5 como el 50 y el 6 como el 60". Mike usó la lista numérica de esta tarjeta para contar de cinco en cinco y al ver que con ella podía expresar todas las horas del reloj se puso tan contento que pidió más copias de la tarjeta para usarlas en clase y en casa. Los siguientes pasos se encaminaron a hacer que Mike determinara la siguiente decena usando *mentalmente* la secuencia para contar y a que practicara contando de diez en diez y de cinco en cinco hasta que estas técnicas se hicieran automáticas. Al final, Mike decía enseguida la hora sin necesitar la tarjeta.
La educación de Mike y la recopilación del caso se deben a Cathy A. Mason.

Los obstáculos más frecuentes para los niños, sea cual sea su capacidad mental, son los nombres irregulares de los números 14 y 15 y de las decenas (por ejemplo, Baroody y Snyder, 1983, y Fuson *et al.,* 1982). Como 14 y 15 son una excepción a la pauta de elaboración, es frecuente que sean los últimos números que se aprenden hasta 19. Algunos niños simplemente se los saltan **("**..., 13, 16, ...") o los cambian por otro **("...,** 13, 16, 16, 16, ..."). Un diagnóstico expeditivo, el empleo de modelos y la práctica pueden establecer la secuencia adecuada como un hábito antes de que se instaure una secuencia incompleta o incorrecta.

Elaboraciones de la serie numérica. Cuando están en párvulos, los niños no deberían tener problemas para citar el número siguiente a otro, y ni siquiera el anterior, al menos hasta ello (Fuson *et al.*, 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Los niños de bajo rendimiento y con retraso mental puede que no sean capaces de citar el número siguiente y quizá deban empezar a contar desde el 1 o hacer conjeturas. Es probable que citar el número anterior sea relativamente difícil porque los niños deben operar sobre la serie numérica en dirección opuesta a la seguida durante su aprendizaje. Además, puede que el concepto de *anterior* sea más difícil de comprender que el de *siguiente.* Por tanto, al principio lo mejor sería concentrar la enseñanza de apoyo en el número siguiente. Esta enseñanza debería empezar con la parte más familiar de la secuencia numérica (del 1 al 4 o al 5). Además, si el niño puede leer las cifras se puede empezar con actividades en las que intervenga una representación concreta de la serie numérica (una lista numérica). Una vez el niño ha comprendido la cuestión relativa al número siguiente (anterior) y puede dar respuestas con facilidad mediante el empleo de una lista numérica, puede pasar a actividades sin lista numérica que le exijan determinar mentalmente la respuesta.

Contar regresivamente desde 10 depende del conocimiento de las relaciones existentes entre un número y su anterior, y es una técnica oral relativamente difícil. Con todo, suele ser dominada por los niños cuando llegan a primer curso (Fuson *et al.,* 1982; Ginsburg y Baroody, 1983). Contar regresivamente desde 20 es una técnica especialmente difícil y no suele dominarse hasta poco antes de tercer curso. Los maestros de educación especial deben esperar muchas dificultades con las dos técnicas. La enseñanza de apoyo puede empezar haciendo que el niño lea una lista numérica hacia atrás (de derecha a izquierda). Con los niños que dominan o han dominado el número siguiente, se puede tapar la lista numérica dejando a la vista el número de partida. Entonces, a medida que el niño va contando hacia atrás, se pueden ir destapando sucesivamente los números menores. Este procedimiento confirma las respuestas correctas y ofrece un *feedback* corrector para las respuestas incorrectas.

Para contar a intervalos de cinco como mínimo, puede animarse a los niños a que empleen la secuencia familiar de contar de uno en uno, pero susurrando los números intermedios y destacando los que forman la pauta. Por ejemplo, para aprender a contar de dos en dos, puede decirse al niño que cuenta así: “uno [en voz baja], dos [en voz alta], tres [en voz baja], cuatro [en voz alta]...”. Si hace falta, puede empezarse con una lista numérica para aligerar el esfuerzo de expresar el término correcto y permitir que el niño se concentre en la pauta. En el ejemplo 6.2 se muestra otro método para contar a intervalos a partir de la secuencia familiar para contar de uno en uno.

Ejemplo 6.2. Enseñanza de contar a intervalos

Se puede hacer que contar a intervalos tenga significado para los niños relacionándolo con el procedimiento familiar de contar objetos reales de uno en uno. Josh, un adolescente con retraso moderado, estaba aprendiendo a contar de cinco en cinco. Su educadora le había dicho que colocara unos discos de plástico de color que le gustaban mucho en pilas de a cinco y después le ayudo a contarlos de cinco en cinco. Luego, hizo que Josh los desparramara y los contara de uno en uno. Josh se quedó muy sorprendido al ver que obtenía el mismo resultado. Luego comprobó la validez general de este descubrimiento con distintos números de pilas. En la sesión siguiente, Josh insistía en repetir el experimento por su cuenta.

Durante la tercera sesión, Josh pidió tarjetas con números (5, 10, 15, 20, 25, etc.) y las emparejó con sus pilas. A continuación añadió una nueva etapa a su proceso de comprobación: leer los números de las tarjetas a medida que iba contando los discos de uno en uno. Comprobó el resultado de contar la primera pila de uno en uno con el número de la primera tarjeta y encontró que, en ambos casos, el resultado era “5”. Al continuar contando de uno en uno la segunda pila, encontró que el resultado coincidía con el número de la segunda tarjeta (10), y así sucesivamente. Mientras Josh iba contando de uno en uno, la educadora recalcaba el número final de cada grupo (5, 10, 15, etc.) diciéndolo en voz alta con él. Luego, Josh se inventó un juego de adivinar en el que se tapaba los ojos, la educadora tomaba una tarjeta (por ejemplo, la del 15) y Josh tenía que adivinar de qué número se trataba. Hacia la cuarta sesión ya podía contar hasta 30 de cinco en cinco y sin ayuda. El uso de objetos reales y la secuencia para contar de uno en uno hicieron que contar a intervalos fuera, para Josh, algo comprensible e interesante.

Numeración

Enumeración. Cuando los niños llegan al jardín de infancia suelen ser bastante competentes para contar conjuntos de uno a cinco objetos, y la mayoría de los niños de cinco años enumera con exactitud hasta 20 objetos (Fuson, en prensa). Por tanto, si un niño que empieza el curso de párvulos presenta dificultades con conjuntos de uno a cinco elementos, es que necesita de inmediato una atención individual. El niño que no haga ningún intento de etiquetar cada objeto de un conjunto, por pequeño que éste sea, con una palabra para contar (soltando al azar palabras para contar mientras desliza el dedo por encima de los objetos) ni de llevar la cuenta de los objetos contados y sin contar (etiquetando los objetos del conjunto de una manera totalmente asistemática) presenta graves problemas (Baroody y Ginsburg, 1982b).

Como la enumeración requiere la coordinación de dos subtécnicas, los errores pueden deberse a tres causas: a) generar una serie numérica incorrecta *(errores de secuencia);* b) llevar un control inexacto de los elementos contados y no contados *(errores de partición),* y c) no coordinar la elaboración de la serie numérica y el proceso de control de los elementos contados y no contados *(errores de coordinación)* (Gelman y Gallistel, 1978). En la figura 6.1 se muestran algunos ejemplos de cada tipo de error. En ocasiones, los niños pueden tener un desliz al generar una serie numérica, pero si los errores de secuencia son sistemáticos (por ejemplo, etiquetar sistemáticamente conjuntos de 13 y 14 elementos con “13”) es señal de que hace falta una enseñanza de apoyo orientada a reforzar la técnica necesaria para contar oralmente. El niño que comete con regularidad errores de partición como pasar algún elemento por alto o contarlo más de una vez, debe aprender estrategias de control más eficaces.

En la figura 6.1 se puede observar que hay tipos de errores muy distintos que pueden producir las mismas respuestas. Por ejemplo, el doble etiquetado (señalar un objeto una vez y asignarle dos etiquetas), al igual que contar un mismo objeto más de una vez, aumenta en una unidad el número de elementos de un conjunto. Sin embargo, el doble etiquetado es un error de coordinación y no de partición. En realidad, se pueden combinar varios errores para producir una respuesta correcta. Como las respuestas incorrectas pueden producirse de varias maneras y como, matemáticamente, dos errores no equivalen a un acierto, es importante que los maestros observen la actividad de enumeración de los alumnos que tengan alguna dificultad.

Si un niño tiene problemas para ejecutar con eficacia alguna de estas subtécnicas, es probable que se den errores de coordinación. Por ejemplo, un niño que tiene que detenerse y pensar qué viene después del 3 cuando cuenta un conjunto de cinco elementos, puede olvidar por dónde iba: «1 [señala el primer elemento], 2 [señala el segundo], 3 [señala el tercero], a ver, a ver, 4 [señala el quinto elemento]». Igualmente, si un niño tiene que dedicar mucha atención para no perderse, puede equivocarse (por ejemplo, saltarse un número). Fuson y Mierkiewicz (1980) encontraron que los niños pequeños tendían a cometer errores de coordinación a medio contar.

Los errores de coordinación también pueden darse al principio o al final del proceso de enumeración (Gelman y Gallistel, 1978). Algunos niños tienen dificultades para empezar las dos subtécnicas al mismo tiempo. En consecuencia, señalan el primer elemento, pero no lo etiquetan o empiezan a etiquetar demasiado pronto (por ejemplo, dicen “1” sin señalar el primer elemento, que a continuación recibe la etiqueta “2”). A veces, los niños tienen dificultades para acabar con las dos técnicas coordinadas y señalan, pero no etiquetan, el último elemento o continúan etiquetando después de haber señalado el último elemento. Los niños mentalmente retrasados parecen ser propensos a cometer errores de coordinación (Baroody y Ginsburg, 1984).

El “frenesí” y “pasar de largo” son dos graves errores de enumeración. En el primero, el niño empieza con una correspondencia biunívoca, pero no la mantiene hasta el final, y en el segundo no intenta establecer la correspondencia al empezar o acabar el proceso de enumeración (Fuson y Hall, 1983). El frenesí puede darse como resultado de no controlar los elementos etiquetados y no etiquetados (error de partición), no coordinar la cuenta oral y la acción de señalar (error de coordinación), o ambos a la vez (véase la fig. 6.1). Pasar por alto comporta no hacer ningún intento de controlar o coordinar la serie numérica con la acción de señalar cada elemento.

Con los niños que “pasan por alto” algún elemento, la enseñanza de la enumeración debe destacar: a) contar despacio y con atención; b) aplicar una etiqueta a cada elemento; c) señalar cada elemento una vez y sólo una, y d) contar organizadamente para ahorrar esfuerzo en el control. Con elementos fijos, el control de los objetos contados y los que quedan por contar se puede facilitar con estrategias de aprendizaje como empezar por un lugar bien definido y continuar sistemáticamente en una dirección (por ejemplo, de izquierda a derecha). Una estrategia adecuada para contar elementos móviles es separar claramente los elementos contados de los que quedan por contar.

Regla del valor cardinal. Cuando llegan a párvulos, los niños aplican rutinariamente la regla del valor cardinal a conjuntos aún mayores (Fuson, Pergament, Lyons y Hall, 1985). Si un niño de esta edad no lo puede hacer es señal de que tiene graves problemas. Aunque muchos niños mentalmente retrasados pueden aprender espontáneamente la regla del valor cardinal, otros necesitan una enseñanza explícita. Si un niño simplemente adivina el valor cardinal de un conjunto que acaba de contar o vuelve a enumerar el conjunto, se le puede explicar la regla del valor cardinal de la manera siguiente: “Cuando cuentes, recuerda el último número que dices porque así sabrás cuántas cosas has contado.” Si un niño repite toda la serie numérica empleada en el proceso de enumeración, se le puede decir que existe un atajo: “Deja que te enseñe una manera más fácil. Después de contar, me vuelves a decir el último número que hayas dicho y así sabré cuántas cosas has contado.” A veces es útil que el maestro demuestre el proceso mientras “piensa en voz alta”: “¿Cuántos dedos tengo levantados? Voy a contarlos, a ver. Uno, dos, tres, *cuatro.* Vaya, el último número que he dicho es cuatro, así que tengo *cuatro* dedos levantados.”

Regla de la cuenta cardinal. Los niños que empiezan la escuela suelen dar por sentada esta noción más avanzada del valor cardinal; muchos niños de educación especial no lo hacen así (Baroody y Mason, 1984). Esta regla puede enseñarse mediante un procedimiento de dos etapas concebido por Secada, Fuson y Hall (1983) (véase la fig. 6.2). La primera etapa consiste en presentar un conjunto al niño e indicar (verbalmente y mediante un número escrito) la designación cardinal del conjunto. El maestro pide al niño que cuente el conjunto y observe que el resultado de contarlo coincide con la designación cardinal. Para la segunda etapa, el maestro presenta otro conjunto. Se le vuelve a dar al niño la designación cardinal y se le pide que cuente los elementos del conjunto. Sin embargo, antes de que acabe de contar, el maestro le pide al niño que prediga el resultado.

Separación. Los niños suelen llegar a párvulos pudiendo separar con precisión al menos conjuntos de pequeño tamaño. Si un niño es incapaz de separar hasta cinco objetos cuando se le pide, es que necesita una enseñanza de apoyo intensiva. Muchos niños con deficiencias mentales tienen dificultades con esta tarea (Baroody y Ginsburg, 1984; Baroody y Snyder, 1983; Spradlin, Cotter, Stevens y Friedman, 1974) y necesitan una enseñanza especial.

Uno de los errores más comunes cuando se retiran objetos de un conjunto es “no pararse”, es decir, no detener el proceso de contra cuando se ha llegado al objetivo. A Matt, un niño deficiente mental, se le enseñaron ocho lápices y se le pidió: “Toma cinco para dárselos al maestro; recuerda, saca sólo cinco.” Sin embargo, se limitó a contar los ocho lápices. Cabe atribuir este tipo de errores a un fallo de memoria (por ejemplo, véase Resnick y Ford, 1981). Según una de las hipótesis que atribuyen el error a un fallo de memoria, los niños no mantienen el objetivo en la memoria de trabajo, es decir, no toman nota de la cantidad solicitada. Otra propuesta es que, al estar tan ocupados con el proceso de contar, se olvidan del objetivo. Por ejemplo, cuando se le preguntó a Matt cuántos lápices debía tomar, respondió: “No sé”. Como no recordaba el objetivo o no lo tenía en su memoria de trabajo, Matt se limitó a contar todos los lápices que tenía delante.

Al igual que muchos otros niños (véase Flavell, 1970), es posible que Matt supiera que hace falta un esfuerzo especial para memorizar información, es decir, que a veces necesitamos ensayar o repetir una información para facilitar el recuerdo. Para este niño, la enseñanza de apoyo debe recalcar la importancia de recordar el objetivo de la tarea y, de ser necesario, debe también enseñarle cómo recordarlo. Se debe estimular al niño a ensayar (repetir) el objetivo para que quede grabado firmemente en su memoria de trabajo antes de contar los objetos. Si hace falta, se le puede instar a que anote el número antes de empezar a contar.

Los niños que tienen la edad de empezar a andar (Wagner y Walters, 1982) y algunos niños deficientes mentales (Baroody y Ginsburg, 1984) tienen problemas con esta tarea aun cuando parecen recordar el objetivo. Por ejemplo, cuando se pidió a un niño, Fred, que quitara tres objetos de un montón de cinco, se limitó a contarlos todos: “1, 3, 4, 6, 11 [y después, volviendo a señalar el último elemento] 3”, pareciendo que había recordado el objetivo. Este niño deficiente había vuelto a etiquetar el último elemento con la palabra “tres”. Cuando se le pidió que retirara cinco elementos de un total de nueve volvió a cometer el error de no detenerse, pero acabó la cuenta con la etiqueta correcta: “1, 2,3, 4, 5, 6, 8, 9, 5.” Aunque no se detuvo cuando se encontró por primera vez con la etiqueta buscada, Fred parecía recordarla e hizo que el último elemento tuviera la etiqueta apropiada.

Este error de "finalizar con el objetivo" puede explicarse mediante otra hipótesis referida a la memoria. Aunque algunos niños guardan el objetivo y lo pueden recordar más tarde, el proceso de contar objetos absorbe tanto su atención que no pueden comparar la serie numérica del proceso de separación con el objetivo. Como la memoria de trabajo de Fred estaba tan copada por el proceso de separación quizá no fue capaz de atender simultáneamente a los procesos de contar y de comparar. Una vez liberada su atención del proceso de contar, Fred pudo recordar el objetivo y enmendar su conducta.

Cuando un niño no tiene problemas para recordar el objetivo, la enseñanza de apoyo debe centrarse en el proceso de comparación. Primero, se debe hacer que el niño anote el objetivo. A continuación, sacamos nosotros el primer elemento (o dejamos que lo haga el niño). Luego le preguntamos (señalando el número anotado si es necesario): "¿Es la cantidad correcta? ¿Hay que pararse aquí?" Continuamos así hasta llegar a la cantidad solicitada. Debemos explicar claramente por qué se ha detenido el proceso de contar: "Nos hemos parado en N (decir el número deseado) porque N (señalar el objetivo) es la cantidad que necesitamos." Sobre todo al principio, se debe ayudar al niño a encontrar la manera más fácil posible de ejecutar el proceso de contar. Por ejemplo, se puede simplificar el proceso de controlar los elementos que se han contado y los que no, apartando los primeros es un montón claramente separado.

Hay otra explicación para este tipo de errores y es que los niños muy pequeños y algunos escolares con deficiencias mentales no poseen la base conceptual para comprender la tarea. Quizá los niños que no comprenden la noción de la cuenta cardinal no se dan cuenta de que deben comparar lo que cuentan con el objetivo. Así pues, cuando un maestro desea subsanar las dificultades que tiene un niño con la separación, primero deberá comprobar que posea la técnica necesaria para la cuenta cardinal (Baroody y Mason, 1984).

Comparación entre magnitudes

Cuando llegan al curso de párvulos, casi todos los niños pueden realizar comparaciones entre números separados y entre números seguidos pequeños (del 1 al 5), y la gran mayoría ya habrá llegado a dominar estas últimas con los números del 1 al l0. Los niños de educación especial durante la primera enseñanza y muchos niños deficientes de nivel intermedio pueden llegar a tener problemas con las comparaciones entre números separados y entre números seguidos pequeños. La educación de apoyo deberá empezar con objetos concretos y números familiares que sean manifiestamente diferentes en cuanto a magnitud (comparar 1, 2 ó 3 con números mayores como 9 ó 10; comparar números seguidos como 1 y 2, o 2 y 3).

Pueden conseguirse varios juegos en los que intervienen modelos concretos (véase el ejemplo 6.3). En el juego *Invasores de la luna*, por ejemplo, los jugadores comparan la longitud o la altura de dos conjuntos de cubos que encajan entre sí. De esta manera, la comparación de números se conecta con indicios perceptivos claros y queda reforzada por ellos: "Tú tienes ocho naves espaciales en la luna y yo tengo dos. Mira qué *larga* es la fila de naves que tienes. Ocho naves es *más* que dos." Gradualmente, el niño irá aprendiendo la idea de que los números se asocian con la magnitud y que los números que vienen después en la serie numérica son *mayores*. Una vez hayan arraigado estas ideas básicas, el niño deberá ser apartado de actividades con objetos concretos y se le pedirá que resuelva los problemas mentalmente.

Ejemplo 6.3. Juegos de comparación entre números concretos

INVASORES DE LA LUNA

Objetivo:
Comparaciones entre números del 1 al l0 separados o seguidos.

Material:
1. Varias lunas (círculos de papel) de distinto color.
2. Dos conjuntos de cubos encajables de distinto color.
3. Una peonza con los números del 1 al 10 (para comparaciones entre números separados) o un conjunto de tarjetas en las que se listen comparaciones específicas para cada objetivo.

Instrucciones:
Esparcir los círculos por la mesa. Dar un conjunto de cubos a cada uno de los dos jugadores. Explicar que los círculos son lunas y que los cubos son naves espaciales. El jugador que haga «alunizar» más naves en una luna se queda con ella y el que conquiste más lunas gana la partida. Usar la peonza o las tarjetas para determinar la cantidad de naves que puede hacer alunizar cada jugador. Preguntar a uno de los niños qué jugador ha hecho alunizar más, por ejemplo: "Tú tienes cinco naves y Billy tiene tres. ¿Cuánto es más, cinco o tres?" De ser necesario, señalar las distintas longitudes (o alturas) de los dos conjuntos de cubos encajables.

DOMINO MÁS (MENOS) UNO

Objetivo:
Comparar números seguidos (más o menos uno) del 1 al 10.

Material:
Fichas de dominó.

Instrucciones:
Este juego, basado en uno propuesto en el currículo de Wynroth (1969-1980), se juega como el dominó normal pero con una excepción. En vez de emparejar conjuntos numéricamente equivalentes para ir añadiendo fichas, las fichas que se añaden deben tener un conjunto de puntos mayor (o menor) en una unidad al conjunto de la ficha del extremo de la hilera. La figura que sigue ilustra un caso de "Dominó menos uno". Un jugador va a añadir una ficha con "8" al extremo que tiene "9".

Con los niños de educación especial puede ser muy útil indicar la estrategia para contar que puede usarse para comparar números seguidos y cómo se relaciona esta estrategia con las técnicas básicas para saber el número "que viene después". Explicar, por ejemplo: "Para saber qué número es mayor, contemos a ver qué número viene después. Para los números 3 y 4 contamos "1, 2, 3" y como después del 3 viene el 4, el 4 es mayor". También puede ser útil demostrar el procedimiento para el niño y emplear una lista numérica o bloques encajables para contar. Llegado el momento, el procedimiento de contar se puede interrumpir para preguntar al niño: "¿Qué es más, 4 6 3? ¿Qué número viene *después* cuando contamos?". Otra manera de hacer explícita la conexión entre la comparación y la técnica del número "que viene después" es continuar las preguntas sobre el número “que viene después” con preguntas del tipo “cuál es mayor”. Por ejemplo, se puede preguntar: “¿Qué viene justo después del 3 cuando contamos? Decimos 3, ¿y luego...?” Una vez haya respondido el niño, preguntarle: “¿Y cuál es más, 3 ó 4?”. (Nótese que para forzar al niño a pensar realmente en la comparación, el número mayor se menciona en primer lugar o “sin seguir el orden usual” la mitad de las veces, aproximadamente).

C) IMPLICACIONES EDUCATIVAS: LA ENSEÑANZA DE TÉCNICAS PARA CONTAR

A continuación se resumen algunas directrices generales para la enseñanza.

1.*Los niños deben dominar cada técnica para contar hasta que llegue a ser automática.* Esto es esencial porque las técnicas para contar se basan la una en la otra y sirven de base para técnicas más complejas como hacer sumas o devolver cambios. Si las técnicas básicas no son eficaces, no pueden integrarse bien con otras técnicas para la ejecución de funciones más complejas.

2.*La enseñanza de apoyo debe basarse en experiencias concretas.* Para que la enseñanza de una técnica básica para contar sea significativa, deberá basarse en actividades concretas. Además, y sobre todo con poblaciones de educación especial, puede ser importante enlazar explícitamente actividades concretas con la técnica que se enseña.

3.La enseñanza de apoyo debe ofrecer, durante un largo período de tiempo, un ejercicio regular con actividades de interés para el *niño.* Normalmente, el dominio incompleto de las técnicas básicas para contar suele atribuirse a una falta de experiencia o interés. Si los ejercicios no son interesantes, algunos niños no se sentirán comprometidos con ellos y no alcanzarán la experiencia necesaria para el dominio de la técnica. Por ejemplo, los niños se cansan enseguida de los ejercicios de repetición oral para aprender a contar. Los niños se sienten más dispuestos a generar la serie numérica en el contexto de enumerar objetos porque se trata de una actividad que tiene más sentido para ellos (Fuson *et al.,* 1982). La forma concreta que deberá tener el ejercicio dependerá del niño. Muchos niños responderán con entusiasmo a distintos tipos de juegos que se basan en contar; otros preferirán jugar con un títere de “Barrio sésamo” y otros podrán disfrutar con el contacto de un tutor, sea niño o adulto, interesado y entusiasta. Lo esencial es que el ejercicio no necesita (es más, no debe) carecer de interés para el niño.

D) RESUMEN

Generar de palabra la serie numérica sólo es un primer paso hacia el dominio de un complejo de técnicas importantes que los adultos emplean de manera rutinaria y automática. Cuando llegan a la escuela, los niños suelen ser capaces de generar la parte memorística de la serie numérica y un poco de la parte basada en la aplicación de reglas, además de poder enumerar y separar conjuntos de objetos, emplear la regla del valor cardinal para resumir una enumeración e incluso emplear relaciones de orden numérico (números anterior y posterior a otro dado) para determinar la mayor de dos cantidades. Algunos niños, sobre todo los deficientes mentales, pueden necesitar una educación de apoyo para dominar estas técnicas informales básicas. Durante los primeros años de escuela, los niños resuelven el problema de las decenas y amplían su capacidad de contar de palabra hasta loo y más. A medida que se van familiarizando con la serie numérica, aprenden a contar por intervalos (por ejemplo, por parejas) y a contar regresivamente. La enseñanza especial o de apoyo debe asegurar que se llegue al dominio de cada componente sucesivo de la jerarquía de técnicas para contar. La enseñanza deberá ser concreta, intensa e interesante.

Desarrollo del número

El punto de vista de los requisitos lógicos

Los psicólogos ofrecen dos explicaciones distintas de la comprensión del significado de los nombres de los números y del acto de contar. Desde uno de estos puntos de vista, los niños, antes de llegar a tener "uso de razón" (hacia los siete años de edad), son incapaces de comprender el número y la aritmética (por ejemplo, Piaget, 1965). La curiosa respuesta de Peter se atribuye a una incapacidad de pensar lógicamente. Es decir, se supone que Peter carece del razonamientos y los conceptos lógicos necesarios para un concepto del número y para contar significativamente. Como contar no implica tener éxito en tareas de conservación de la desigualdad o la desigualdad, algunos psicólogos (por ejemplo, Wohlwill y Lowe, 1962) han llegado a la conclusión de que la experiencia de contar tiene poco o nada que ver con el desarrollo de un concepto numérico. Por ejemplo, Piaget (1965) afirmaba que los niños aprenden a recitar la serie numérica y datos aritméticos a muy corta edad y que se trata de actos completamente verbales y sin significado. Ni siquiera la numeración garantiza una comprensión del número. Desde este punto de vista, el desarrollo de un concepto del número y de una manera significativa de contar depende de la evolución del pensamiento lógico.

El modelo cardinal. Según uno de los modelos que establecen la lógica como requisito previo, los niños deben entender la clasificación antes de poder comprender el significado esencial del número. Esto implica aprender a definir un conjunto, es decir, a clasificar objetos para poder asignar cada uno de ellos a un conjunto correcto. Por ejemplo, un conjunto de formas curvas puede incluir c, C, u, U, s, S y O, pero no L, y, V, F y **#.**

Comprender la lógica de clases también requiere comprender la clasificación jerárquica o "inclusión de clases": una clase es la suma de sus partes (subclases) y, por tanto, es mayor que cualquier subclase. Por ejemplo, si a un niño se le presentan tres rosas y cinco violetas y se le pregunta "¿Hay más violetas o hay más flores?", debería responder que la clase (flores) es más que la subclase (violetas). Sin embargo, los niños pequeños tienen dificultades con estos problemas de inclusión de clases (por ejemplo, Piaget, 1965)**.** Estos resultados se han considerado evidencias de que los niños pequeños no captan la lógica de clases y que, en consecuencia, son incapaces de comprender verdaderamente el número.

Además, la lógica de clases comporta comprender la idea de conjuntos equivalentes. La equivalencia de dos conjuntos se define mediante una correspondencia biunívoca: Dos conjuntos pertenecen a la misma clase si se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos respectivos. La equivalencia y la correspondencia biunívoca, que son el fundamento de la matemática formal, se consideran el fundamento psicológico del aprendizaje de las matemáticas.

El modelo de Piaget. Según Piaget (por ejemplo, 1965), los niños deben entender la lógica de las relaciones (seriación) y la clasificación para comprender las relaciones de equivalencia y, a consecuencia de ello, el significado del número. Piaget estaba de acuerdo en que la equivalencia (la correspondencia biunívoca) es el fundamento psicológico de la comprensión del número. Sin embargo, creía que comprender la correspondencia biunívoca implicaba comprender *tanto* la clasificación como la seriación. Por ejemplo, igualar implica observar el primer elemento de cada conjunto, y luego el segundo, el tercero, el cuarto, etc. En otras palabras, para establecer una igualdad, los niños tienen que llevar la cuenta de los elementos que han emparejado mediante la imposición de un orden.

De la misma manera, Piaget consideraba que el número es la unión de conceptos de seriación y de clasificación. Por ejemplo, enumerar un conjunto implica tratar todos sus elementos como miembros de la misma clase y al mismo tiempo diferenciar dentro del conjunto el primer elemento, el segundo, etc. Además, los números forman un orden y constituyen una jerarquía de clases. Por ejemplo, tres es una clase que contiene como subclases uno y dos (y, a su vez es una subclase de los números mayores). En resumen, Piaget afirmaba que el número no puede entenderse en términos de un único concepto lógico sino que constituye una síntesis única de conceptos lógicos (Sinclair y Sinclair, en prensa).

Para Piaget (1965), el desarrollo de la comprensión del número y de una manera significativa de contar está ligada a la aparición de un estadio más avanzado del pensamiento. Los requisitos lógicos del número (conceptos de seriación, clasificación y correspondencia biunívoca) aparecen con el “estadio operacional” del desarrollo mental. Los niños que no han llegado al estadio operacional no pueden comprender el número ni contar significativamente, mientras que los niños que han llegado a él sí pueden hacerlo. Por tanto, el número es un concepto de “todo o nada”.

Piaget (1965) afirmaba que la conservación de la cantidad tenía una importancia extraordinaria porque señalaba la llegada al estadio operacional, es decir: la adquisición del pensamiento lógico; la comprensión de las clases, las relaciones y las correspondencias biunívocas; un verdadero concepto del número; y una manera significativa de contar. Más concretamente, según Piaget la conservación de la cantidad indicaba la comprensión de que una vez establecida la equivalencia (no equivalencia) de dos conjuntos, los cambios en la configuración de los conjuntos no modifica la relación de equivalencia (no equivalencia). Es decir, las relaciones de equivalencia (no equivalencia) se *conservan* a través de cualesquiera transformaciones no relevantes en la apariencia física de un conjunto. El niño que conserva se da cuenta de que el número de elementos de un conjunto no varía cuando varía su aspecto físico.

El punto de vista basado en contar

Un punto de vista alternativo considera que la dificultad de Peter con la tarea de conservación es el resultado de un conocimiento incompleto de cómo se debe contar y no de una completa incapacidad para pensar lógicamente. Algunos psicológicos (por ejemplo, Gelman, 1972; Zimiles, 1963), han llegado a la conclusión de que contar es esencial para el desarrollo de la comprensión del número por parte del niño. El número no se considera un concepto tipo «todo o nada» que es posible gracias a un cambio general en la manera de pensar de los niños (una nueva etapa de desarrollo mental). En cambio, el modelo que basa su explicación en la manera de contar aduce que la comprensión del número evoluciona lentamente como resultado directo de las experiencias de contar.

Desde este punto de vista, los conceptos numéricos y contar significativamente se desarrollan de manera gradual, paso a paso, y son el resultado de aplicar técnicas para contar y conceptos de una sofisticación cada vez mayor. Al principio, los preescolares suelen aprender a emplear los números de una manera mecánica para descubrir o construir gradualmente significados cada vez más profundos del número y de contar (por ejemplo, Baroody y Ginsburg, en prensa; Fuson y Hall, 1983; von Glasersfeld, 1982; Wagner y Walters, 1982). A medida que aumenta su comprensión del número y de contar, los niños aplican el número y los procedimientos para contar de una manera cada vez más sofisticada. A su vez, esta creciente sofisticación desemboca en una comprensión mayor, etc. En el fondo, el desarrollo de técnicas y conceptos está entrelazado y, de hecho, durante los últimos años algunos piagetianos (por ejemplo, Elkind, 1964; Piaget, 1977; Sinclair y Sinclair, en prensa) han llegado a la conclusión de que un análisis del desarrollo del número sería psicológicamente incompleto si no se tuviera en cuenta la contribución de las actividades de contar.

Conceptos relacionados con contar

Al principio, los niños se limitan a recitar nombres de números. En estos momentos, contar no parece ser nada más que un sonsonete carente de sentido (Ginsburg, 1982). Por ejemplo, Arianne, a los 22 meses, canturrea "dos, cinco, dos, cinco" mientras baja saltando cuatro escalones. Ha oído a sus hermanos gemelos de 3 años de edad recitar nombres de números mientras bajan las escaleras o juegan a algo. Al parecer, Arianne ha aprendido que ciertas actividades pueden verse acompañadas por la recitación de nombres de números. Imita el procedimiento (y sólo una parte de la serie numérica correcta) seguido por sus hermanos. "Los nombres de los números son palabras y, como ocurre con otras palabras, los niños pueden aprender a decirlas mucho antes de formar (imágenes mentales), por no hablar ya de conceptos abstractos que asociar a las mismas..." (von Glasersfeld, 1982, p. 196).

Al principio, los niños pueden hacer enumeraciones sin intentar numerar conjuntos. Por ejemplo, Arianne parece disfrutar, a sus dos años de edad, etiquetando objetos mientras busca entre sus juguetes; no hace ningún intento de emplear una etiqueta para cada elemento o de resumir la cuenta. Cuando se le hacen preguntas del tipo "¿Cuántos hay?", sabe que el procedimiento correcto implica responder con un número, pero todavía no parece apreciar que los números se emplean para designar el valor cardinal de un conjunto y para diferenciar un conjunto de otros conjuntos con distintos valores cardinales. Considérese la siguiente conversación entre Arianne y su padre:

PADRE: (Señalando un dibujo con dos gatos.) ¿Cuántos gatos hay en este dibujo?
ARIANNE: Dos.
PADRE: (Señalando un dibujo con tres perros.) ¿Cuántos perros hay en este dibujo:
ARIANNE: Dos.
PADRE: (Señalando un dibujo con un gato.) ¿Cuántos hay?
ARIANNE: Dos.

Parece que "dos" es la respuesta "comodín" para Arianne a la hora de responder a preguntas del tipo "¿Cuántos hay?". En estos momentos, contar es un acto enteramente verbal y sin significado. Obsérvese, no obstante, que ya trata los números como una clase especial de palabras. Sólo emplea números cuando se le pregunta cuántos hay o cuando se le pide que cuente. Los niños parecen distinguir muy pronto entre las palabras que son para contar y las que no (Fu-son *et al.*, 1982). Los preescolares sólo emplean letras muy rara vez cuando se les pide que cuenten (por ejemplo, Gelman y Gallistel, 1978). Incluso los niños levemente deficientes del ciclo medio reconocen siempre los números como una clase especial de palabras aplicables a actividades de contar (Baroody y Ginsburg, 1984).

Principio del orden estable. Con el tiempo, a medida que los niños usan sus técnicas para contar y reflexionan sobre ellas, aprenden a descubrir regularidades importantes en sus acciones de contar y en los números. Los niños parecen aprender los primeros términos de la serie numérica de memoria. Al principio, puede que no empleen los mismos términos o el mismo orden cuando recitan números o cuentan objetos. Por ejemplo, cuando Alexi tenía tres años de edad no siempre empezaba desde el uno para contar conjuntos. Tarde o temprano, los niños se dan cuenta implícitamente, o hasta explícitamente, de que contar requiere repetir los nombres de los números en el mismo orden cada vez. El principio del orden estable estipula que para contar es indispensable el establecimiento de una secuencia coherente. Los niños cuyas acciones están guiadas por este principio pueden utilizar la secuencia numérica convencional o una secuencia propia (no convencional), pero siempre de manera coherente (Gelman y Gallistel, 1978). Por ejemplo, Beth siempre usa la secuencia correcta del uno al diez en tanto que Carol usa siempre su propia versión (“1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 18”) para contar diez objetos.

Principio de correspondencia. Como resultado de la imitación, al principio los niños pueden recitar números (como Arianne) mientras señalan objetos y hasta pueden llegar a desarrollar una cierta eficacia en la enumeración de conjuntos pequeños. Más adelante, pueden darse cuenta de la necesidad de etiquetar cada elemento de un conjunto una vez y sólo una. El principio de correspondencia subyace a cualquier intento genuino de enumerar conjuntos y guía los esfuerzos de construir estrategias de control de los elementos contados y por contar, como separar los unos de los otros. A una edad tan corta como los tres años, los niños parecen emplear un principio como éste para detectar errores de enumeración como contar dos veces un mismo objeto o saltarse alguno (Gelman y Meck, en prensa).

Principio de unicidad. Como una función de contar es asignar valores cardinales a conjuntos para diferenciarlos o compararlos, es importante que los niños no sólo generen una secuencia estable y asignen una etiqueta, y sólo una, a cada elemento de un conjunto, sino también que empleen una secuencia de etiquetas distintas o únicas. Por ejemplo, un niño puede usar la secuencia “1, 2, 3, 3” de manera sistemática y emplear estas etiquetas en una correspondencia biunívoca, pero como no todos sus elementos están diferenciados, etiquetará de la misma manera conjuntos de tres y cuatro elementos (con la designación cardinal “3”) (Baroody y Price, 1983). Incluso cuando un niño tiene que recurrir al empleo de términos no convencionales, la apreciación del principio de unicidad (comprender la función diferenciadora de contar) le impediría escoger términos empleados previamente. Por ejemplo, el empleo sistemático de la secuencia no convencional “1, 2, 3, diecionce” etiquetaría erróneamente conjuntos de cuatro elementos pero al menos los diferenciaría de conjuntos con menos elementos. Por tanto, además de los principios de orden estable y de correspondencia, es importante que los niños sigan el principio de unicidad.

Principio de abstracción. Los niños también deben aprender cómo definir un conjunto para poder contarlo. El principio de abstracción se refiere a la cuestión de lo que puede agruparse para formar un conjunto (Gelman y Gallistel, 1978). A la hora de contar, un conjunto puede estar formado por objetos similares (por ejemplo, bolas: •••) o distintos (por ejemplo, bolas, estrellas y palos: • * —). Para incluir elementos distintos en un conjunto, el niño debe pasar por alto las diferencias físicas de los elementos y clasificarlos como "cosas" (por ejemplo, una bola, una estrella y un bloque se pueden considerar como una, dos y tres *cosas).* En el fondo, cuando creamos un conjunto de elementos distintos encontramos (abstraemos) algo común a todos los elementos.

Principio del valor cardinal. Mediante la imitación, los niños pueden aprender fácilmente la técnica de contar denominada regla del valor cardinal, es decir, basarse en el último número contado en respuesta a una pregunta sobre una cantidad. Sin embargo, el empleo de la regla del valor cardinal no garantiza una apreciación adecuada del valor cardinal en sí (Fuson y Hall, 1983; Von Glasersfeld, 1982). Es decir, no significa necesariamente que el niño se dé cuenta de que el último término designa la cantidad del conjunto y que un conjunto tendrá la misma cantidad si se vuelve a contar después de modificar la distribución espacial de sus elementos. Por ejemplo, un niño deficiente empleaba correctamente la correspondencia biunívoca para enumerar quince objetos, pero empleaba la siguiente secuencia numérica: "1, ...5, 19, 14, 12, 10, 9, 20, 49, 1, 2, 3" (Baroody y Ginsburg, 1984). Cuando se le preguntó la cantidad de elementos respondió satisfecho: "¡Tres!". Al parecer, ¡la noción de "tres" no excluía conjuntos cinco veces más grandes!

Los niños pueden construir el principio del valor cardinal reflexionando sobre sus actividades de contar. Cuando, por ejemplo, un niño cuenta una colección de tres juguetes, los desparrama y los vuelve a contar, puede descubrir que una colección conserva la misma designación (cardinal) a pesar de su aspecto («tres»).

Principio de la irrelevancia del orden. Parece que al reflexionar sobre la actividad de contar también se descubre el principio de la irrelevancia del orden (El orden en que se enumeran los elementos de un conjunto no afecta a su designación cardinal) (Baroody, 1984d). Considérese el caso descrito por Piaget (1964). Un niño (de cuatro o cinco años) contaba una hilera de diez fichas. Como no se daba cuenta de que el resultado sería el mismo, volvió a contar las fichas en dirección contraria y volvió a encontrar que eran diez. Interesado por este resultado, el niño colocó las fichas en círculo, las volvió a contar y volvió a encontrarse con diez. Finalmente, contó el círculo de fichas en dirección opuesta para acabar obteniendo el mismo resultado. Al contar los elementos de varias maneras, este niño descubrió una interesante propiedad de las acciones de contar: la distribución de los elementos y el orden de su enumeración no tenían importancia a la hora de determinar la designación cardinal del conjunto.

Conceptos de equivalencia, no-equivalencia y magnitud

Una vez el niño ha llegado a dominar estos conceptos básicos para contar que se refieren a un solo conjunto, la acción de contar puede aplicarse a contextos más complicados como la comparación de dos conjuntos. También puede emplearse la acción de contar para descubrir que la apariencia no es pertinente para determinar si dos conjuntos son iguales o no. Si un niño cuenta dos conjuntos y los números resultantes son idénticos, puede llegar a la conclusión de que los conjuntos tienen el mismo número de objetos a pesar de sus diferencias en cuanto a aspecto. Es probable que los niños descubran esta noción numérica fundamental jugando con conjuntos pequeños de uno a cuatro elementos. Por ejemplo, los niños pueden etiquetar con la palabra "dos" varios pares de cosas (por ejemplo, bloques o dedos) incluyendo pares naturales de cosas (por ejemplo, ojos, brazos, gemelos). Como el niño puede *ver* en seguida que estos conjuntos compuestos de cosas distintas se corresponden entre sí, pueden llegar a la conclusión de que los conjuntos etiquetados con la palabra “dos” son equivalentes a pesar de las diferencias de su aspecto físico (por ejemplo, Schaeffer *et al.,* 1974). Esta comprensión puede aplicarse posteriormente a conjuntos mayores que el niño no puede comparar visual o mentalmente con facilidad.

Antes de llegar a la escuela, los niños también aprenden que el número puede especificar diferencias entre conjuntos (no equivalencia) y emplearse para especificar “más” o “menos” (ordenar conjuntos según su magnitud). También esto es probable que provenga de jugar con conjuntos de pocos elementos. Por ejemplo, un niño puede encontrarse ante la opción de escoger entre tres cestos con uno, dos o tres caramelos. El niño puede ver fácilmente que 3 es más que 1 ó 2, y que 2 es más que 1. Al contar cada conjunto, se asocian etiquetas numéricas a estas diferencias perceptibles en cuanto a magnitud. Otro niño, por ejemplo, podría contar dos bloques («uno, dos-dos bloques»), luego añadir uno más y llegar a la conclusión de que hay «más». Luego puede volver a contar los bloques “uno, dos tres- ¡tres bloques!”) y encontrar que ahora, la etiqueta numérica es “tres”. A partir de casos repetidos de estos dos tipos de experiencias concretas, un niño puede llegar a la conclusión de que: a) se asocian distintos números a magnitudes distintas; b) el mayor de dos números siempre viene después en la secuencia de contar, y c) cada término para contar es más que el término que le precede en la serie numérica.

Contar con los dedos puede desempeñar un papel clave en este desarrollo del número. Cuando los niños cuentan con los dedos (extendiéndolos mientras dicen “uno, dos, tres...”) pueden *ver* que el número de dedos es cada vez mayor a medida que van contando. De esta manera, los niños pueden reconocer que la magnitud va asociada a la posición dentro de la serie numérica. Al contar con los dedos, incluso pueden llegar a darse cuenta de que 2 es 1 (un dedo) más que 1, que 3 es 1 (un dedo) más que 2, etc. En resumen, como resultado de sus experiencias contando conjuntos pequeños con los dedos, los niños pueden aprender reglas de numeración para determinar “cantidades iguales”, “cantidades distintas” y “más”.

Conservación de la cantidad. Con el tiempo, las reglas numéricas para evaluar la equivalencia, la no-equivalencia y la magnitud permiten a los niños poder conservar. Estos criterios numéricos precisos liberan a los niños de tener que depender de indicios perceptivos como la longitud cuando hacen comparaciones cuantitativas. Como resultado, los niños dejan de despistarse cuando una hilera de fichas se alarga o se acorta durante una tarea de conservación de la cantidad. Quizá Paul, que llegó a la conclusión de que su hilera larga (con siete fichas) tenía más fichas que otra, más corta, con ocho fichas, no había tenido experiencias de contar suficientes para comparar con exactitud dos números seguidos. En otras palabras, puede que este preescolar no hubiera aprendido métodos o técnicas numéricos para calibrar la magnitud relativa de dos conjuntos relativamente grandes.

Aun después de haber aprendido reglas numéricas para determinar equivalencias o no equivalencias y hacer comparaciones entre magnitudes, los niños pueden dejar de emplear estas reglas en una tarea de conservación de la cantidad por varias razones. En primer lugar, pueden no pensar en contar y, por tanto, carecen de la base para emplear reglas numéricas. Cuando una hilera se ha transformado físicamente (por ejemplo, alargándola) los niños pueden no estar seguros de la relación inicial de los conjuntos (quizá las dos hileras no eran iguales de entrada). Ante esta incertidumbre, pueden verse abrumados por los indicios visuales de las hileras de longitud desigual, pueden echar mano del criterio perceptivo de la longitud y llegar a la conclusión de que la hilera más larga tiene más (Acredolo, 1982). Puede ser, pues, que los niños que no conservan crean en realidad que alargar una hilera añade algo a la misma. Además, la no conservación sólo es una contradicción lógica si se cree que las dos hileras son iguales al principio, cosa que sin contar y sin números específicos es una proposición dudosa para los niños pequeños. La falta de conservación no implica necesariamente que un niño no pueda razonar lógicamente sobre las relaciones de equivalencia si cuenta y emplea números (Gelman y Gallistel, 1978).

En segundo lugar, y aun si piensan en contar, puede que los niños pequeños no tensan suficiente confianza en sus reglas numéricas para basarse en un criterio numérico en vez de perceptivo (por ejemplo, Gelman, 1982). La tarea de conservación de la cantidad provoca un conflicto entre la regla que tiene un niño para comparar cantidades (“Si una hilera es más larga que la otra es que tiene “más”) y el desarrollo de una regla basada en contar (“Si se cuentan dos hileras y tienen la misma etiqueta numérica, es que tienen cantidades iguales”). Un niño pequeño puede resolver el conflicto simplemente recurriendo al criterio perceptivo familiar para él. Un niño con algo más de experiencia puede verse dividido entre los dos criterios y responder de manera incoherente.

Tarde o temprano, los niños resuelven el conflicto ideando una regla nueva y más sofisticada que integra la regla numérica y la basada en la percepción. En el fondo, la nueva regla especifica: «Si una hilera es más larga que otra, puede tener una cantidad mayor a *menos que* al contar se obtenga la misma etiqueta numérica, en cuyo caso se trata de hileras con la misma cantidad.» Básicamente, los niños parecen resolver el conflicto cognoscitivo reorganizando la información existente para darle una forma más sistemática. De esta manera, los niños pueden continuar empleando indicios perceptivos cuando las diferencias son evidentes (por ejemplo, distinguir entre un conjunto de seis velas y otro de dos) (Zimiles, 1963). En casos en que las diferencias no son claras (por ejemplo, dos colas para el cine en donde una de ellas es larga pero con los integrantes separados y la otra es corta pero con los integrantes mucho más agrupados), la regla indica la necesidad de contar y realizar un juicio numérico.

Otros niños ni siquiera tienen que contar para conservar. Dan por sentada la conservación de la cantidad. En realidad llegan a pensar que es extraño que un adulto plantee una pregunta cuya respuesta es tan obvia. A partir de experiencias repetidas de contar, saben que si no se añade ni se quita nada a dos conjuntos equivalentes, esta equivalencia permanece constante por mucho que varíe la distribución espacial (Lawson, Baron y Siegel, 1974). Es decir, tarde o temprano los niños infieren una regla de equivalencia relativamente *abstracta* basada en una correspondencia biunívoca que complementa sus reglas de equivalencia, más concretas, basadas en números específicos (Gelman y Gallistel, 1978).

En realidad, hay muchos datos que indican que la regla abstracta de equivalencia/no equivalencia se desarrolla en los niños a partir de su experiencia concreta de contar. Los niños pequeños suelen ponerse a contar como base para realizar sus juicios sobre la conservación de la cantidad (por ejemplo, Gelman, 1972). Además, la enseñanza o el desarrollo de técnicas de numeración precisas facilita la adquisición de la conservación de la cantidad (Bearison, 1969; LaPointe y O’Donnell, 1974; Starkey y Cooper, 1977). Ciertamente, parece que los niños pequeños suelen pasar por una etapa en la que se basan en contar para conservar (conservación con "verificación empírica") antes de conservar por comprensión (conservación con "certeza lógica" (Apostel, Mays, Mod y Piaget, 1957; Greco, Grize, Papert y Piaget, 1960; Green y Laxon, 1970).

Así pues, según el punto de vista centrado en la manera de contar, la experiencia de contar es la clave para hacer explícitas y ampliar las nociones intuitivas de equivalencia, no equivalencia y orden de magnitud (Baroody y White, 1983). Como vimos en el capítulo II, incluso los niños de seis meses pueden inspeccionar visualmente y determinar de manera intuitiva si unos conjuntos pequeños (hasta cuatro elementos) son equivalentes o no. Contar proporciona etiquetas verbales que pueden adjuntarse a estos conjuntos pequeños. Es la experiencia de contar lo que proporciona la base para formular reglas numéricas explícitas y, posteriormente, reglas más abstractas (basadas en la equivalencia) para razonar en torno a las relaciones numéricas existentes entre cantidades mayores. Por tanto, al principio los niños suelen depender de contar para averiguar relaciones de equivalencia como la representada por la tarea de conservación de la cantidad, y sólo después dependen de reglas relativamente abstractas. En pocas palabras, parece que contar es, más que igualar, la vía natural de los niños para llegar a comprender las relaciones de equivalencia, no-equivalencia y orden con números no intuitivos.

Conceptos aritméticos básicos

Mediante las experiencias de contar, los niños también descubren qué hace cambiar un número. Si los cambios de orden o distribución no alteran el valor cardinal de un conjunto, ciertos tipos de transformación sí que lo hacen (por ejemplo, añadir o quitar objetos). Cuando los niños llegan a ser competentes en la enumeración o pueden captar directamente pautas numéricas, están preparados para darse cuenta de relaciones aritméticas importantes. Un niño puede determinar o ver con rapidez que añadir un bloque a otro es "dos" y que añadir otro más hacen "tres", etc. (Baroody y White, 1983; Ginsburg y Baroody, 1983, y Von Glasersfeld, 1982). De manera similar, un niño puede determinar o ver en seguida que si se quita una galleta de un conjunto de tres, quedan dos. No hay más que una fina línea entre contar y aumentar o disminuir en una unidad.

Descubrir los efectos de añadir o quitar una unidad depende de unas técnicas numéricas eficaces.

A partir de sus experiencias informales de contar, los niños construyen conceptos aritméticos básicos, pero generales. Más concretamente, como resultado de sus experiencias informales los niños consideran la adición como un proceso aumentativo (añadir algo a una cantidad dada) y la sustracción como un proceso de disminución (quitar algo de una cantidad dada). Por ejemplo, cuando Aaron empezaba a asistir al jardín de infancia se le preguntó cuánto pensaba que eran cuatro y cinco (4 + 5). Replicó: "Si lo tuviera que adivinar, diría que cuatro o cinco. Espera, éstos son los números. Seis o siete." como consideraba que la adición era un proceso aumentativo, Aaron sabía que dar uno de los sumandos como resultado no estaba bien. A causa de su concepto informal de la adición, Aaron reajusto su cálculo mental para que, al menos, fuera algo mayor que cinco.

Consideremos también la reacción de unos preescolares a la tarea de la "sesión de magia" desarrollada por Gelman (Gelman, 1972; Gelman y Gallistel, 1978). La primera etapa de la tarea establece la importancia de un número determinado. Se enseñan a un niño dos bandejas con distintas cantidades de figuras de plástico (por ejemplo, una bandeja con tres ratones y otra con cuatro). A continuación, el examinador señala una de las bandejas (por ejemplo, la que tiene tres ratones) y la designa como “la ganadora”. Aunque no se les indica que lo hagan, los niños suelen contar o darse cuenta de la cantidad de ratones en las bandejas. Las bandejas se colocan detrás de una pantalla, se tapan, se mezclan y vuelven a mostrarse al niño. Entonces, el niño trata de escoger la ganadora. Si destapa la no-ganadora (por ejemplo, la bandeja con cuatro ratones) se da al niño otra oportunidad y, naturalmente, encuentra la ganadora. Este proceso se repite hasta que el niño espera encontrar a la ganadora, si no en el primer intento, seguro que en el segundo.

La segunda etapa de la tarea mide la reacción del niño a varios tipos de transformaciones. A veces el examinador realiza transformaciones tras la pantalla que no afectan a la cantidad: cambia la posición de las figuras (por ejemplo, coloca en formación triangular tres ratones que estaban en fila), altera el color de un objeto, o sustituye un ratón por un objeto diferente. A veces, realiza en secreto transformaciones pertinentes para la cantidad: añadir o sustraer figuras de la bandeja ganadora (por ejemplo, añadir otro ratón de juguete a la bandeja de tres para que ninguna bandeja sea la ganadora).

Luego se registraba la reacción de los niños a estas transformaciones pertinentes y no pertinentes para la cantidad. Los niños ignoraban la transformación no pertinente para la cantidad: la ganadora (por ejemplo, “tres”) seguía siendo la ganadora. Sin embargo, los niños se sorprendían mucho cuando destapaban las dos bandejas y no podían encontrar la ganadora. Cuando se les preguntaba qué había ocurrido, los niños decían que se había añadido (o quitado) algo a la bandeja ganadora. Cuando se les preguntaba cómo podría arreglarse la situación, los niños indicaban que debía quitarse la figura sobrante (reponerse la figura que faltaba).

Puede que estas pautas de respuesta no parezcan un logro extraordinario a ojos de un adulto, pero indican la existencia de unas aptitudes importantes en los niños de preescolar. A pesar de que un niño puede no conservar la cantidad, el éxito en la tarea “mágica” implica una comprensión de las transformaciones que son o no importantes para variar la cantidad (por ejemplo, la adición y la sustracción varían la cantidad y una nueva distribución no lo hace) al menos con números familiares. Además, parecen comprender que la adición y la sustracción son operaciones inversas: la una deshace la otra. Por tanto, aun los niños pequeños que no conservan tienen alguna comprensión de la aritmética y pueden, dentro de ciertos límites, razonar lógicamente sobre las relaciones numéricas.

El papel del reconocimiento de pautas

La “captación directa” implica el reconocimiento automático de pautas numéricas (por ejemplo, identificar sin contar que .◦. ó ◦◦. son “tres”). El lugar del reconocimiento automático de pautas numéricas en el desarrollo del número es una cuestión que todavía queda abierta. Algunos teóricos (por ejemplo, Klahr y Wallace, 1973; Von Glasersfeld, 1982) indican que los niños pueden captar directamente pequeñas cantidades antes de poder contar. Desde el punto de vista de Piaget, los niños muy pequeños reconocen simplemente una *patita completa.* Por ejemplo, • • • se considera una configuración global que se asocia a “tres”; ◦ ◦ ◦ se considera una configuración global distinta que simplemente también se asocia a “tres”. Ninguna de estas “totalidades” se reconoce como una colección de elementos que se pueden contar, es decir, una colección compuesta de unidades (elementos individuales). Desde este punto de vista, la captación directa no implica una comprensión del número. Los niños no reconocen simultáneamente una pauta numérica como una totalidad (una unidad en sí misma) y un conjunto de partes (unidades individuales) hasta que llegan al estadio del pensamiento operacional. Con este logro intelectual, un niño puede contemplar el número y las pautas numéricas como una unidad compuesta de unidades (por ejemplo, Steffe, Von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983).

Según otro punto de vista, contar precede a la captación directa (Beckmann, 1924). En otras palabras, los niños aprenden a enumerar colecciones correctamente antes de poder reconocer conjuntos con precisión y rapidez. En realidad, hay algunas evidencias (por ejemplo, Baroody y Ginsburg, 1984; Gelman, 1977) que indican que el reconocimiento automático de las pautas numéricas suele desarrollar-se después de una intensa experiencia de contar objetos. Esto puede ser especialmente cierto para niños deficientes (Baroody y Ginsburg, 1984). Desde este punto de vista, incluso los preescolares pueden reconocer que el número y las pautas numéricas son, a la vez, una colección completa y un compuesto de partes individuales, es decir, una unidad compuesta de unidades.

En cualquier caso, los dos modelos indican que la captación directa es una técnica fundamental en el desarrollo de la comprensión del número por parte del niño. Cuando los niños pueden. reconocer automáticamente una pauta, pueden descubrir aspectos importantes del número. Por ejemplo, un niño que tome tres objetos con una distribución triangular y los coloque en fila, y reconozca que tanto • • • como • • • son casos de “tres”, puede formular de manera explícita o implícita el siguiente principio: “La distribución de las canicas no varía la cantidad de canicas que tengo.” La captación directa también puede desempeñar un papel esencial en el aprendizaje de reglas numéricas para apreciar equivalencias. Si a un niño se le muestran grupos de tres elementos con una distribución triangular y en hilera, y puede reconocer inmediatamente que ambos conjuntos son “tres”, puede inferir que dos conjuntos pueden tener la misma cantidad aun cuando tengan aspectos distintos (Von Glasersfeld, 1982).

Implicaciones curriculares

Es indudable la importancia del objetivo de la Matemática Moderna y de los currículos piagetianos para ayudar a los niños a pensar lógicamente. Razonar en torno a clases y relaciones debe ser un aspecto de los currículos de las matemáticas elementales. Sin embargo, la enseñanza inicial de las matemáticas debería tener en cuenta qué tiene significado para los niños pequeños. Siguen a continuación algunas recomendaciones:

1. *Introducir las matemáticas de una manera informal en vez de hacerlo formalmente mediante la teoría de conjuntos.* Las definiciones formales de la equivalencia numérica, etc., pueden ser demasiado abstractas para los niños pequeños. Contar ofrece una base concreta y significativa para comprender ideas esenciales como equivalencia, no-equivalencia y conservación de la cantidad, especialmente con conjuntos no intuitivos. De hecho, contar puede tener más significado que establecer correspondencias para determinar la equivalencia de conjuntos, sobre todo si tienen más de cinco objetos.

2. *No aplazar las experiencias y la enseñanza de contar.* Hasta los preescolares parecen estar psicológicamente equipados para empezar a aprender el número. A excepción de las nociones

básicas de «más», no hay necesidad de retrasar la enseñanza de contar respecto a técnicas generales como clasificar, ordenar o establecer correspondencias. Es importante enseñar estas técnicas por sí mismas, pero hay pocas razones para creer que sean necesarias para la enseñanza del número y de contar. Tampoco hay necesidad de aplazar la enseñanza de contar, del número y de la aritmética a los niños que no conservan.

3. *Fomentar el desarrollo del reconocimiento automático de pautas y de las pautas digitales.* A veces se ha desestimado la captación directa por considerarla una técnica aprendida de memoria que se obtiene con más facilidad que la enumeración o un concepto numérico (por ejemplo, Strauss y Lehtinen, 1950). El reconocimiento de pautas numéricas desempeña un papel importante en el desarrollo del número y de la aritmética. Se debe instar a los niños a que dominen pautas numéricas regulares como las de los dados. Además, necesitan experimentar con distribuciones irregulares de uno a cinco elementos. Mediante el reconocimiento automático de varias pautas numéricas como casos del mismo número, los niños pueden aprender que el número y los conjuntos equivalentes no se definen por su aspecto. Las pautas digitales también desempeñan un papel importante en el desarrollo del número como veremos en el capítulo VIII, en el desarrollo de la aritmética. Por tanto, se debe instar a los niños pequeños a contar con los dedos y emplear pautas digitales.

D) RESUMEN

La experiencia de contar es esencial para que los niños desarrollen paulatinamente la comprensión del número y lleguen a dominar aplicaciones numéricas. Salvo en el caso de corregir el aprendizaje de nociones básicas como "más", no hay ninguna razón para aplazar la enseñanza de contar y del número. A partir de experiencias concretas de contar y de reconocimiento de pautas, los niños aprenden que los cambios de aspecto y del orden de contar no afectan al valor cardinal, y que añadir o quitar elementos sí que lo hace. La experiencia de contar es importante para ampliar las nociones intuitivas de equivalencia, no-equivalencia y orden. La enseñanza formal y lógica de la teoría de conjuntos es útil por derecho propio, pero la enseñanza del número basada en contar es inicialmente más significativa para los niños.

El fundamento: contar

Como vimos en el capítulo VII, los niños desarrollan una comprensión fundamental de la aritmética mucho antes de llegar a la escuela a partir de sus primeras experiencias de contar. Los conceptos informales de la adición (en tanto que añadir *más)* y de la sustracción (en tanto que quitar algo) guían los intentos de los niños para construir procedimientos aritméticos informales. Por ejemplo, para sumar uno más a tres, muchos niños empiezan contando hasta tres y luego se limitan a contar una unidad más ("1, 2, 3, 4"). En realidad, hasta pueden llegar a tratar de abordar problemas más difíciles de la misma manera. Consideremos los primeros intentos de Aaron para calcular mentalmente las sumas de problemas $1 + N$ y de problemas con sumandos distintos de uno $(M + N)$. Como consideraba que la adición es un proceso aumentativo, sus intentos iniciales, aunque infructuosos, iban por buen camino. Para $2 + 3$, por ejemplo, parecía saber que la suma tenía que ser mayor que dos. Por tanto, enseguida contó hasta dos y luego contó una unidad más (aunque no sabía bien cómo continuar): "1, 2, 3, ... Casi lo tengo, pero ...".

La soltura con las técnicas para contar permite a los niños resolver mentalmente problemas con “1” muy pronto. Los niños descubren con bastante rapidez que las relaciones entre un número y su siguiente se aplican a problemas $N + 1$ y que las relaciones entre un número y su anterior pueden aplicarse a problemas N — 1. De hecho, muchos preescolares pueden usar su representación mental de la serie numérica para resolver problemas con <<1>> sencillos *(N* + 1 y N — 1) como “tres pastelillos y uno más” o “cinco muñecas menos una que te quedas” (por ejemplo, Baroody, 1984a; Court, 1920; Fu-son y Hall, 1983; Gelman, 1972, 1977; Ginsburg, 1982; Groen y Resnick, 1977; Ilg y Ames, 1951; Resnick, 1983; Resnick y Ford, 1981; Starkey y Gelman, 1982). En el anterior problema de adición, un niño puede entrar en la serie numérica por el punto especificado por el primer término o sumando (tres) y dar como respuesta el número *siguiente* en la serie numérica: “Cuatro”. En el anterior problema de sustracción, un niño puede entrar en la serie numérica por el punto especificado por el minuendo o cantidad mayor (cinco) y dar como respuesta el número *anterior* en la serie numérica: “Cuatro.” Como el empleo de esta representación mental de la serie numérica para determinar respuestas relacionadas con el número anterior o posterior a otro dado es tan automático, muchos preescolares pueden dar mentalmente, y con rapidez, las respuestas a problemas sencillos con “1”.

La dificultad relativa de problemas 1 + N

¿Por qué Aarón podía resolver problemas $N + 1$, pero no problemas $1 + N$? El concepto informal que tienen los niños de la adición puede hacer que los problemas $N + 1$ sean más fáciles de resolver que los problemas $1 + N$. Como Aarón consideraba que la adición era un proceso aumentativo, interpretaba el problema 3 + 1 = — como tres y *uno más,* cosa que se puede resolver fácilmente contando (“1, 2, 3, 4”) o empleando las relaciones entre un número dado y el que le sigue (“3, 4”). En cambio, interpretaba que 1 + 3 = — era uno y *tres más,* cosa que *no* se puede resolver fácilmente con estos métodos. En otras palabras, como los niños pequeños consideran que la adición es un proceso aumentativo, pueden presentar la tendencia a considerar que $N + 1$ = — y $1 + N$ = — son problemas *diferentes* y la suma consiguiente *no es equivalente.* Por tanto, pueden no darse cuenta de que su método centrado en la relación existente entre un número dado y el que le sigue, que es tan eficaz para responder enseguida problemas de tipo $N + 1$, también es aplicable a problemas de tipo $1 + N$.

Además, los niños sólo llegan a considerar la adición como la *unión* o reunión de dos conjuntos de una manera gradual. Desde este punto de vista, el orden de los números carece de importancia: 3 + 2 = 2 + 3. En otras palabras, la unión de un conjunto de tres objetos con otro de dos, tiene el mismo resultado que la unión de dos objetos y tres objetos. Esta concepción “unionista” de la adición es más abstracta que la concepción aumentativa familiar para los niños pequeños. La comprensión de que el orden de los sumandos no altera la suma en los problemas con “1” puede ser un primer paso muy importante hacia una comprensión más profunda de la adición (Resnick, 1983).

B) ADICIÓN INFORMAL

Procedimientos concretos

Inicialmente, los niños emplean objetos concretos para calcular sumas. A causa de su inmediata disponibilidad, suelen usar los dedos para sumas de hasta 10. Desde el punto de vista del desarrollo, la estrategia más básica es la cuenta concreta global (CC) que se ilustra en la columna .1 de la figura 8.1. Los bloques (u otros objetos que se puedan contar, como los propios dedos) se cuentan uno por uno para representar un sumando; el proceso se repite con el otro sumando. Luego se cuentan todos los objetos para determinar la suma.

Invención de atajos. Los niños inventan espontáneamente atajos para el laborioso procedimiento CC. Uno de los favoritos es la estrategia de «pautas digitales» que se ilustra en la columna 2 de la figura 8.1 (Baroody, en prensa). Nótese que, en esta estrategia, cada sumando se representa con una pauta digital. Así se evita el laborioso proceso de contar los dedos uno por uno para representar cada sumando. Mediante la estrategia de la pauta digital, el niño sólo tiene que contar una vez (para determinar la suma). La estrategia de “reconocimiento de pautas” (Siegler y Robinson, 1982; Siegler y Shrager, 1984), que se ilustra en la columna 3 de la figura 8.1 es aún más económica.

Esta estrategia comporta la creación de pautas digitales para cada sumando para, a continuación, reconocer la suma inmediatamente, quizá de manera visual (mediante una captación directa), quizá cinestésica. Para 4 + 5 = —, por ejemplo un niño puede emplear pautas digitales para representar cada sumando, sentir que se han extendido todos los dedos salvo uno, y responder “9” sin tener que contar.

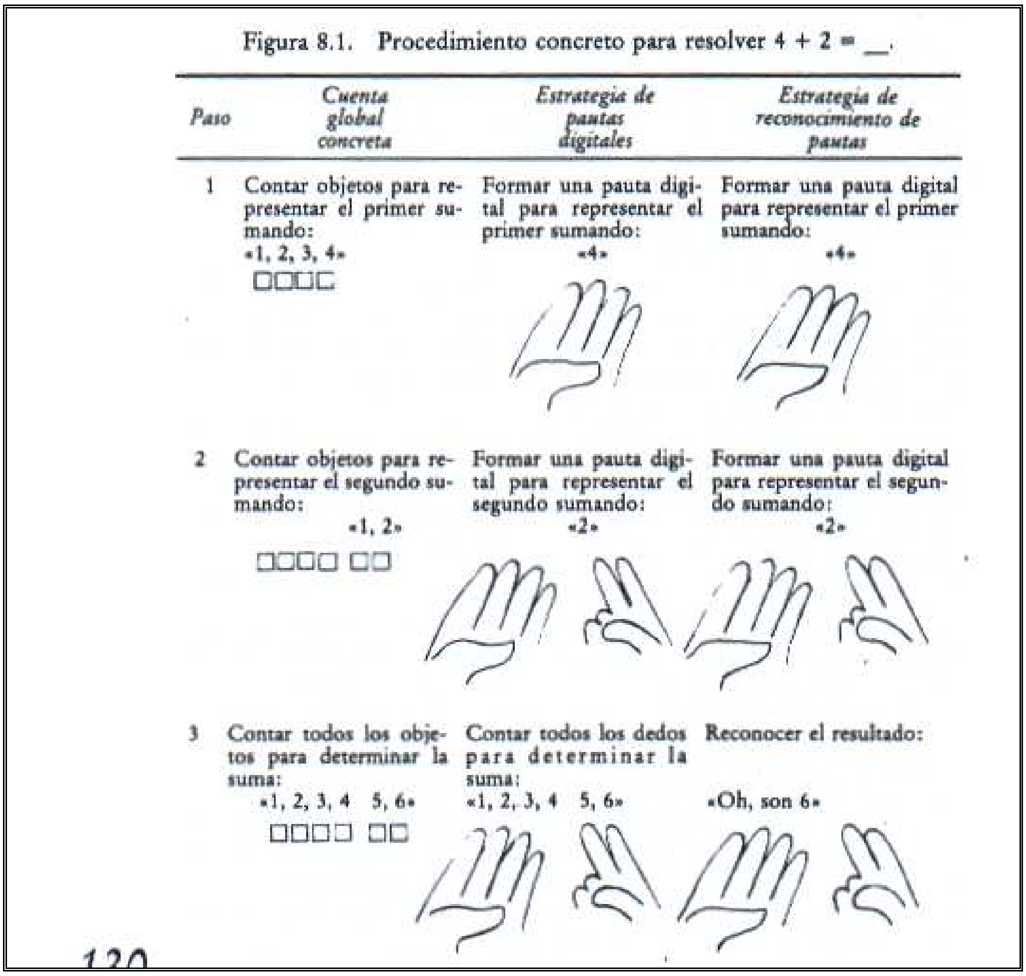

Figura 8.1. Procedimiento concreto para resolver 4 + 2 = __.

Paso	*Cuenta global concreta*	*Estrategia de pautas digitales*	*Estrategia de reconocimiento de pautas*
1	Contar objetos para representar el primer sumando: «1, 2, 3, 4»	Formar una pauta digital para representar el primer sumando: «4»	Formar una pauta digital para representar el primer sumando: «4»
2	Contar objetos para representar el segundo sumando: «1, 2»	Formar una pauta digital para representar el segundo sumando: «2»	Formar una pauta digital para representar el segundo sumando: «2»
3	Contar todos los objetos para determinar la suma: «1, 2, 3, 4 5, 6»	Contar todos los dedos para determinar la suma: «1, 2, 3, 4 5, 6»	Reconocer el resultado: «Oh, son 6»

F) RESUMEN

Antes de dominar las combinaciones numéricas básicas, los niños pueden apoyarse en procedimientos de cálculo basados en contar que, al principio, requieren objetos concretos como los dedos o bloques. Normalmente, los niños tienden de manera natural a emplear procedimientos de contar orales o mentales en el cálculo. También aprenden enseguida a emplear su conocimiento de la serie numérica para responder con eficacia a problemas de tipo $N + 1 =$ — y N — $1 =$ —. La comprensión informal que tienen los niños de la aritmética guía su construcción o invención de procedimientos de cálculo concretos y mentales. Como los niños contemplan la adición como añadir *más a* algo, los problemas conmutados como 5 + 1 y 1 + 5 ó 3 + 5 y 5 + 3, se ven como problemas distintos. Como resultado, los niños pueden sentirse obligados a calcular la suma de 1 + 5 aun cuando sepan que 5 + 1 = 6. Los niños descubren pronto que $1 + N$ y $N + 1$ producen la misma suma y que la eficaz regla del número siguiente a otro dado se aplica por igual a $1 + N$ y a $N + 1$. Llegado el momento, los niños aprenden que el orden de los sumandos tampoco altera el resultado de los problemas $N + M$ (por ejemplo, .3 + 5 = 5+ 3). El cálculo mental es cognoscitivamente exigente porque los niños deben tener presente hasta cuándo deben contar cuando cuentan. Por tanto, cuanto mayores sean los términos que intervengan en un problema más complicado será el procedimiento para llevar la cuenta, y para los niños es un verdadero aliciente inventar nuevos procedimientos de cálculo que minimicen este trabajo mental. Así pues, tanto los factores conceptuales como los no conceptuales desempeñan su papel en el desarrollo de procedimientos informales de cálculo. Las dificultades con el cálculo informal pueden producirse porque las técnicas para contar o para llevar la cuenta que intervienen en el mismo no son adecuadas ni eficaces.