Serie Didácticas

Didáctica de la Matemática

Enseñar Matemática

Liliana Cattaneo
Noemí Lagreca
María Inés González
Noemí Buschiazzo

HomoSapiens Ediciones

Serie Didácticas

Didáctica de la
Matemática

Enseñar Matemática

Liliana Cattaneo
Noemí Lagreca
María Inés González
Noemí Buschiazzo

HomoSapiens
EDICIONES

Didáctica de la matemática : enseñar matemática, enseñar a enseñar matematica /
Liliana Lagreca de Cattaneo ... [et.al.]. - 1a ed. - 1a reimp. - Rosario:
Homo Sapiens Ediciones, 2011.
180 p. ; 21x15 cm. - (Serie Didácticas dirigida por Fernando Avendaño)

ISBN 978-950-808-615-0

1. Formación Docente. 2. Matemática. I. Lagreca de Cattaneo, Liliana
CDD 371.1

1ª edición, mayo de 2010
1ª reimpresión, marzo de 2011

DÍDACTICA DE LA MATEMÁTICA
Enseñar Matemática

© 2010 · **Homo Sapiens Ediciones**
Sarmiento 825 (S2000CMM) Rosario | Santa Fe | Argentina
Telefax: 54 341 4406892 | 4253852
E-mail: editorial@homosapiens.com.ar
Página web: www.homosapiens.com.ar

Queda hecho el depósito que establece la ley 11.723
Prohibida su reproducción total o parcial

ISBN N° 978-950-808-615-0

Esta tirada de 1000 ejemplares se terminó de imprimir en marzo de 2011
en **ART de Daniel Pesce y David Beresi SH.** | San Lorenzo 3255
Tel. 0341 4391478 | 2000 Rosario | Santa Fe | Argentina

Índice

Presentación

La *Serie Didácticas* se suma a la impostergable tarea de contribuir al mejoramiento de la calidad de la enseñanza. Es decir, constituye una "propuesta de recursos fundamentados" para fortalecer la formación de los educadores, pensada para aportar a la adquisición, el descubrimiento y la construcción de los saberes priorizados en los diferentes campos disciplinares de los currículos actuales.

Nuestra pretensión es que se convierta en una ayuda para las tareas de planificación, planteamiento de estrategias y evaluación de los alumnos y del propio proceso de enseñanza, a la vez que se vuelva una herramienta eficaz para resolver los problemas con que nos enfrentamos diariamente en nuestro quehacer educativo.

Entendemos que se trata de un proyecto que jerarquiza las ofertas y los recursos puestos al alcance de los docentes –pues presenta los avances, tanto en la investigación disciplinar como en la pedagógica y didáctica–, elaborado por reconocidos profesores. Proyecto que cuenta con una sólida fundamentación teórico-metodológica, pero, a la vez, con un lenguaje directo y claro, con abundantes ejemplos extraídos de la realidad de las clases, y con propuestas directamente aplicables en el aula, que permitirán diversificar el tipo de actividades que habitualmente llevamos a cabo en nuestro trabajo.

La propuesta intenta responder a la constante actualización científica y didáctica de quienes estamos implicados cotidianamente en la educación de nuestros alumnos, pero también incluye la consideración de la enseñanza de las disciplinas en las aulas de formación de docentes, sugiriendo nuevas iniciativas, invitando a la indagación permanente y brindando formas prácticas y operativas de aplicar los principios de renovación que alejan el ejercicio de nuestra profesión de una rutina tan previsible como aburrida.

Esta serie, que atiende una amplia variedad de temas de viva actualidad, está dirigida, en suma, a todos los colegas –sensibles hacia esa dimensión creativa que debe rodear el proceso didáctico– buscadores de criterios propios y amplios para incorporar a sus programas, sus clases y los materiales que elaboran.

Esperamos que nuestras metas se cumplan.

PROF. FERNANDO AVENDAÑO
Director

Prólogo

En este libro que hemos titulado *Didáctica de la Matemática*, queremos plantear cuestiones que aluden a la tarea de enseñar Matemática. Por esta razón está dirigido a docentes, estudiantes de profesorado y a profesores formadores de docentes.

El nombre del texto involucra dos términos: Didáctica y Matemática.

De la Matemática sabemos:

- Que es una ciencia.
- Que nos molesta que la llamen “dura” ya que es dinámica y cambiante.
- Que es una actividad casi tan antigua como la humanidad misma.
- Que ha sido guía del pensamiento filosófico.
- Que ha crecido y seguirá creciendo a partir de bases sólidas y milenarias.
- Que es parte de la vida cotidiana y, a su vez, de los más complejos desarrollos y descubrimientos que en su faz de creación escapan del hombre común.

La lista es incompleta. Cada uno de nosotros, seguramente, puede decir algo más.

La definición de Matemática más antigua y más conocida la presenta como:

la ciencia del número y de la extensión ya que el estudio de la Matemática se centraba en dos aspectos fundamentales:

- La Aritmética
- La Geometría (estudio de la extensión)

Esto da cuenta de sus orígenes pero más adelante aparecerán, entre otras ramas:

- El Álgebra
- El Cálculo
- La Probabilidad y la Estadística
- La Lógica Matemática.

En nuestro accionar diario en el aula o en las reuniones con otros docentes, pocas veces nos preguntamos sobre la Matemática misma pero sí nos sorprendemos y nos entusiasmamos cuestionándonos lo realizado en la tarea de enseñar. De esta manera, las preguntas que generalmente surgen dando lugar a debates inconclusos no son: ¿qué es un número racional?, ¿qué es un poliedro regular? Son, por ejemplo: ¿cómo aprenden Matemática los chicos?; ¿cuál será una buena estrategia para enseñar este tema?; ¿estará bien la idea de desarrollar tales contenidos antes que estos otros?; ¿qué "pregunto" en la evaluación para saber si logró las competencias requeridas?; ¿qué significa profundizar este contenido?; ¿cómo hago para que aprendan esto?; ¿cómo hago para que esto les guste?; ¿cuáles son los saberes previos para introducir este tema?; ¿cómo trabajo con los alumnos con dificultades?; ¿cómo enseño en el marco de un aprendizaje constructivo?

Cada uno de nosotros intervino, seguramente, para tratar de resolver alguna de estas cuestiones basándose en la experiencia personal o en la intuición o en la influencia de quienes nos formaron o de quienes, en cada momento histórico, produjeron teorías innovadoras. Sin embargo, los marcos teóricos que ayudan a elaborar respuestas a estos interrogantes existen y deberán poder ayudarnos. Cuando estas inquietudes se hacen carne en nosotros estamos interesados en la **Didáctica.**

En este marco nuestros objetivos consisten en abordar la enseñanza y el aprendizaje de contenidos del área en el nivel primario desde una perspectiva que permita una propuesta de actividades ágil, que conduzca rápidamente a lograr un manejo seguro, útil, significativo y, en definitiva, inteligente de los mismos. Lo hacemos bajo el convencimiento de que:

> *los alumnos deben aprender Matemática haciendo Matemática, recorriendo, en lo posible, el mismo camino que la ciencia siguió en su evolución histórica y enfrentando los mismos problemas que impulsaron dicha evolución*

Toda vez que hagamos referencia a la tarea de enseñar, surgirá naturalmente en estrecha vinculación la tarea de aprender. Por esta razón, todas las cuestiones se analizarán en el contexto de su transposición didáctica y en el marco de la actividad en el aula. Creemos que la tarea de enseñar enfrenta hoy desafíos muy significativos que van desde la necesidad de un conocimiento profundo de los marcos teóricos hasta un manejo de las formas en las que esos conocimientos llegan a ser capitalizados por los alumnos de un modo motivador y significativo. Todo esto está transversado por el desarrollo tecnológico que influye tanto en los marcos teóricos como en los procesos relativos al quehacer en el aula.

No somos indiferentes a la situación que caracteriza a la educación matemática hoy y creemos, además, que no existen recetas mágicas que puedan trasladarse al aula para reafirmar logros positivos y resolver aspectos negativos de manera mecánica. Es por esto que nos proponemos, a través de este texto, crear espacios de debate y reflexión sobre ideas muy difundidas entre los docentes, como “constructivismo”, “competencia matemática”, “aprendizaje autónomo”, “soporte informático en el aprendizaje”.

La presente publicación se estructura en dos partes.

- En la primera proponemos temas pensados para ser trabajados durante el proceso de formación o perfeccionamiento de los docentes y que procuran dar un marco teórico a la tarea de enseñar.

- En la segunda presentamos el desarrollo didáctico y el marco teórico que caracterizan a los tres campos que distinguimos en el área:
  – El campo de los conjuntos numéricos.
  – El campo de las figuras del plano y del espacio.
  – El campo de las mediciones.

En ambas partes planteamos: desarrollos teóricos, situaciones de reflexión para el docente lector, problemas para los alumnos, comentarios históricos y situaciones de enseñanza y aprendizaje de desarrollo áulico. En las mismas podrá encontrar con frecuencia el ícono 🕮, con el cual hacemos referencia a uno o a varios libros sugeridos en la Bibliografía.

No podemos dejar de mencionar que lo expuesto en este texto es el fruto de años de experiencia en el aula y del aporte que muchos docentes nos han hecho llegar con sus comentarios y evaluaciones. A todos estos docentes les agradecemos desde aquí su positiva colaboración.

Las autoras

PRIMERA PARTE

Enseñar Matemática

1. Competencias matemáticas
2. El proceso de enseñar y aprender en Matemática
    2.1. Formas de pensar en Matemática
        2.1.1. *La construcción del conocimiento*
        2.1.2. *La evolución del pensamiento en el aprendizaje de la Matemática*
    2.2. Del razonamiento inductivo al deductivo
        2.2.1. *La tarea de descubrir regularidades*
        2.2.2. *La demostración en la enseñanza de la Matemática*
    2.3. La fuerza de los conceptos en Matemática
        2.3.1. *La significatividad de los conceptos*
        2.3.2. *El respeto por las definiciones*
3. La resolución de problemas
4. La era tecnológica y la enseñanza de la Matemática

1. Competencias matemáticas

Es común, actualmente, escuchar o leer que el objetivo general de la educación matemática es lograr que: *el alumno sea "competente" en el área*. Es entonces preciso, para organizar nuestra tarea docente, clarificar qué entendemos por ser competente en Matemática. Numerosa bibliografía se refiere a este tema. A título de ejemplo aludimos a lo expuesto al respecto en el Proyecto Pisa de 2006 🕮:

> *Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.*

En este sentido, en el proyecto se explicitan los siguientes tipos de competencias matemáticas: *pensar y razonar; argumentar; comunicar*; *construir modelos; plantear y resolver problemas; representar; utilizar un lenguaje simbólico, formal y técnico; utilizar herramientas de apoyo.*

En esta publicación argumentaremos sobre esta idea de competencia en Matemática con la expectativa de contribuir a generar espacios de discusión, reflexión y enriquecimiento mutuo acerca del sentido que debemos dar a la expresión "ser competente en Matemática".

La idea de ser competente en Matemática lleva, en general, a pensar en ser capaz de hacer Matemática, pero…

¿Qué significa que un alumno sea capaz de hacer Matemática?

Significa que sea capaz de:

- Aprender constructivamente conceptos.
- Elaborar procedimientos sobre la base de los conceptos, que permitan desarrollar algoritmos.

- Comunicar con distintos tipos de lenguajes (gráfico, simbólico y coloquial) los resultados de las tareas matemáticas que realiza, explicando, argumentando y justificando sus procedimientos.
- Resolver problemas.
- Utilizar diversos recursos tecnológicos que agilicen y favorezcan especialmente los desarrollos mecánicos y de precisión.

A través de diferentes situaciones veremos qué significado revisten las acciones mencionadas. Tratemos la primera: *Aprender constructivamente conceptos.* Para explicitar qué entendemos por la misma utilizaremos como marco de referencia una operación entre naturales: el múltiplo común menor, cuyo aprendizaje y aun su algoritmo y aplicación suelen ser dificultosos.

Es conocido que, en general, los alumnos encuentran dificultades al abordar este tema en todos los aspectos antes mencionados. La comprensión del mismo supone entender las tres palabras que integran su nombre:[1] un sustantivo y dos adjetivos: múltiplo, común y menor. Analicemos cada una de ellos.

El sustantivo: **múltiplo**, permite entender que se trata de un múltiplo de los números dados.

Recordemos que:

*Un número natural **a** es múltiplo de otro número natural **b***
*si existe un número natural **n** tal que **a** = **b.n***

Así, 15 es múltiplo de 5 pues existe 3 tal que 3.5=15

La simple idea de múltiplo encierra numerosas ideas previas que debieron ser conocidas y comprendidas conceptualmente al trabajar la noción de multiplicación entre números naturales. Por ejemplo, cuando en el primer ciclo se trabaja la misma, aparecen multiplicaciones como: 2x4=8; 7x8= 56. Consideramos que este es el momento oportuno de plantear que:

1. Es oportuno mencionar que, históricamente, a este tema se lo llamaba: mínimo común múltiplo, no respetando la estructura lingüística castellana, lo que dificultaba aún más su comprensión, pues se le daba mayor importancia al primer adjetivo (mínimo). Este nombre había surgido de la traducción literal del inglés donde los adjetivos preceden al sustantivo.

8 es múltiplo de 2 y de 4
56 es múltiplo de 7 y de 8.

De la idea de múltiplo surgirán propiedades como, por ejemplo: Un *múltiplo de un número es mayor o igual que éste.*

Los adjetivos: **común** y **menor**, deben ser comprendidos en su aspecto conceptual en el área matemática. Así,

- **Común**: se refiere a que es múltiplo de los dos números dados simultáneamente.
- **Menor**: hace notar que de todos los posibles múltiplos comunes es el "más pequeño".

La capacidad para comprender el concepto de *múltiplo común menor* implica ser competente en la comprensión de los conceptos que lo integran. Por ello es necesario que al trabajar estas ideas, en etapas anteriores, se lo haga con el rigor necesario para producir su integración conceptual.

Hemos aludido, hasta el momento, al manejo del concepto de la operación. Esta competencia es imprescindible pues, a partir de ella, la construcción de algoritmos para su resolución será un proceso de autoconstrucción, creativo, libre y que solo se reducirá a lograr estrategias que permitan encontrar el número menor entre los múltiplos comunes de los dos dados. El alumno será competente para autoaprender, en este caso para construir un algoritmo (no significa que construya el que nos enseñaron en la escuela a las generaciones del siglo XX).

En este caso,

¿cómo puede un alumno construir un algoritmo de cálculo?

Lo mostraremos resolviendo el siguiente problema:

Buscar el múltiplo común menor de 36 y 16

Veamos qué estrategias puede elaborar un alumno con la aplicación de los conceptos y el uso de su calculadora. El pensamiento del alumno puede ser el siguiente:

Debo buscar el menor múltiplo de 36 que sea
también múltiplo de 16

Pero, ¿cómo lo hace? Utiliza la propiedad: un número es múltiplo de otro si la división del primero por el segundo tiene resto 0, propiedad que se traduce en la calculadora exhibiéndose en el visor un cociente no entero al hacer la división.

Explicitemos el procedimiento.

- Sabe que el número a buscar debe ser mayor o igual que 36.
- Efectúa la división: 36:16 y observa que el cociente no es un número entero. Luego 36 no es múltiplo de 16.
- Busca el siguiente múltiplo de 36 (36x2=72)
- Efectúa la división: 72:16 y observa que el cociente no es un número entero. Luego 72 no es múltiplo de 16.
- Busca el siguiente múltiplo de 36 (36x3=108)
- Efectúa la división: 108:16, y observa que el cociente no es un número entero. Luego 108 no es múltiplo de 16.
- Busca el siguiente múltiplo de 36 (36x4=144)
- Efectúa la división: 144:16 y observa que el cociente es un número entero. Luego, como el cociente da entero, 144 es múltiplo de 16. Como es simultáneamente múltiplo de 36, **144** es el número buscado.

¡El alumno ha encontrado la respuesta!

Observemos que este algoritmo implica replantearnos el significado del uso de la calculadora en el aula.

Para reflexionar

> *¿El alumno debe registrar en el papel estos cálculos?, ¿cómo debe actuar el maestro en el caso de que el alumno no haga registro de sus cálculos y lo resuelva únicamente con la calculadora sin escribir más que el resultado?*

Veamos cómo podría construirse otra estrategia, tal vez más relacionada con los procedimientos tradicionales:

Como el múltiplo común menor entre 36 y 16 ($mcm(36,16)$) es el menor de los múltiplos comunes entre 36 y 16, procedemos así:

- Buscamos, independientemente, los múltiplos de 36 y de 16 hasta encontrar el menor de todos los múltiplos comunes a estos números (naturalmente que para buscar los múltiplos podemos utilizar una calculadora).

  Es decir, buscamos:

  $M_{36} = \{36;72;108;144;180\ldots\}$

  $M_{16} = \{16;32;48;64;80,96;112;128;144;160\ldots\}$

  Es simple observar que el menor número que pertenece a ambos conjuntos es 144.

  $M_{36} = \{36;72;108;144;180\ldots\}$, $M_{16} = \{16;32;48;64;80,96;112;128;144;160\ldots\}$

  Por lo que el

$$mcm(36;16) = 144$$

¡Qué útil resultó la forma de escritura que nos brinda la teoría de conjuntos![2]

Para reflexionar

> *En esta forma de resolución, para explicar y comunicar el algoritmo, es necesario haber logrado previamente competencia en la comunicación matemática, lo que supone el empleo de todos sus tipos de lenguaje.*

Observemos que en las estrategias propuestas hemos ponderado el cálculo mecanizado. Nuestra idea al respecto es valorar el uso inteligente de los instrumentos tecnológicos, lo que implica, naturalmente, una resignificación de los contenidos conceptuales.[3] En particular, en este caso, saber usar una calculadora de bolsillo no es suficiente para resolver el problema.

Si bien hemos propuesto dos estrategias de solución, sabemos que son múltiples los caminos que permiten al alumno ser competente en construir algoritmos adecuados para esta situación.

Ya mencionamos anteriormente que no era necesario que el alumno descubriera el algoritmo que tradicionalmente y desde hace tiempo se utiliza en la escuela primaria. Por eso lo que sigue tiene "una dosis de nostalgia". Recordemos que, en no muy lejanos tiempos, cuando egresamos de la escuela primaria, nosotras y una parte importante de nuestros lectores, memorizábamos el siguiente algoritmo:

El múltiplo común menor de dos números es el producto de los factores primos comunes y no comunes tomándolos una sola vez con su mayor exponente

---

2. La teoría de conjuntos nos da una herramienta perfecta para expresarnos simbólicamente con sentido y exactitud.
3. Ver capítulo "La era tecnológica" de este libro.

Por supuesto que, repitiendo este procedimiento en "muchíiiiiiisimos" ejemplos, lográbamos su mecanización, por lo menos por un tiempo. No creemos que supiéramos por qué hacíamos esos cálculos.

¿Cuál es nuestra reflexión frente a situaciones como esta?

Consideramos que si el alumno, en el trabajo conjunto con el docente, construye el algoritmo enunciado, éste será una herramienta útil aunque no imprescindible. Si posee la competencia conceptual para deducirla, no necesitará mecanizarla para utilizarla. En síntesis, creemos oportuno el empleo de este algoritmo u otro semejante siempre y cuando se enmarquen en el proceso constructivo de aprendizaje de los mismos.

Al aludir al significado de ser competente en Matemática nos hemos referido también a la competencia de "elaborar procedimientos sobre la base de los conceptos, que permitan resolver problemas". Daremos significado a esta cuestión, mostrando cómo resolvió un problema un alumno de séptimo grado y exhibiendo, previamente, las competencias necesarias, las dificultades con que la mayoría de los alumnos se enfrentaron y los planteos que hicieron cuando concluyeron la lectura del mismo.

El problema planteado fue:

Una fábrica de alfajores debe programar una máquina envasadora. Se puede seleccionar un solo tipo de envases entre estos tres posibles: envases de 6, 12 ó 24 unidades.

El número de alfajores que se debe envasar es tal que, para que no queden unidades sueltas, se puede elegir solo el envase de 6 unidades.

Se dispone de más de 460 unidades pero menos de 500.

a) ¿Cuáles son las posibles cantidades de las que se dispone?

b) En cada uno de los casos, ¿cuántas cajas de 6 unidades se podría llenar?

Su resolución supone las siguientes competencias básicas:

- Haber aprendido constructivamente el concepto de múltiplo común menor.
- Poder comunicar en lenguaje simbólico lo que está expresado en lenguaje coloquial.
- Ser capaz de elaborar algoritmos de cálculo.

Algunas de las dificultades que los alumnos pusieron de manifiesto al intentar resolver el problema, estuvieron enfocadas en:

- la comprensión lectora (comprender, por ejemplo, que la expresión: *para que no queden unidades sueltas, se puede elegir solo el envase de 6 unidades* significa que el o los números a buscar deben ser múltiplos de 6 y no de 12 ni de 24),
- poder construir un algoritmo de cálculo no rutinario, ajeno a la búsqueda del múltiplo común menor entre 6, 12 y 24,
- descubrir y admitir que hay más de un número que es solución de la primera pregunta del problema y que tales números pueden buscarse por caminos diversos, tal vez no convencionales,
- interpretar la multiplicidad de interrogantes planteados en el mismo problema. Es decir, comprender que el problema no concluye cuando se encuentran las posibles cantidades de alfajores.

Presentamos ahora los planteos más comunes que hicieron los alumnos cuando se les propuso el problema:

- *¿Qué tengo que hacer?*
- ¡*Nunca hice nada parecido*!
- *¿Es de mcm o de dcm?*
- ¡*No comprendo la consigna*!

Hemos marcado hasta aquí las competencias necesarias y las dificultades más frecuentes en la resolución del problema así como algunos planteos que los alumnos realizaron apenas lo leyeron. Presentamos, por último, la resolución del mismo realizada por un alumno de séptimo grado.

x número de alfajores

$460 < x < 500$

$x \in M_6$ y $x \notin M_{12}$ y $x \notin M_{24}$

$x \in M_6$	$x \in M_{12}$	$x \in M_{24}$	cumplen
462	No	No	Sí
468	Sí	No	No
474	No	No	Sí
480	Sí	Sí	No
486	No	No	Sí
492	Sí	No	No
498	No	No	Sí

a) cantidades posibles son: 462 - 474 - 486 - 498

b) cantidades de cajas:

462:6=77

474:6=79

486:6=81

498:6=83

Hubo alumnos que no pudieron encarar o resolver el problema. ¿Por qué? Creemos que porque no han desarrollado las competencias básicas para hacerlo (lectura comprensiva, manejo del significado de términos, comprensión de los conceptos utilizados, etc.). El logro de estas competencias requiere de un intenso y casi continuo trabajo, desde las etapas más tempranas de escolarización.

No es con “recetas” que se resuelven problemas. No es cuestión de hacer muchos pseudos problemas de un tema con la misma dificultad para que el alumno adquiera un uso significativo del mismo. No son suficientes las “recetas” ni los “problemas tipo”. Necesitamos más, son necesarios disparadores de reflexiones, que pongan en funcionamiento las competencias desarrolladas, problemas de “choque“ como el presentado, que desestabilizan al alumno y le muestran la necesidad de ir más allá de meras recetas.

Es probable que si planteamos con frecuencia pequeños desafíos, fácilmente superables, contaremos con una actitud positiva de los alumnos, con el placer por aprender y no con la idea de que hacer Matemática implica una tarea rutinaria, llena de recursos memorísticos. Muy probamente, dejaremos de lado la concepción de que la Matemática es solo para unos pocos iluminados…

2. El proceso de enseñar y aprender en Matemática

2.1. **Formas de pensar en Matemática**

2.1.1. *La construcción del conocimiento*

Las preguntas "¿cómo enseñan los docentes?", "¿cómo aprenden los alumnos?" han sido siempre preocupación de docentes, pedagogos y psicólogos. En la actualidad sabemos que la construcción de los conocimientos da lugar a la existencia de un real aprendizaje. Al respecto podemos leer:

> *el proceso de aprendizaje del alumno debe basarse en su propia actividad creadora, en sus descubrimientos personales, en sus motivaciones intrínsecas, debiendo ser la función del profesor la de orientar, guiar; animar, pero no la de fuente fundamental de información*[4]

Estas son bases psicopedagógicas de una concepción constructivista del aprendizaje. Concepción basada en las investigaciones de Piaget en relación a cómo pasa un sujeto de un estado de conocimiento a otro de mayor conocimiento y cómo cambia su estructura de pensamiento según su edad.

4. Martínez Recio y otros (coord.). (2004) "Matemáticas: Cultura y aprendizaje" en *Revista Nº 16.*

A principio de los años 70, psicólogos, pedagogos y matemáticos comienzan a preocuparse por cuestiones no tenidas en cuenta hasta el momento. Así, por ejemplo, no solo atienden la pregunta

¿Cómo aprenden Matemática los alumnos?

sino que intentan dar respuesta a

¿Cómo aprenden Matemática los alumnos en las escuelas?

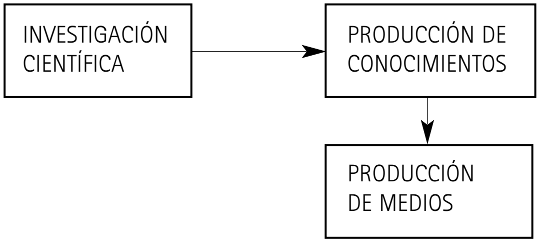
destacando en ésta no solo cómo se enseña sino el lugar dónde dicha enseñanza se realiza.

Surge, con el aporte de la Psicología, la Pedagogía y la Matemática, al que se incorporan luego los de otras disciplinas como la Sociología y la Antropología, **la Didáctica de la Matemática**.

Durante los últimos veinte años, la Didáctica de la Matemática se ha desarrollado como área de investigación donde se ligan las cuestiones específicas de la Didáctica con las específicas de la Matemática.

El avance sobre los marcos teóricos de la Didáctica de la Matemática tuvo su origen en los IREM (Instituto de Investigación sobre la Enseñanza Matemática) creados en Francia a fines de los años 60). Al comienzo, estos institutos se dedicaron a complementar la formación matemática de los maestros, incidiendo sobre la preparación de los mismos, en la revisión de los programas de estudio y en la producción de material de trabajo y estudio o de juegos didácticos. Es decir, hay una gran actividad destinada a la producción de medios para actuar sobre la enseñanza.

La iniciativa avanza a la producción de conocimientos para construir los medios antes mencionados, planteándose, entonces, la investigación científica de los procesos que tienen lugar en la enseñanza de la Matemática.



Durante los años setenta en Francia, Guy Brousseau, quien se sitúa dentro de una perspectiva constructivista, propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en la clase basándose en las hipótesis de Piaget en relación al aprendizaje por adaptación a un medio. Guy Brousseau define como objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática a las situaciones didácticas consideradas como:

Un conjunto de acciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos en un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) en la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber construido o en vía de construcción.

Estas relaciones se establecen a través de lo que se conoce como "**contrato didáctico**", que establece las reglas de funcionamiento y que tiene componentes explícitos e implícitos. El contrato didáctico es, dicho de otra manera, el conjunto de relaciones que se generan en toda relación de enseñanza entre docentes, saber y alumnos y que pueden estar explicitadas o no. El análisis del funcionamiento cognitivo del alumno no se puede llevar a cabo sin tener en cuenta el contrato didáctico que se pone en juego. A partir del contrato didáctico los integrantes del proceso educativo pueden asignar compromisos y responsabilidades, plazos o actividades, tiempos, utilización o no de recursos, etc.

Podemos interpretar, entonces, una situación didáctica como una cadena de actividades para el alumno que apunta al aprendizaje de conocimientos nuevos. Estas tareas deben estar bien planificadas de modo que el trabajo al que den lugar produzca el aprendizaje del conocimiento o los conocimientos previstos. Para que esto suceda, la organización de las actividades debe permitir al alumno reforzar conocimientos previos, poder recurrir a ellos, afinar el vocabulario matemático, descubrir estrategias de trabajo, abordar los problemas que se le van presentando y, por sobre todo, lograr que el aprendizaje nuevo al que se apunte aparezca como una necesidad.

En las actividades que se propongan para una situación didáctica deberemos ser muy cuidadosos. La calidad en la redacción de las actividades es fundamental. Estas deben dejar evidenciadas las tareas a realizar sin dejar dudas. Los enunciados deben ser claros y precisos. A partir de los mismos el alumno deberá reconocer las tareas a desarrollar.

Para las situaciones didácticas que propone Brousseau en sus investigaciones la secuencia de situaciones es:

ACCIÓN	FORMULACIÓN	VALIDACIÓN	INSTITUCIONALIZACIÓN

entendiendo por cada una de estas situaciones lo siguiente:

En las situaciones de **acción** se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones necesarias para realizar su actividad de resolución del problema planteado.

Las situaciones de **formulación** permiten la comunicación de informaciones entre los alumnos. Para esto es necesario construir un lenguaje oral y escrito. Es decir, deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

En las situaciones de **validación** se trata de convencer a uno o varios de los interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. Los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones.

Las situaciones de **institucionalización** están destinadas a puntualizar los conocimientos que el alumno debe retener, a dar valor de conocimiento matemático a los nuevos conocimientos, para que puedan ser empleados en nuevos problemas. El docente realiza, en esta etapa, una síntesis de lo propuesto.

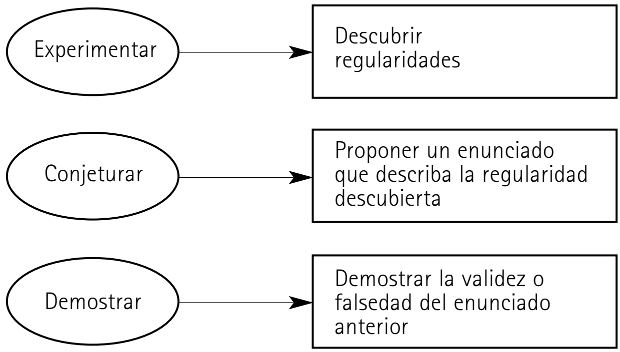
En todo el trabajo de Brousseau se advierte la influencia del epistemólogo G. Bachelard, quien afirma que el conocimiento científico se construye como respuesta a preguntas. Más aún, si no existen las preguntas no hay construcción.

2.1.2. *La evolución del pensamiento en el aprendizaje de la Matemática*

Enseñar es una tarea que implica conocer "cómo se aprende" en las distintas etapas de la educación. En particular, enseñar Matemática implica también saber cómo se construye el conocimiento a partir de percepciones intuitivas hasta la construcción de conceptos e ideas en la etapa del pensamiento formal. Implica saber cómo evoluciona el pensamiento matemático en el niño, cómo y cuándo posee la capacidad de inducir, en qué momento y cómo puede deducir, cuándo y cómo debe comenzar a probar resultados. Por ejemplo: no es lo mismo aprender la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma en las primeras etapas de la escolarización (conocimiento imprescindible para descubrir y construir algoritmos de cálculo) que trabajar su formalización, en etapas posteriores.

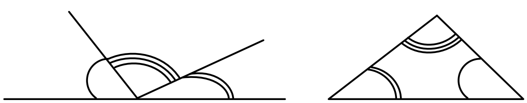
Estas ideas nos permiten ir construyendo las formas de enseñanza y de aprendizaje que tenemos que plantear en cada etapa y con cada alumno.

Los momentos en los que se aborda el aprendizaje parten desde los primeros pasos de la construcción del conocimiento con la elaboración de conjeturas, con la experimentación, hasta llegar a la validación necesaria en etapas del pensamiento formal. Resumimos estas ideas en el diagrama.



Para ilustrar lo anterior consideremos el siguiente tema: suma de los ángulos interiores de un triángulo. A partir de la visualización, experimentando con papeles y tijeras y recurriendo al recorte o plegado se puede conjeturar que *la suma de los ángulos interiores de un triángulo da un ángulo llano.* Con esto no se llegó a la tercera etapa, la de demostrar, que, en este caso, puede quedar para los últimos años de la educación primaria.

En el transcurso de la etapa de experimentación se puede disparar más de una idea, y aunque a veces no es la que estamos pretendiendo que nuestros alumnos alcancen, a todas hay que considerarlas. Más aún, el trabajo anterior puede llevar a realizar el proceso inverso: *construir un triángulo a partir de un ángulo llano*. ¿Cómo puede lograrse? Una forma es: descomponer un ángulo llano en tres ángulos cualesquiera del mismo vértice y formar con estos tres ángulos un triángulo de modo que cada uno de los ángulos sea un ángulo interior del triángulo.



La conjetura obtenida sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo puede ser verificada mediante el empleo de adecuados instrumentos de medición o más aún por el uso de algún software apropiado. Aunque esto se realice, es el docente quien deberá dar la última palabra, es decir, es el docente quien institucionalizará este conocimiento.

Estos primeros aprendizajes se enmarcan en la etapa intuitiva. El alumno obtiene conclusiones válidas respecto a los elementos con los que ha trabajado (en este caso los triángulos utilizados) en casos particulares y de estos conjetura para cualquier triángulo. Falta entonces la generalización. Falta, en nuestro caso, validar que para *cualquier* triángulo la conjetura es cierta, validación que supone el desarrollo de la etapa lógica.

En general el aprendizaje y la enseñanza fueron evolucionando a través del tiempo desde la etapa intuitiva a la lógica.

Cabe observar que la etapa lógica no debe dejar de lado la intuitiva ya que sin su apoyatura es muy difícil no solo encarar una demostración, sino también conjeturar nuevas propiedades. La riqueza de la intuición es, seguramente, un motor de la Matemática; frenarla supone también frenar los avances en la Matemática misma. Ambos momentos del conocimiento pueden considerarse fases del desarrollo del pensamiento.

Para que los alumnos se desempeñen adecuadamente en cualquier etapa del aprendizaje son fundamentales dos cuestiones:

- Que la etapa sea acorde al nivel cognitivo del alumno
- Que la etapa lógica se aborde a partir del dominio de la etapa intuitiva

Observemos, además, que el desarrollo del pensamiento lógico supone actividades que no necesariamente implican la de "demostrar". Podemos desarrollar dicho pensamiento sin "pasar" necesariamente por demostraciones formales y rigurosas. Cuando hablamos de un pensamiento lógico en el nivel primario, no nos referimos en particular al razonamiento lógico deductivo, donde nos independizamos de lo concreto para apoyarnos solo en las formas de los razonamientos; estamos hablando de ese razonamiento que pretendemos posean nuestros alumnos para poder argumentar, para poder defender posturas, para validar sus resultados. En síntesis, esos razonamientos que hacen que digamos “este chico razona bien”.

Lo dicho está sujeto también a las fuentes y formas de estimulación a las que los niños acceden o aquellas que se les proporcionan durante la enseñanza primaria. Investigaciones al respecto permiten afirmar que: los niños estimulados tempranamente tienen una mejor repuesta para el aprendizaje de nuevos conocimientos; que los estímulos ofrecidos en la sociedad en que se desenvuelven tienen relación directa con la rapidez y el tipo de aprendizaje al que accede; y que la estimulación sistemática y adecuada contribuye a desarrollar sus potencialidades.

2.2. **Del razonamiento inductivo al deductivo**

2.2.1. **La tarea de descubrir regularidades**

La tarea de descubrir regularidades, patrones que verifican los objetos matemáticos y que permiten modelizar situaciones, forma parte del quehacer matemático. Los enunciados de los actuales diseños curriculares hacen presente este hecho.

Tal es así que nuestros alumnos se inician en esta tarea desde sus primeros pasos en Matemática y continúan, con actividades de complejidad creciente, en los niveles posteriores.

Este trabajo, sobre el descubrimiento de patrones, constituye el primer paso para comprender conceptos tan importantes como el de función, entre otros, cuya aplicación como instrumento de modelización permite el desarrollo de temas como: *regla de tres, fórmulas de cálculo de perímetros, superficies y volúmenes, concepto de múltiplo de un número natural,* entre otros, formando parte del bagaje de conocimientos que se trabaja hoy en la educación primaria.

La tarea de buscar regularidades partiendo de hechos particulares caracterizó el accionar matemático en su etapa inicial. Así, por ejemplo, por medio de la observación de que un método específico funcionaba para cierto tipo de problemas, los babilonios y los egipcios concluían que el mismo funcionaría para cualquier tipo similar de problema.

El razonamiento por analogía, que consiste en concluir, de la semejanza en algunos aspectos de ciertos objetos, su semejanza con otros, fue el instrumento de descubrimiento en Matemática. La historia de la Matemática suministra numerosos ejemplos de progresos importantes realizados gracias al descubrimiento de analogías entre hechos que hasta entonces parecían independientes.

Las conclusiones obtenidas a partir de la búsqueda de regularidades reciben el nombre de conjeturas.

Una conjetura es una suposición fundamentada en la observación repetida de un patrón o proceso particular.

La forma de razonamiento que permite a partir de observaciones repetidas y búsquedas de analogías obtener una conjetura se conoce con el nombre de **razonamiento inductivo**.

El razonamiento inductivo se caracteriza por obtener una conclusión general a partir de observaciones repetidas de ejemplos particulares.

Naturalmente, una etapa posterior consiste en probar si tal conjetura es o no válida y, en esta etapa, necesitaremos del **razonamiento deductivo**.

La deducción permitirá independizarnos de lo concreto, de lo experimental, tornar la proposición universal. Esta es la forma típica del razonamiento matemático.

Es decir, descubierta una cierta regularidad, el alumno tendrá que ser capaz de expresarla en términos matemáticos para poder generalizarla y hallar una estrategia que permita validar o negar esa afirmación. El alumno comenzará de esta forma a utilizar la manera de obrar del científico, irá comprendiendo que el saber científico es un saber que, a partir de conjeturas o hipótesis, exige precisión conceptual, investigación y justificación de sus conclusiones.

Resumamos, entonces, la secuencia a seguir:

descubrir, a partir de ejemplos, regularidades que tendrá que validar o refutar

2.2.2. La demostración en la enseñanza de la Matemática

En lo expuesto hasta el momento, nos hemos referido a la importancia del razonamiento inductivo como soporte del razonamiento deductivo.

Hemos observado que las etapas de experimentación y elaboración de conjeturas, muy ricas por cierto en el quehacer matemático, deben ser complementadas con la validación en la etapa de desarrollo del pensamiento lógico. De ninguna manera, reiteramos, creemos que esto último (por lo menos en forma rigurosa) sea meta de la enseñanza primaria, pero sí creemos que el docente debe tener claras estas ideas, ya que la educación matemática es un proceso continuo y permanente. Sin embargo, es necesario puntualizar algunas ideas sobre el proceso de validación de enunciados, puesto que en algunos casos son pertinentes al nivel primario. En este proceso cobra especial relevancia la idea de demostrar, y fundamentalmente el significado de ello, en la enseñanza de la Matemática actual.

"**Demostrar**" es un verbo que, más de una vez, es reemplazado por sinónimos como probar, validar, justificar. No creemos oportuno establecer ni analizar sutilezas que podrían afectar el carácter de sinónimos con que los empleamos. Todos ellos son usados con el mismo objetivo: **argumentar las razones por las cuales aseguramos la validez o la no validez de juicios, en particular, en nuestro caso, de juicios matemáticos.**

El concepto de demostración o la acción de demostrar tiene alcances y significados distintos.

Así, si alguien quiere demostrar que una prenda destiñe, basta con que la ponga en agua y observe que el color que esta asume es similar al de la prenda. La acción ejecutada demuestra que *esa prenda destiñe.*

Si alguien quiere demostrar que los números naturales menores que 20 terminados en 4 son números pares se reducirá a probar que los números 4 y

14 son múltiplos de 2. De esta manera, puede afirmarse que ha demostrado la proposición.

Por último, demostrar que cierta persona es hijo de alguien significará realizar una prueba de ADN. Dicha prueba permitirá demostrar si lo que se argumenta es verdadero o falso.

Como vemos, la palabra demostración se utiliza en distintos contextos con diferentes sentidos, todos con una idea en común: *argumentar que algo se verifica o es falso.*

En particular en las ciencias experimentales la demostración se basa en argumentos de tipo inductivo u obtenidos por analogías, lo que hace que se concluya que lo que es verdadero en ciertos individuos de una clase lo es en toda la clase (sin descartar argumentos deductivos o inferencias estadísticas). En estos casos la validez se refuerza cuanto mayor sea el número de casos y un ejemplo donde no se cumpla la afirmación no la invalida.

Tengamos en cuenta que para un matemático las demostraciones son pruebas que tienen características particulares; para él ***una demostración matemática es una sucesión coherente de pasos que, tomando como verdadero un conjunto de premisas llamadas hipótesis, permite asegurar la veracidad de una proposición llamada tesis***. Estos pasos deben estar fundamentados en la aplicación de reglas de deducción (fundadas ya sea en axiomas, lemas o teoremas anteriormente demostrados como en reglas básicas de deducción del sistema en cuestión).

Demostrar en Matemáticas no tuvo, a lo largo de la historia, el mismo peso ni el sentido que le damos hoy. Recordemos que los pueblos prehelénicos se interesaban en los conocimientos matemáticos para poder aplicarlos a la resolución de problemas prácticos sin preocuparse por la demostración; imperaban las recetas prácticas surgidas de razonamientos inductivos que permitían resolver variados problemas. Por ejemplo, se sabe que para calcular el área de un cuadrilátero de lados a,b,c,d, en ese orden, los súmeros y babilonios utilizaban la fórmula:

$$A = \frac{(a+c)\ (b+d)}{4}$$

que en el caso de que el cuadrilátero fuera un rectángulo es exacta y, en cambio, para cualquier otro caso sólo aproxima el área buscada por exceso. Para estos pueblos, probar la validez se reducía a corroborar los cálculos prácticamente.

También, es muestra de lo dicho, el problema encontrado en una tablilla de aproximadamente el año 2000 A.C. a partir del cual se observa cómo los babilonios utilizaban propiedades sin haberlas demostrado.

Una caña está apoyada contra una pared. Si desciende 3 codos, ella se separa 9 codos. ¿Qué es la caña? ¿Qué es el muro?

En este caso los babilonios utilizaban el teorema que más tarde demostraría Pitágoras y que conocemos con su nombre.

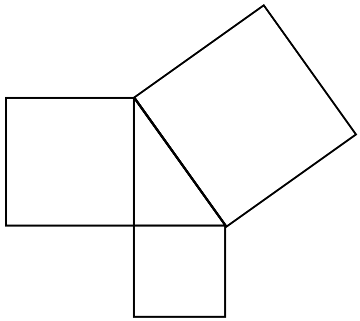
Es decir, en un comienzo la aceptación de propiedades de la Matemática se basaba solo en hechos empíricos, no había una distinción clara entre las relaciones que son exactas y las que no lo son y, por otra parte, el hombre necesitó miles de años para extraer conceptos abstractos de situaciones concretas. Así, por ejemplo, del reconocimiento del espacio que lo rodea hasta la construcción de la idea de plano, netamente abstracta y formal, hubo un largo trecho, como se detalla en el capítulo dedicado a Geometría. El tránsito de este camino plagado de marchas y contramarchas dio lugar a que el hombre experimente, descubra, conjeture, valide o refute, produzca conocimientos, avance, retroceda, vuelva avanzar…

Pero, si hoy algo está claro es que cuando hablamos de demostrar una proposición estamos proponiendo **validar la proposición que enunciamos.** A partir de esto surgen preguntas como:

¿Es necesario demostrar en Matemática? En caso afirmativo, ¿por qué? ¿Cómo enseñar de modo que se plantee la demostración como la característica básica del quehacer matemático? ¿Quién demuestra: el docente o el alumno? ¿Qué demostrar? ¿Cuándo demostrar? ¿Cómo demostrar?

Para debatir sobre las respuestas a estas preguntas iremos paso a paso reflexionando sobre nuestra propia experiencia, sobre situaciones, en la educación primaria, tales como la que a continuación proponemos.

Se hace construir un triángulo rectángulo (frecuentemente hasta se indican las medidas que deben tener los lados). Sobre los lados de tal triángulo se hacen construir sendos cuadrados, como muestra la figura.



A veces midiendo, a veces calculando, el niño logra inferir que el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos. La regularidad, conocida como el Teorema de Pitágoras, debe ser obtenida a partir de verificar lo anterior sobre diversos triángulos rectángulos. El alumno lo deberá comprobar con otros triángulos rectángulos y con otras estrategias que pueden ir desde un dibujo hasta el uso del algún software geométrico.

Es común que en la educación primaria se haga uso de este proceso y que a los resultados obtenidos se les dé validez general.

Sin embargo, creemos oportuno proponer algunas actividades, tan elementales como la de armar un rompecabezas, que permiten validar esta regularidad dándole carácter de conocimiento universal. En el último curso de la escuela primaria conviene ya plantear la necesidad de "demostrar".

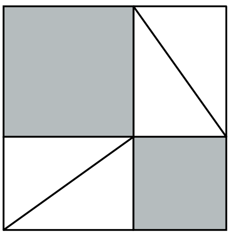
Hemos elegido una estrategia simple (el uso de un rompecabezas), adecuada al nivel, para realizar una demostración del Teorema de Pitágoras mediante la resolución del siguiente problema.

Problema 1

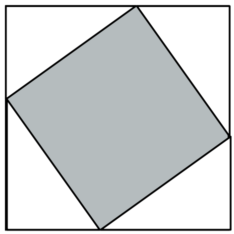
Construya 8 triángulos rectángulos iguales de catetos *a* y *b* y de hipotenusa *c*. Además construya 3 cuadrados de modo que un cuadrado tenga lado *a*, otro *b* y el tercero *c*.

A manera de rompecabezas construya con estas 11 piezas dos cuadrados de igual área.

Una forma de obtener la solución supone la construcción de dos cuadrados que llamamos A y B respectivamente.



Cuadrado A



Cuadrado B

De la observación (visualización) de los cuadrados A y B, se probará que la superficie sombreada del cuadrado A es equivalente a la superficie sombreada del cuadrado B.

En efecto:

- El cuadrado A está formado por dos cuadrados distintos (uno de lado *a* y otro de lado *b*) y 4 triángulos.
- El cuadrado B está formado por un cuadrado (de lado *c*) y 4 triángulos.

Luego, la suma de las áreas de los dos cuadrados del cuadrado A es igual al área del cuadrado del cuadrado B.

De donde:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Como a y b son las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo y c la medida de su hipotenusa, podemos enunciar coloquialmente:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma
de los cuadrados de los catetos.

Este ejemplo muestra, de alguna manera, el camino que consideramos debería seguirse en el aprendizaje de la Matemática y que, hemos resumimos en:

Experimentar - Conjeturar - Demostrar

El desafío desde nuestro rol de docentes es precisar si en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática avanzaremos desde la etapa de la experimentación y conjetura a la de validación. Si pensamos que es objetivo de la enseñanza de la Matemática llegar a la etapa de validación de propiedades, caben aquí las preguntas:

¿Qué demostrar en la enseñanza primaria?
¿Cómo enseñar a demostrar?

No podemos fijar una edad, una etapa, un nivel de la educación matemática donde la demostración y la capacidad de demostrar se transformen en objetivo fundamental. Creemos que son procesos que se desarrollan evolutivamente y en distintos niveles de profundización. Concretamente, nadie dudará de que en la educación primaria las conocidas fórmulas para obtener las medidas de superficie de distintas figuras no pueden ni deben axiomatizarse, cuando sea posible demostrar su validez general (ver capítulo de Medidas) 🕮.

¿A qué alumno de la escuela primaria de los últimos cursos puede interesarle demostrar que:

- *los lados opuestos de un rectángulo son iguales?*
- *los ángulos opuestos por el vértice son iguales?*
- *todos los números pares terminan en 0,2,4,6 y 8?*

Cada una de estas regularidades fue utilizada por el alumno de manera reiterada si bien no demostró su validez. No siente la necesidad de demostrarlo, no tiene motivación alguna.

Creemos que para iniciar al alumno en el camino de la demostración deben presentársele cuestiones que puedan motivarlo. Un buen ejemplo es el tratado anteriormente referido al Teorema de Pitágoras.

En síntesis, hemos planteado la necesidad de atender a las formas con las que pensamos en Matemática, a los procesos a través de los cuales construimos los conceptos, a los caminos que seguimos para inferir una conjetura o para validar o refutar una proposición. Si bien no es simple dar respuestas precisas a estas inquietudes que son motivo de preocupación y dan lugar a estudios e investigaciones, es innegable que en cada uno de estos procesos los sentidos juegan un importante papel, teniendo un rol fundamental el sentido de la vista. Es natural pensar entonces que un importante canal de información para el conocimiento matemático es la visión y que las configuraciones visuales constituyen un medio a partir del cual comenzamos a construir el saber.

Surge, de esta manera, la noción de **visualización**, vinculada a la capacidad para la formación de imágenes mentales a partir de las cuales operamos y construimos nuestros saberes.

Es importante analizar el significado y la influencia de la visualización en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática. Este objetivo cobra en la actualidad, con las nuevas tecnologías, mayor significado.

Aclarando que la visualización en Matemática no se reduce al hecho de "ver", involucra también todo aquello que está conectado con representar, comunicar y dar información visual para favorecer el pensamiento y el lenguaje; es innegable que los conceptos y los métodos de la Matemática presentan gran riqueza de contenidos visuales.

Por otra parte, como sabemos, las imágenes como apoyo del pensamiento matemático han existido siempre ya que no son ajenas a la naturaleza de la Matemática misma pero nunca como ahora habíamos tenido la oportunidad de producir imágenes y transmitirlas, nunca como ahora nuestros alumnos han estado sumergidos en el mundo de las imágenes que los envuelve a diario. Pero, también, nunca como ahora nos encontramos con que nuestros alumnos presentan serias dificultades, por ejemplo, en el "pensamiento geométrico" (aplicación de propiedades elementales, visualización espacial), en el uso de terminología precisa, en la habilidad para pasar de un lenguaje a otro (verbal a gráfico o simbólico, por ejemplo). De esta manera, nunca como ahora, la idea de visualización debe rescatarse, analizarse buscando en ella la ayuda para que la visualización de propiedades geométrica, algebraicas y numéricas permitan la comprensión de los conceptos matemáticos, sobre todo en edades tempranas.

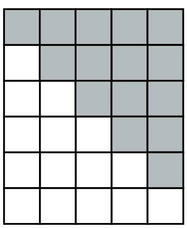
Queremos precisar, ayudándonos con ejemplos, cuáles son los significados de la visualización en Matemática.

Pensamos en la visualización como:

• **Herramienta para la demostración de un teorema**

La visualización de la figura servirá de inspiración para resolver el problema.

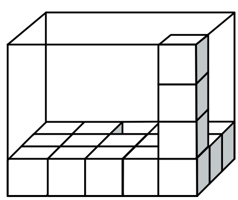
PROBLEMA 2



Demuestra que la suma de los n primeros números naturales es: $\dfrac{n(n+1)}{2}$

• **Herramienta para la demostración de una conjetura**

La visualización de este esquema permitirá al alumno conjeturar una expresión para el cálculo del volumen de un prisma.



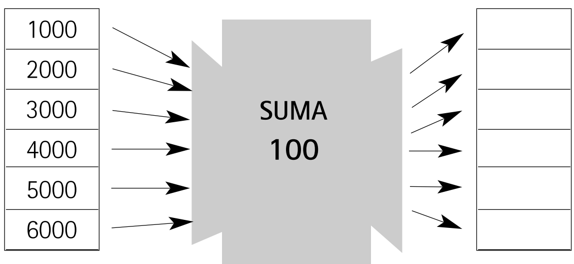
• Herramienta para construir nuevos conceptos

El objetivo de la visualización es que el alumno pueda, a partir de la misma y de conceptos previos, construir nuevos conceptos.

Así, por ejemplo, no nos resultará sencillo que el alumno interprete el concepto de función si nos independizamos de los diagramas de Venn o de las tablas. Evidentemente le permitirá construir mejor el concepto de función si a ésta la representamos como una máquina que produce una transformación de cada elemento de un conjunto dado transformándolo en un elemento de otro conjunto, como podemos ver en el siguiente problema:

PROBLEMA 3

Máquina de funciones. Completa:



2.3. **La fuerza de los conceptos en Matemática**

2.3.1. **La significatividad de los conceptos**

La Matemática es reconocida como una ciencia imprescindible tanto en el desarrollo de otras ciencias como en cuestiones de la vida diaria. En su doble carácter, instrumental y formativo, está presente en casi todas las actividades de nuestra vida ya que ofrece un modo de pensar y producir.

El mismo consenso que existe en reconocerla como imprescindible, también existe para reconocer las dificultades que presenta su proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Esto no es casual, las mismas razones que fijaron los sólidos conocimientos del edificio matemático se constituyen más de una vez en una traba para el desarrollo de ese proceso. Por ejemplo, es difícil que un alumno pueda comprender un contenido Matemático sin haber tenido un aprendizaje significativo de los contenidos relacionados con él y que le preceden, y que constituyen lo que conocemos como saberes previos. Por ejemplo, ¿quién podría sumar números racionales si no sabe sumar números naturales? ¿Cómo calcular el área total de un prisma sin saber calcular el área de un rectángulo?

En este sentido radica la importancia de la significatividad de los conceptos matemáticos que permite, de algún modo, dar respuesta al interrogante *¿para qué sirve?* que sustentan, frecuentemente, los alumnos de todos los niveles.

Clarifiquemos lo que estamos intentando decir: no siempre la aplicación es a los fines prácticos. Más de una vez debemos dar conceptos de Matemática para poder dar otros conceptos de Matemática y, esta es, para dicho concepto, su mayor significatividad. ¿O alguien puede entusiasmar a un alumno con las aplicaciones de los algoritmos de cálculo? Sin embargo, la fuerza de los mismos en cuestiones de Matemática es innegable.

Recordemos a tal efecto que en la antigüedad muchos de los conocimientos se descubrían o avanzaban solo por el simple deleite de investigar. El estudio era un gusto y no una necesidad (en 1605 Francis Bacon ideó los números binarios y recién tuvieron utilidad práctica con el advenimiento de la Informática).

Es conocida la anécdota en la que Euclides contesta a un estudiante que preguntó qué provecho podría sacar de lo que estaba estudiando: *Denle 3 centavos, ya que él debe obtener ganancias de todo lo que aprende.*

Sin embargo, algo es muy claro, independientemente de que la aplicación sea dentro de la propia Matemática o fuera de ella, cualquier concepto debe cobrar significatividad.

¿Para qué dar relación de equivalencia si no la voy a utilizar nunca?

¿Por qué no dar la noción de intersección de conjuntos si la necesito tanto?

¿Para qué insistir en la clasificación de triángulos si no se la va a emplear en la resolución de problemas?

De todo esto es que la idea de aprendizaje significativo resulte de tanta atención para los especialistas en educación. En particular, la propuesta de organización helicoidal de los contenidos con niveles de profundización crecientes es un intento de facilitar el aprendizaje significativo en Matemática.

2.3.2. **El respeto por las definiciones**

Es preciso observar que frecuentemente y con gran acierto los conceptos matemáticos surgen de actividades concretas en el marco del pensamiento intuitivo.

Las dificultades aparecen cuando los conceptos matemáticos empiezan a ser trabajados desde un plano abstracto o son construcciones matemáticas que es preciso informar.

¿Qué queremos significar con estos planteos?

La respuesta implica considerar que algunos contenidos son definiciones, convenios, axiomas que deben ser considerados independientemente de un soporte concreto. Así, por ejemplo, la suma y la resta en han sido trabajadas en el primero y segundo ciclo de la escuela primaria sin mayores dificultades, tanto en el campo conceptual como en el procedimental.

Las cosas no resultan tan sencillas al tratar de abordar la *multiplicación de fracciones* si deseamos lograr un aprendizaje significativo y no meras rutinas de cálculo.

El primer punto a tratar en el desarrollo de este tema es la *multiplicación de una fracción por un número natural* que resulta una extensión de la definición de multiplicación en N_0.

Así, si $n \in N$ y $a \in Q_0^+$,

$$n.a = \underbrace{a + a + \ldots a}_{n \text{ veces}}$$

De esta manera, por ejemplo, si $n = 3$ y $a = \frac{3}{4}$, tenemos que:

$$3.\frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

Pero:

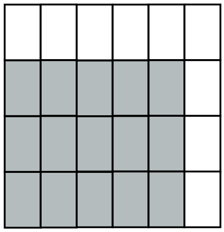
$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3 + 3 + 3}{4} = \frac{3.3}{4} = \frac{9}{4}$$

De donde:

$$3.\frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

Reiteramos que, hasta aquí, las operaciones con fracciones no tienen mayores dificultades. Estas comienzan a aparecer con la introducción del concepto de multiplicación entre dos fracciones ya que no son comunes los problemas concretos que ayuden a dar significado a esta operación. Con el propósito de facilitar el trabajo puede proporcionarse una manera de introducir la multiplicación entre fracciones intentando darle significado a la misma. Para ello, partimos de un cuadrado de lado unidad en el que construimos, como mostramos, un rectángulo de dimensiones $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$.

Observemos:



$\frac{3}{4}$

$\frac{5}{6}$

- El área del cuadrado es 1.1 =1
- El área del rectángulo sombreado es $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$
- El rectángulo está formado por 15 partes de las 24 en las que se ha dividido el cuadrado. Es decir su área es:

$\frac{15}{24}$ del área del cuadrado = $\frac{15}{24}$ de 1 = $\frac{15}{24}$

Entonces:

$$\underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}}_{\text{Área del rectángulo}} = \underbrace{\frac{15}{24}}_{\text{Fracción del área del cuadrado}}$$

De esta manera,

la multiplicación de fracciones deberá formularse de modo que la expresión $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$ *que da el área del rectángulo coincida con el número* $\frac{15}{24}$ *que también da dicha área.*

Realizando el mismo procedimiento con distintos números (tomando, en particular, algunos mayores que la unidad —donde el razonamiento no varía—) se intenta que cuando el docente presente **la definición de multiplicación de fracciones**: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$, la misma no parezca "caída del cielo".

El alumno advertirá que esta definición no contradice cálculos matemáticos ni razonamientos que ya utilizó.

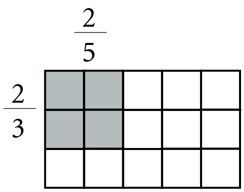
Es necesario familiarizar al alumno con este tipo de conceptos rescatando el valor de su comprensión. Más aún, es necesario hacer observar el valor de las definiciones como soportes del edificio matemático.

Podríamos preguntarnos sobre la aplicación instrumental del tema en la resolución de problemas.

Un simple enunciado como:

Determina los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{2}{5}$ de un número

permite dar significatividad a la multiplicación de dos números racionales no negativos.



La solución gráfica del problema muestra que la respuesta posible es: $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{5}$ de un número representa los $\frac{4}{15}$ del número.

La multiplicación de racionales no negativos resuelve la cuenta:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{2}{5} = \frac{2}{3} \text{ x } \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

Se ha logrado descubrir una estrategia para calcular una fracción de otra fracción viendo que es equivalente a realizar la multiplicación entre las fracciones.

En esta sección se ha rescatado el valor de las definiciones matemáticas haciendo referencia solo a un tema. Como es fácil concluir, numerosos temas del área, por no decir todos, requieren de un manejo riguroso de los conceptos por parte de quien enseña, de modo que en el proceso de enseñanza sea planteado adecuadamente.

Solo con el objeto de hacer referencia a otros conceptos cuyo tratamiento es significativo y para los que requerimos precisión en su construcción matemática, nos referiremos a las definiciones de división exacta[5], de división entera[6], de rectas paralelas.

Analicemos esta última definición para trabajar un ejemplo dentro del campo de la geometría.

Es frecuente que al definirse rectas paralelas se exprese:

dos rectas son paralelas cuando no se cortan

Esta definición, tal vez demasiado simplificada, llevaría a:

- desconocer que dos rectas que no se cortan pueden no ser paralelas; pueden ser alabeadas
- desconocer que toda recta es paralela a sí misma

En necesario entonces mostrar la importancia y significatividad que reviste el concepto previo de *coplanaridad* ya que nos permite evitar las posibilidades recién mencionadas.

Entonces ¿cómo definir rectas paralelas?

Dos rectas coplanares son paralelas si su intersección es vacía o es una de ellas.

El manejo y la significatividad del lenguaje simbólico se ponen de manifiesto en la expresión no coloquial de esa definición, al enunciar:

Si a y b son dos rectas y α es un plano, tal que $a \subset \alpha$; $b \subset \alpha$, resulta:

$$a \parallel b \Leftrightarrow (a \cap b = \Phi \quad o \quad a \cap b = a = b)$$

5. Tratado en el capítulo “Enseñanza de los conjuntos numéricos”.
6. Ib.

3. La resolución de problemas

> "En la medida en que adiestremos a nuestros alumnos
> a pensar independientemente y a utilizar los conocimientos
> de que disponen, habremos desarrollado con éxito
> nuestra tarea como profesores"
> **ALAN H. SCHOENFELD**

Numerosa bibliografía ha hecho referencia al "problema", abarcando temas que abordan su conceptualización, su valor como instrumento de enseñanza y las diversas estrategias que pueden emplearse para su resolución. La lectura 🕮 de esa bibliografía enriquece al docente respecto de este tema.

Probablemente, a pesar de todo lo que se ha escrito al respecto, sabemos que la resolución de problemas es una cuestión que reviste dificultades diversas y que en las aulas está cada día más ausente, por lo menos en la forma que luego plantearemos.

Frecuentemente se le asignan las dificultades de su resolución a la incapacidad de los alumnos para comprender consignas o directamente a la incapacidad de comprender el enunciado.

Creemos que la cuestión es más profunda, o por lo menos, que atiende además a otros aspectos que deben tenerse en cuenta a la hora de proponer a los alumnos la resolución de un problema. De ningún modo queremos ignorar la falta de competencia de los niños para comprender enunciados o reconocer el significado de términos, pero no queremos reducir las dificultades a estos únicos obstáculos. Es más, consideraremos algunas sugerencias que pueden ser útiles para minimizar este obstáculo relativo a la comprensión de los enunciados:

- La lectura del problema es tarea del alumno. Si el docente realiza la lectura del mismo puede, inconscientemente (aún con el tono de voz), marcar los desafíos que propone el problema.
- Los enunciados deben ser redactados en forma clara, con oraciones breves, de modo de separar claramente las cuestiones que surgen (el uso correcto de la puntuación favorece la interpretación).

- El vocabulario que se exhibe en los problemas debe ser preciso, sin dudas en su significado.
- La práctica, por parte de los niños, de la exposición oral de los caminos pensados o de las propias resoluciones de los problemas, contribuye a la mejor comprensión de éstos por el grupo.
- La forma de explicación de los caminos seguidos en la resolución (comúnmente llamados planteos) será libre, creativa, no seguirá un tipo de esquema preestablecido.

No tenemos que olvidar que la resolución de problemas es el camino más adecuado para la enseñanza de la Matemática, fundándose tal elección en la posibilidad que brinda para poner en práctica el principio general del aprendizaje activo. Lo que se persigue con esa enseñanza es poner en acción procesos de pensamiento eficaces para la construcción del conocimiento.

Al respecto Miguel de Guzmán 🕮 (1995) señala: *Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra. Nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas.*

La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar de lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamientos eficaces.

Hemos hecho referencia a la falta de competencia para la comprensión lectora. Analizamos a continuación otros aspectos que nos parece relevante considerar para lograr que nuestros alumnos sean competentes en la resolución de problemas:

- **el trabajo autónomo,**
- **la enseñanza de estrategias,**
- **los temas sobre los que versarán los problemas**.

- **EL TRABAJO AUTÓNOMO**

La resolución de problemas debe dar lugar a un trabajo autónomo, independiente. Para que ello se produzca, debe ser, en primer lugar, una actividad que despierte el interés del alumno.

Es sabido lo atrayente que es para la mayoría de los niños la actividad física, sobre todo cuando pueden desenvolverse sin trabas ni condicionamientos, salvo los establecidos por las reglas del juego. Estas actividades, aunque se realicen en equipo, necesitan un trabajo individual eficaz que parte del interés de los niños.

La actividad mental, *sin trabas ni condicionamientos, salvo los establecidos por "las reglas de los contenidos involucrados"*, también puede resultar atractiva si logra captar el interés del alumno y en consecuencia ser origen de un trabajo autónomo.

El trabajo autónomo no es frecuente en las aulas. Es marcada la dependencia que el alumno tiene del docente en el trabajo áulico. Creemos, por ello, necesaria la propuesta de actividades que impliquen el ejercicio del trabajo autónomo. Sabemos que esta forma de trabajo no se logra de un día para el otro, lograrlo es un largo proceso que se inicia en los primeros cursos de la escolaridad y necesita del esfuerzo y del convencimiento de los docentes sobre la importancia del mismo.

El trabajo autónomo solo es posible si, al resolver un problema, el alumno dispone de saberes previos que pueda poner en acción. La propuesta de un problema debe atender a los conocimientos previos requeridos para no producir desaliento en el alumno.

Pero, en general, más que escuchar preguntas sobre cómo incentivar al alumno en el trabajo autónomo es frecuentemente escuchar expresiones como:

- ***Los niños no lo resolverán, este problema todavía no lo dimos.***
- ***Nunca hicieron uno similar.***
- ***No entenderán el enunciado del problema.***

Ante estas afirmaciones nos preguntamos:

¿Se conoce claramente el concepto de problema?

Reflexionemos sobre esto. Así, por ejemplo, proponer:

Resuelve: 2000-1998

ó

Resuelve: $1+\frac{1}{4}$

¿es proponer problemas?, ¿en qué etapa del aprendizaje representan problemas?, ¿cuándo representan ejercicios mecánicos de cálculo?

Estas propuestas pueden ser problemas aunque nuestra experiencia nos muestra que, en general, no se plantean como tales. No se proponen como desafíos para construir, en forma autónoma, algoritmos (no necesariamente los tradicionales) para su resolución. Se proponen cuando los alumnos ya conocen los mecanismos de cálculo transformándose así en ejercicios rutinarios.

Nuestra primera propuesta (2000-1998) es un problema a resolver sin necesidad de conocer algoritmo alguno. Su resolución implica comprender solo el concepto de resta, y contar cuánto falta a 1998 para llegar a 2000.

El trabajo autónomo implica proponer la cuestión y dejar buscar estrategias libremente.

Comentarios similares podemos realizar sobre la segunda propuesta.

Resolver: $1+\frac{1}{4}$ es un desafío para los alumnos antes de haber tratado algoritmos para sumar fracciones. Deben procurar su resolución libremente ya sea con el empleo de gráficos, la recta numérica, fracciones equivalentes. El valor del trabajo autónomo no radica en el método empleado sino en el esfuerzo de búsqueda.

En resumen:

Presentar un problema significa presentar situaciones inéditas que estimulen el trabajo autónomo, en función de saberes previos.

El trabajo autónomo no implica la ausencia de la intervención del docente. Según Miguel de Guzmán:

> *La enseñanza debe estar centrada en la propia actividad del alumno, dirigida por el docente, quien le permitirá transformase de un sujeto pasivo en otro activo y creativo, adquiriendo procesos válidos contra viejas rutinas que conducen al aburrimiento.*

- **LA ENSEÑANZA DE ESTRATEGIAS**

Consideramos ahora otro aspecto significativo sobre el que es necesario reflexionar; nos referimos a las estrategias, los procesos, los caminos para resolver problemas, cuestiones que deben trabajarse en el aula en situaciones de enseñanza y de aprendizaje. La resolución de problemas y las diversas estrategias deben ser una práctica importante tanto para niños como para docentes. No podemos enseñar a jugar al ajedrez ni sus estrategias si no jugamos nosotros al ajedrez, no podemos enseñar a resolver sudokus ni explicar cómo se pueden resolver, si nosotros habitualmente no los resolvemos. Del mismo modo no podemos enseñar a resolver problemas si no resolvemos problemas y creamos estrategias de resolución.

Nuestro propósito es puntualizar que:

Enseñar estrategias para la resolución de problemas debe ser un objetivo para el docente.

Veámoslo concretamente con los siguientes problemas y analicemos las estrategias de resolución que pueden trabajarse.

PROBLEMA 1

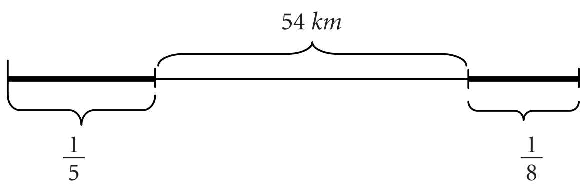
Los puntos *a* y *b* representan dos ciudades. Dos automovilistas se trasladan. Uno parte de *a* hacia *b* y el otro en sentido opuesto, de *b* hacia *a*. Cuando uno ha recorrido $\frac{1}{5}$ de la distancia que separa *a* y *b*, el otro ha recorrido $\frac{1}{8}$. Si en ese momento los separan 54 km, ¿qué distancia hay entre las dos ciudades?

(Sugerimos resolver el problema antes de continuar con la lectura)

Generalmente se recurre, para su resolución, al planteo de ecuaciones (en este caso: $\frac{1}{5}x + 54 + \frac{1}{8}x = x$).

Pero, tanto el planteo de la misma como su resolución son cuestiones que escapan a las posibilidades de un alumno de la escuela primaria. Esta situación no debe impedir la propuesta del problema ya que la resolución del mismo puede encararse de manera accesible para el alumno. Como dijimos, usar ecuaciones no es en este caso una buena estrategia pero la estrategia **confeccionar un gráfico adecuado** se transforma en un instrumento eficaz.

Así, la resolución es simple utilizando una representación gráfica, similar a la que proponemos.



De esta manera, encontrar la fracción que representa a los 54 km, es un simple problema de suma y resta.

En efecto: $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{13}{40}$

$\frac{40}{40} - \frac{13}{40} = \frac{27}{40}$ La fracción $\frac{27}{40}$ representa a los 54 km.

Buscar ahora la cantidad de kilómetros que equivalen al camino entero resulta un problema elemental.

$$\frac{27}{40} \longrightarrow 54$$

$$\frac{1}{40} \longrightarrow \frac{54}{27}$$

$$\frac{40}{40} \longrightarrow \frac{54}{27} \times 40 = 80$$

Podemos entonces decir que: **el camino tiene 80 km**.

El uso de recursos gráficos como instrumento de resolución de problemas es un tema que merece espacios de trabajo entre docentes y con los alumnos. Su enseñanza debe ser un objetivo de la educación matemática.

Veamos otra situación similar en la que los planteos gráficos simplifican la resolución del problema.

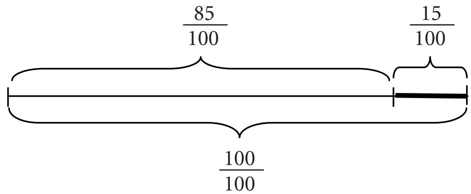
PROBLEMA 2

Un objeto cuesta $230. Al facturarlo se hace el 15% de descuento, ¿cuál es el nuevo precio?

(Sugerimos resolver el problema antes de continuar con la lectura)

A la estrategia del recurso gráfico se suma ahora la de buscar **una simbología adecuada**; en este caso, expresar el porcentaje como fracción de denominador 100.

Veamos una forma de plantear la resolución.



Entonces, como

$\frac{100}{100}$ equivale a \$230

$\frac{1}{100}$ equivale a $\frac{230}{100}$

$\frac{85}{100}$ equivale a $\frac{230 x 85}{100} = 195{,}50$

El nuevo precio es de \$195,50.

Los problemas que implican el uso de porcentaje y fracciones resultan, en general, muy simples a partir de la resolución gráfica.

Notemos que sugerir este tipo de estrategias no invalida el uso de otras alternativas.

El problema anterior pudo ser resuelto así:

$$230 - 15\% \text{ de } 230 = 230 - \frac{15}{100} \times 230 = 230 - 34{,}50 = 195{,}50$$

O simplemente calculando:

$$85\% \text{ de } 230 = \frac{85}{100} \times 230 = 195{,}50$$

El valor de la enseñanza radica en la concreción de espacios de trabajo áulico donde se socialicen y discutan diversas estrategias para la resolución de un mismo problema.

Veamos, en un tercer problema, otras estrategias.

PROBLEMA 3

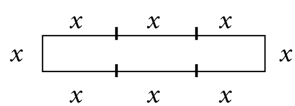
Un rectángulo tiene 96 cm de perímetro. Una de sus dimensiones es el triple de la otra. ¿Cuánto mide la superficie del rectángulo?

(Sugerimos resolver el problema antes de continuar con la lectura)

La solución de este problema supone, en primer lugar, conocer las dimensiones del rectángulo. La determinación de las mismas puede plantearse, como en los problemas anteriores, por medio de una ecuación. Si llamamos x a la dimensión menor, resulta:

$$2x + 2.(3x) = 96$$

Nuevamente el apoyo gráfico permite plantear una ecuación más simple y, consecuentemente, facilita su resolución.



Confeccionar un dibujo que permita concluir que x "cabe" 8 veces en el perímetro es el instrumento que permite plantear una ecuación cuya resolución está al alcance de los alumnos.

$$8x = 96$$

De donde,

$$x = 12 \qquad\qquad 3x = 36$$

superficie del rectángulo: b x $a = 12cm$ x $36cm = 432cm^2$

La superficie es de 432 cm^2.

Con estos ejemplos hemos querido destacar la importancia que posee el hecho de que el docente enseñe procedimientos para la resolución de problemas. Seguramente no son estas las únicas estrategias que puedan utilizarse. Según el problema y la creatividad del alumno y del docente podrán surgir nuevas estrategias para su resolución.

Enunciamos algunas conocidas estrategias que pueden resultar útiles según el problema:

- Hacer un gráfico adecuado.
- Dramatizar el problema.
- Buscar una simbología conveniente.
- Comenzar por casos más simples.
- Pensar en el problema resuelto.

Guy Brousseau (1997) 🕮 afirma que *un alumno no hace matemática si no resuelve problemas. Todo el mundo está de acuerdo con lo anterior. Sin embargo, las dificultades se presentan cuando se trata de saber cuáles problemas él debe plantearse, quién los plantea y cómo.*

• LOS TEMAS SOBRE LOS QUE VERSARÁN LOS PROBLEMAS

El tercer aspecto al que queremos aludir está constituido por: *los temas a los que deben hacer referencia los problemas.*

En el trabajo áulico, al desarrollar un tema, se plantean problemas que hacen referencia al mismo, así es necesario proponer problemas sobre el cálculo de superficies planas cuando se está trabajando dicho tema. Son los llamados problemas de “final de capítulo” o “problemas de aplicación de un tema”.

La cuestión a la que queremos hacer referencia es la propuesta de problemas donde se necesite recurrir a conocimientos diversos pertenecientes a distintos campos de la Matemática para proceder a su resolución. Estamos rescatando el valor de sorprender a los alumnos ya no con problemas de aplicación directa de un tema, sino con problemas cuyas alternativas de resolución no puedan ser enmarcadas en un contenido en particular.

Con el propósito de ejemplificar lo antedicho, proponemos un problema cuya solución integra distintos campos de la Matemática.

PROBLEMA 4

Un niño forma un prisma con 42 cubos de 1 cm de arista. Si la base tiene 18 cm de perímetro, ¿cuánto mide la altura del prisma?

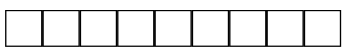
(Sugerimos resolver el problema antes de continuar con la lectura)

¿Qué estrategias de acción puede utilizar un niño para resolver este problema?

Una forma de pensarlo puede ser:

- El prisma está constituido por "pisos".
  Como la base es un rectángulo que tiene 18 cm de perímetro, su semiperímetro es de 9 cm, o sea: las dimensiones de la base deben sumar 9.
- Las medidas de la base deben ser números naturales porque los cubitos no se pueden fraccionar (información del conocimiento social). Por lo tanto, lo casos posibles son: 1 y 8; 2 y 7; 3 y 6; 4 y 5.

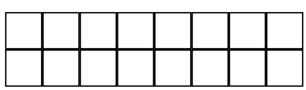
Prueba con 1 y 8



En este caso se usan 8 cubitos en la base. Si tiene 42, ¿cuántos "pisos" se deben poner?

La división 42:8 no tiene cociente entero. **¡No se puede formar un prisma** que tenga en la base 8 cubitos!

Prueba con 2 y 7



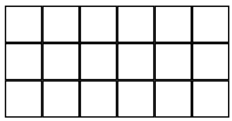
En este caso se usan 14 cubitos en la base. Se tienen 42, ¿cuántos pisos se deben poner?

La división 42:14=3 tiene cociente entero. Puedo formar un prisma con 14 cubitos en la base. En este caso el prisma tendrá 3 pisos de cubitos.

Una solución es: la altura del prisma es 3 cm

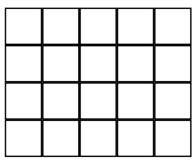
¿Habrá otra solución?

Sigue probando, ahora con 3 y 6:



En este caso se utilizan 18 cubos en la base.
La división 42:18 no tiene cociente entero. **No se puede formar el prisma.**

Resta probar con 4 y 5



En este caso se utilizan 20 cubos en la base.
42:20 no tiene cociente entero. **No se forma el prisma.**

Por lo tanto, el problema tiene una única solución.

Otra forma de pensar la resolución del problema surge del hecho de considerar que un prisma se puede formar por pisos de cubos superpuestos. En nuestro caso:

- Una condición es:
  - Se dispone de 42 cubos.
  - La cantidad de cubos que forman al prisma es el producto de la cantidad de cubos que hay en la base (piso) por la cantidad de "pisos" que tiene el prisma.
  - La cantidad de cubos en la base se obtiene multiplicando la cantidad de cubos que entran en el largo por la cantidad que entran en el ancho.
  - La cantidad total de cubos se obtiene entonces multiplicando 3 números naturales que den 42.
- Otra condición es:
  - El perímetro de la base es de 18 cm.
  - La cantidad de cubos que forman al prisma es el producto de la cantidad de cubos que hay en la base (piso) por la cantidad de "pisos" que tiene el prisma.
  - Dos de los tres números anteriores deben ser tales que multiplicados por 2 y sumados den 18. Es decir, deben ser tales que suma sea 9.

¿Cómo capitalizamos toda esta información?

La condición: "se dispone de 42 cubos" ha permitido llegar a la conclusión: debemos buscar 3 números naturales cuyo producto sea 42. Es natural entonces pensar en descomponer 42 como producto de números primos. Tenemos entonces: 42 = 6.7 = 3.2.7. Como además el número 1 es también un factor de 42 y una de las posibles medidas que buscamos, podemos pensar en los números 1, 2, 3 y 7 para obtener la solución de nuestro problema.

La segunda condición: los números deben ser tales que su suma sea 9, reduce la posibilidad de los cuatro valores a solo dos, el 2 y el 7, ya que estos son los dos únicos números que sumados dan 9.

Entonces, la altura del prisma es 3.

Observemos:

- El problema planteado supone trabajar en diferentes campos de la Matemática.

Campo numérico	Campo geométrico	Campo de las mediciones
Factorización de números.	Concepto de prisma y sus propiedades	Cálculo de volúmenes

- Las dificultades del problema no están en las cuentas a realizar sino en el razonamiento requerido.

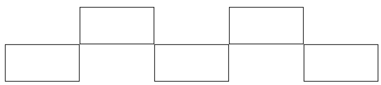
Resolver estos problemas exige al niño relacionar diferentes contenidos, utilizar diferentes estrategias. Podría pensarse que una forma de lograr que el alumno pueda abordarlos sería dedicarle un día por semana o un día por quincena a la resolución de problemas donde se vinculen diferentes temas y a la posterior discusión de las diversas estrategias utilizadas para su resolución. Sin embargo, las palabras de Miguel de Guzmán 🕮 (2010) nos hacen reflexionar sobre las desventajas de propuestas tan estructuradas y nos sugieren la búsqueda de estrategias superadoras.

> *Lo que suele suceder a aquellos profesores genuinamente convencidos de la bondad de los objetivos relativos a la transmisión de los procesos de pensamiento es que viven una especie de esquizofrenia, tal vez por falta de modelos adecuados, entre los dos polos alrededor de los que gira su enseñanza, los contenidos y los procesos. Los viernes ponen el énfasis en los procesos de pensamiento, alrededor de situaciones que nada tienen que ver con los programas de su materia, y los demás días de la semana se dedican con sus alumnos a machacar bien los contenidos que hay que cubrir, sin acordarse para nada de lo que el viernes pasado practicaron. Sería muy necesario que surgieran modelos, aunque fueran parciales, que integraran en un todo armonioso ambos aspectos de nuestra educación matemática.*

Exhibimos a continuación algunos problemas para que nuestros lectores puedan reflexionar con sus colegas sobre los contenidos previos necesarios, las posibles estrategias de resolución y el momento adecuado para la propuesta de los mismos.

PROBLEMA 5

Un cuadrado se dividió en cinco rectángulo iguales trazando paralelas a uno de sus lados. Con estos rectángulos se formó esta guarda



Si el perímetro de uno de los rectángulos es 24 cm.,

a) ¿Cuál es el perímetro de la guarda?

b) ¿Cuál es la superficie del cuadrado original?

PROBLEMA 6

Nicolás armó una torre apilando uno sobre otro, 3 cubos de distinto tamaño: uno grande, otro mediano y un tercero pequeño.

Colocó un cubo sobre otro, de mayor a menor, empezando por el mayor, que apoyó sobre el piso, sobre una cara.

La torre alcanzó una altura de 111cm.

La altura del cubo mediano es el 10% de la altura del cubo grande y la altura del cubo pequeño es el 10% de la altura del mediano.

Nicolás pintó la superficie lateral de cada cubo. ¿Cuántos cm^2 de superficie pintó?

PROBLEMA 7

Un comerciante va a anunciar un descuento del 20% sobre su mercadería, pero antes de hacerlo cambia los precios en las etiquetas aumentándolos un 20 %.

¿Hizo algún descuento? En caso afirmativo, ¿de qué porcentaje?

Para reflexionar:

¿Qué campos de la Matemática pueden ser trabajados al resolver estos problemas?

Por último queremos expresar que las estrategias para resolver problemas no pueden surgir solamente del alumno. El docente debe enseñar estrategias para resolver problemas y no desilusionarse si sus alumnos no pueden hacerlo de inmediato; este es un trabajo a largo plazo que no debe hacernos decaer en el intento. Ayudémonos con este proverbio chino: *Quien quiere hacer algo encuentra un medio; quien no quiere hacer nada encuentra una excusa.*

4. La era tecnológica y la enseñanza de la Matemática

Los actores sociales de una institución educativa: educadores, padres, alumnos, docentes y directivos, observan con agrado que se disponga de elementos tecnológicos para la enseñanza de las diferentes áreas en general y, de la matemática en particular. Estos elementos son de lo más variados; podemos hablar de un simple grabador, un televisor o, en casos más sofisticados de computadoras individuales.

Nadie pone en dudas el valioso aporte que todos estos elementos pueden brindar como recursos e instrumentos para mejorar la educación. Nadie niega el uso de Internet como medio para conseguir información, el uso de un proyector de DVD para capitalizar conocimiento, el empleo de una calculadora o una computadora para ayudar en la resolución de problemas. Ya no se debate sobre su necesidad sino sobre las mejoras que aportan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los libros de Didáctica estudian hoy la manera de optimizar su uso, su incidencia en los procesos de pensamiento, la forma en que deberían influir en la reestructuración de los programas y en la manera de enseñar. Sin embargo, en la práctica diaria esto no se nota. ¿Qué sucede? Razones de esto puede encontrarse en el desconocimiento de la forma como pueden introducirse y usarse los recursos tecnológicos, en la falta de familiarización de los adultos con las nuevas tecnologías y en consecuencia la ausencia de significatividad que le asignan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Como es sabido, la era tecnológica trae aparejado un cambio de mentalidad. Es común escuchar sobre la facilidad de los jóvenes para interiorizarse en el uso de los elementos tecnológicos que surgen día a día y sobre las dificultades de los adultos para adaptarse a ellos. Este cambio de mentalidad asume capital importancia en el momento de la planificación del trabajo en las aulas. En particular, y en el marco de la asignatura que nos ocupa, ese cambio implica cambios profundos en la Didáctica de la Matemática.

El tema que queremos abordar no da recetas para usar estos elementos en el aula (si bien acordamos con el empleo de los mismos, con la importancia y la necesidad de hacerlo). Entonces… ¿cuál es nuestro propósito? No discutimos la incorporación de la tecnología en el aula siempre que la misma resulte realmente un recurso didáctico positivo y no un mero juego para los alumnos; pretendemos mostrar a título de ejemplo implicaciones del uso de la tecnología en el campo de los números y las operaciones y reflexionar sobre su adecuado uso.

Realizamos inicialmente y con este propósito un breve análisis histórico sobre las competencias requeridas en diferentes épocas para encarar este contenido.

En el siglo pasado, ser competente en Matemática suponía ser competente en el manejo correcto y rápido de algoritmos para obtener resultados de cuentas que incluían cálculos de raíces cuadradas y cúbicas, entre otros. Es más, estos cálculos se aplicaban a elementos de Q_0^+ escritos en forma de fracción y decimal. Para facilitar estos laboriosos cálculos se recurría —ya en el nivel medio— al uso de reglas de cálculo o a las ya olvidadas tablas de logaritmos.

Avanzando en el proceso histórico, la humanidad se ve invadida por recursos tecnológicos. En particular, en el área Matemática, aparece la calculadora, la computadora con su enorme rapidez para graficar y calcular, el video, los juegos electrónicos. La potencialidad de la computadora y los programas matemáticos permiten resolver problemas de las más diversas áreas de la matemática y de las distintas ciencias como la economía, las ciencias de la organización, la biología dejando de importar la dificultad de los cálculos a realizar y cobrando importancia lo conceptual, la modelización del problema a resolver. El resto es de la máquina. Hoy ser competente en Matemática supone poder resolver esos problemas siendo el cálculo mecanizado un instrumento. Pero hay más: la necesidad de los algoritmos discretos, usados en las ciencias de la computación, da lugar a un giro del énfasis puesto en la matemática del continuo hacia la matemática discreta. El nombre "Matemática discreta" puede asustar a nivel inicial, sin embargo, sin mencionarla, podemos ir introduciendo a nuestros alumnos en ella a partir de nociones de combinatoria o de propiedades de los números naturales al alcance de los niños.

Es natural entonces que lo expuesto debe afectar los procesos de enseñanza y de aprendizaje pero…

¿Cómo? ¿De qué manera? ¿A qué nivel?

Recordemos que nuestro marco de referencia lo constituyen los conjuntos numéricos.

En todas las áreas y en particular en el campo que nos ocupa se producen situaciones antagónicas, a saber:

- El cálculo manual se enfrenta al cálculo mecanizado.
- El cálculo mental se enfrenta al cálculo mecanizado.
- Las láminas y frisos se enfrentan a los DVD.
- Los juegos electrónicos se enfrentan a las actividades físicas y mentales de los chicos.
- Las computadoras se enfrentan a los libros y se constituyen en medios de información y consulta permanente, casi únicas.

Ser ajenos a este impacto histórico resultaría inadecuado. Los instrumentos tecnológicos están presentes y atraen la atención de nuestros jóvenes. El desafío es más profundo.

¿Cómo capitalizarlos para lograr todas las competencias que aspiramos tengan nuestros alumnos?

El desafío está propuesto y es necesario crear espacios de reflexión sobre los cambios que deben implementarse en la educación matemática. Invitamos a hacerlo partiendo de un planteo que para nosotras es esencial:

El uso de herramientas tecnológicas es muy importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, debe influir y modificar la Matemática que se enseña y la forma de enseñarla y debe dar lugar a la mejora del proceso de aprendizaje. Para que esto suceda su uso debe ser estudiado y controlado por el docente para que el alumno no pierda el trabajo en papel, el trabajo con material concreto, el trabajo con el libro. Esta no es una tarea fácil para el docente y muy probablemente sea este uno de los hechos por los cuales las herramientas tecnológicas no han sido llevadas al aula más que como simple curiosidad. Por supuesto, el maestro necesita ayuda al respecto y, así como se le han impartido los conocimientos necesarios para encarar otras cuestiones, en los currículos de los profesorados esto es una falta a subsanarse. (Utilizar un software como el GeoGebra necesita de un entrenamiento previo del docente en el mismo. De lo contrario, seguramente estaremos solo jugando sin saber el final del juego.)

El hecho de que una calculadora resulte una herramienta más que eficiente para hacer cálculos debe permitir al docente acrecentar la posibilidad de que los alumnos resuelvan problemas. Los problemas deberán pensarse para que el alumno desarrolle a través de la resolución de los mismos su capacidad de razonamiento y no dedique la mayor parte del tiempo a hacer cuentas.

No estamos diciendo que el cálculo mecanizado no pueda provocar el desarrollo del espíritu crítico, que no pueda resultar un medio eficaz de aprendizaje. Pero, para que esto suceda, el alumno debe realizarlo comprendiendo qué está haciendo. Ello implica tener en cuenta:

- El conocimiento de las propiedades de las operaciones para crear algoritmos diversos.
- El manejo hábil e inteligente de los recursos tecnológicos.
- La capacidad para estimar resultados, que permitirá decidir si el resultado de la calculadora tiene sentido en el contexto del problema.
- La posibilidad de redondear cantidades para estimar con rapidez

De esta manera, el estudio del eje número y operaciones debe cambiar de objetivos.

ANTES	**HOY**
Que el alumno sea capaz de:	Que el alumno sea capaz de:
• realizar operaciones con números decimales de muchas cifras • utilizar algoritmos de cálculo de forma rutinaria • aplicar patrones previamente establecidos • memorizar definiciones	• redondear y truncar • estimar • utilizar las propiedades de las operaciones para crear algoritmos de cálculo • descubrir patrones • interpretar definiciones

A título de ejemplo proponemos problemas que muestran una forma en las que se podrían utilizar instrumentos tecnológicos con los objetivos antedichos.

PROBLEMA 1

Coloca en el visor de tu calculadora el número 90. Sin borrar el 90, ¿qué teclas presionarías para que aparezca el número par siguiente?

PROBLEMA 2

Con tu calculadora halla 3x5. Sin borrar, utiliza ese resultado para hallar 6x5. Sin borrar, utiliza ese resultado para obtener 6x5.

PROBLEMA 3

En una planilla de cálculo de tu computadora confecciona la siguiente tabla.

Ingresa los números correspondientes a "Dividendo" y "Divisor" y, mediante el ingreso de las fórmulas adecuadas, realiza automáticamente las operaciones para obtener los resultados solicitados.

DIVIDENDO	DIVISOR	COCIENTE ENTERO	COCIENTE CON DOS DECIMALES	RESTO	¿QUÉ PORCENTAJE ES EL DIVISOR DEL DIVIDENDO?

Hasta el momento hemos aludido al campo numérico y al uso de la calculadora. Pero, como es sabido, el uso de los recursos tecnológicos transversa las múltiples actividades de los niños, entre ellas: construir formas geométricas, diagramar un escrito, escribir un informe. En especial en Geometría, el uso de un software como el Cabri (u otros similares) es un aporte significativo y motivador para el retorno de esta ciencia al aula.

El docente, en su actividad diaria, ha llevado al aula un sinnúmero de recursos didácticos que han sido un aporte importante en Geometría: el tangram, el geoplano, los policubos, los cuerpos geométricos…, ¿por qué no introducir también softwares educativos? Pero hay que tener presente que es necesario conocer los softwares existentes, su manejo, y construir estrategias de enseñanza-aprendizaje adaptadas a su uso.

La introducción de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza-aprendizaje supone ponderar algunas cuestiones tales como:

- *El valor de la visualización de las formas geométricas a través de un software o un DVD.*
- *La resolución de problemas geométricos con el Cabri u otro sotfware.*
- *La propuesta de problemas que se resuelvan solo con el uso de la calculadora.*
- *El planteo de fórmulas para resolver problemas en una planilla de cálculo.*
- *Los juegos electrónicos para abordar problemas de ubicación, recorridos y formas.*
- *Las computadoras para jugar al ajedrez u otros juegos similares.*
- *La computadora como medio de comunicación en el área.*
- *Internet como medio para crear foros de discusión sobre resolución de problemas.*
- *El uso de la computadora para competencias entre niños de diferentes regiones.*
- *El uso de la Internet como elemento para obtener información.*
- *La capacidad para evaluar la información obtenida por Internet.*

Finalmente nuestra propuesta se sintetiza en:

Enseñar Matemática de forma activa y feliz en el tiempo en el que se desenvuelve el sujeto que aprende. Hoy nos corresponde hacerlo en el siglo XXI.

Propuesta que enriquecemos con las palabras de Miguel de Guzmán (2010):

Nuestros alumnos se encuentran intensamente bombardeados por técnicas de comunicación muy poderosas y atrayentes. Es una fuerte competencia con la que nos enfrentamos en la enseñanza cuando tratamos de captar una parte substancial de su atención. Es necesario que lo tengamos en cuenta constantemente y que nuestro sistema educativo trate de aprovechar a fondo tales herramientas como el vídeo, la televisión, la radio, el periódico, el cómic, la viñeta, la participación directa…

Serie Didácticas

Didáctica de la
Matemática

Enseñar a enseñar Matemática

Liliana Cattaneo
Noemí Lagreca
María Inés González
Noemí Buschiazzo

HomoSapiens
EDICIONES

Didáctica de la matemática : enseñar matemática, enseñar a enseñar matematica /
Liliana Lagreca de Cattaneo ... [et.al.]. - 1a ed. - 1a reimp. - Rosario:
Homo Sapiens Ediciones, 2011.
180 p. ; 21x15 cm. - (Serie Didácticas dirigida por Fernando Avendaño)

ISBN 978-950-808-615-0

1. Formación Docente. 2. Matemática. I. Lagreca de Cattaneo, Liliana
CDD 371.1

1ª edición, mayo de 2010
1ª reimpresión, marzo de 2011

DÍDACTICA DE LA MATEMÁTICA
Enseñar a enseñar Matemática

© 2010 · **Homo Sapiens Ediciones**
Sarmiento 825 (S2000CMM) Rosario | Santa Fe | Argentina
Telefax: 54 341 4406892 | 4253852
E-mail: editorial@homosapiens.com.ar
Página web: www.homosapiens.com.ar

Queda hecho el depósito que establece la ley 11.723
Prohibida su reproducción total o parcial

ISBN N° 978-950-808-615-0

Esta tirada de 1000 ejemplares se terminó de imprimir en marzo de 2011
en **ART de Daniel Pesce y David Beresi SH.** | San Lorenzo 3255
Tel. 0341 4391478 | 2000 Rosario | Santa Fe | Argentina

ÍNDICE

Segunda Parte

Enseñar a enseñar Matemática

5. La enseñanza de los conjuntos numéricos

5.1. **Introducción**

La enseñanza y el aprendizaje de los conjuntos numéricos fueron, son, y probablemente serán, los temas a los que mayor dedicación se les asigna en la educación primaria. El valor instrumental que caracteriza a estos contenidos, como su significado y su valor fenomenológico, constituyen el marco en el que se desarrolla su enseñanza. Es el campo conceptual (cuyos objetivos, estrategias de abordaje, procesos de enseñanza y de aprendizaje y puntualización de competencias a lograr) el que requiere, hoy, un análisis más profundo.

El significado de ser competente en el manejo de los números, en el cálculo mental, escrito y/o mecanizado, ha variado en los últimos años en forma vertiginosa y a esas variaciones no resultan ajenas las diversas posturas didácticas frente a su enseñanza y aprendizaje.

En este capítulo nos dedicaremos a abordar los aspectos que caracterizan el **tratamiento de los conjuntos numéricos en la educación primaria**, teniendo especial cuidado en atender a las sucesivas ampliaciones que de ellos se trabaja en este nivel de la educación que, como sabemos, supone el manejo con los números reales no negativos.

5.2. El conjunto de los números naturales y el cero

El proceso histórico que siguió la construcción de los diversos conjuntos numéricos sirve de referencia para el planteo de la secuenciación organizativa que supone el estudio de los mismos.

Como sabemos, los primeros pasos en la iniciación aritmética comienzan con temas relativos a los procesos de contar, enumerar, cuantificar, ordenar. Tales tareas se realizan usando los números naturales. Estos son los primeros números con los que se trabaja, aun antes de comenzar los estudios escolarizados. También fueron los primeros números que utilizó el hombre desde los albores de la historia, ya que surgieron por las necesidades de contar (¿cuántas ovejas tengo?), comparar (¿son más o menos que los dedos de una mano?), ordenar (¿quién saldrá primero, segundo, tercero, en la competencia?).

Así, por cuestiones de experiencias diarias aparecen los números que nombramos:

uno, dos, tres…

y a cuyo conjunto se lo llama *Números Naturales* y se lo simboliza con la letra N.

Si pensamos en estos primeros pasos por los conjuntos numéricos, nuestra mente nos hace agregar a este conjunto un número singular: "el cero". Dicho número no surge de la experimentación con las tareas que hemos descrito sino que su necesidad está vinculada al hecho de disponer de un símbolo para representar la "nada" y que adquiere especial importancia en la escritura de los números en sistemas de numeración posicionales (Cattaneo, 2001).

Estas razones hacen que, en general, se trabaje con el conjunto N al que se le agrega el cero. Al nuevo conjunto, simbolizado con N_0, se lo denomina conjunto de los *números Naturales y el cero* y es:

$$N_0 = \{\text{números naturales o cero}\}$$

Hemos planteado el significado conceptual de los números que nos ocupan en este comienzo. Sin embargo, es necesario destacar que al abordar estrategias de enseñanza y de aprendizaje de los mismos deben diferenciarse dos aspectos relevantes:

- ***El concepto que el alumno construye de estos números.***
- ***El manejo de los sistemas de numeración como medio por el cual se escriben los números.***

Existe un largo camino a transitar entre el momento en el que el alumno cuenta, numera, cuantifica y el momento en el que aprende a escribir y a reconocer el símbolo por medio del cual representa la cantidad, o sea, el momento en el que maneja el símbolo que representa al número. Un niño puede contar doce caramelos y, sin embargo, puede no saber escribir "12" y mucho menos entender por qué ese número se escribe con el 1 y el 2 en ese orden y lugar.

Lograr la construcción del número doce no significa conocer su escritura.

No existen dudas de que, desde muy temprana edad, el niño cuenta, cuantifica, ordena, sin saber escribir la representación del resultado de sus tareas.

Saber que tres es mayor que dos, surgido de una experiencia simple de vida, ***tener tres caramelos es más que tener dos caramelos***, es una conceptualización muy simple de lograr. Muy diferente es la traducción al plano simbólico y escribir: 3>2.

Hemos planteado el primer gran desafío:

diferenciar la escritura simbólica del concepto

Surgen así cuestiones cuyo análisis llevaremos a cabo:

¿Por qué se debe diferenciar el diez de la decena?
¿Por qué se debe conocer la decena?
¿Cuál es el sentido de escribir la descomposición polinómica de un número? ¿Cuál es la trascendencia de escribir: 123=1c+2d+3u?
¿Por qué los alumnos no pueden expresar que 123 tiene doce decenas y no dos como habitualmente dicen?
¿En qué momento deben trabajarse estas cuestiones?

La respuesta a estas y otras cuestiones similares requiere entender el significado de "Sistema de numeración". En especial de "Sistema de numeración posicional". Ello nos conduce a lograr que el alumno comprenda las leyes que rigen nuestro sistema de numeración y que son las que justifican, por ejemplo, que el 1, el 2 y el 3 escritos consecutivamente y en ese orden permitan escribir el símbolo que representa al número ciento veintitrés.

Analicemos, en primer lugar, el marco teórico en el que se apoya el sistema de numeración decimal con el que habitualmente escribimos los números.

5.2.1. **Sistema de numeración decimal**

A través del tiempo, y en distintas civilizaciones, el hombre representó los números eligiendo para ello:

- ***Figuras o símbolos básicos***
- ***Reglas para combinar esos símbolos, de modo que le permitiesen escribir cualquier número.***

Según cómo eligieron unos y otras surgieron los distintos **Sistemas de numeración.**

En la actualidad, en la mayoría de las aplicaciones, se utiliza el sistema llamado: **Sistema de numeración decimal.**

Este sistema tuvo su origen en la India y fue adoptado por los árabes en el siglo VIII quienes lo introdujeron en Europa cuando extendieron su imperio por este continente. De esto deriva que se lo denomine, también, **Sistema de numeración indoarábigo.**

¿Por qué se lo denomina decimal?

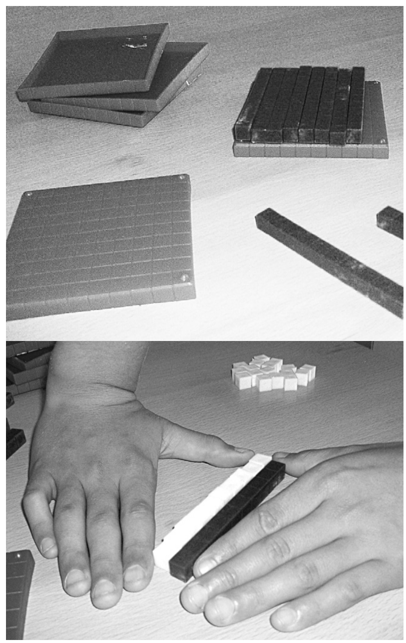
Porque para representar los números se utilizan 10 símbolos básicos:

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

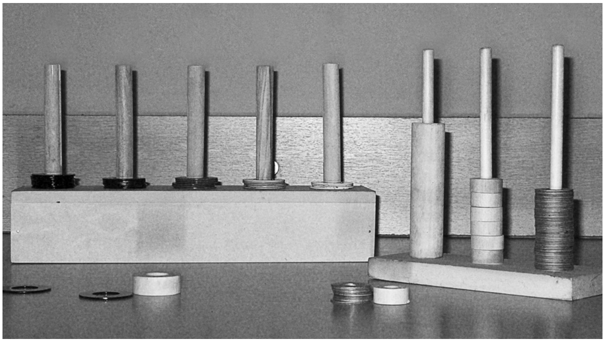
que se conocen con el nombre de “**dígitos**”.

Estas primeras ideas nos permiten concluir por qué resulta sencillo el aprendizaje de los símbolos que representan a los dígitos y cuyo manejo puede ubicarse en muy temprana edad dado que, con la aparición de cada número surge un grafismo diferente del anterior para su representación simbólica. En esta etapa pueden introducirse los materiales concretos estructurados o no, que apoyen este tránsito permanente entre lo real y lo simbólico, como el dominó de Mialaret, el equipo de canje, los ábacos, por nombrar algunos.

• DOMINÓ DE MIALARET



• EQUIPO DE CANJE



• ÁBACO

Un nuevo obstáculo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números surge cuando aparece el diez, cuya escritura no implica la creación de un símbolo nuevo, sino la combinación de los conocidos. Esta combinación supone el concepto de ***sistema posicional de numeración*** y da lugar a la construcción del concepto de **decena**.

En este momento hay que tener en claro algunas ideas:

- ***El número diez aparece como la cantidad que se asocia a un conjunto de diez elementos.***
- ***La decena surge como "el elemento" que equivale o que representa una colección de diez unidades.***
- ***La decena aparece como la primera equivalencia necesaria para encontrar los símbolos que representan números mayores que 9.***

Así, por ejemplo,

¿cómo y por qué se escribe el diez con el 1 y el 0?

Para contestar esta pregunta es preciso puntualizar el concepto de **sistema posicional**.

El sistema adoptado para escribir los números es posicional, porque un dígito representa diferentes valores según la posición que ocupa en la representación de un número.

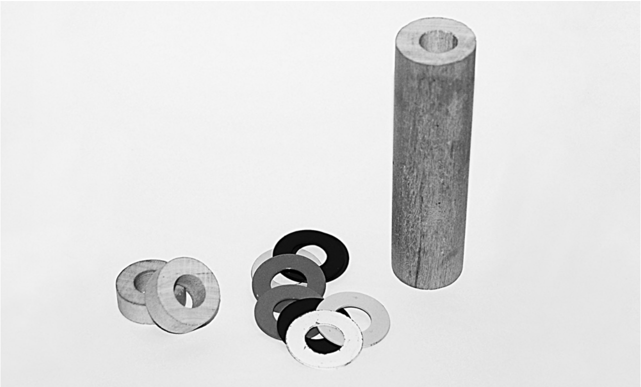
Resumiendo, las reglas que rigen el **sistema de numeración decimal posicional** son:

- ***Todo número se escribe con algunos de los diez símbolos básicos en lugares distintos que se ordenan de derecha a izquierda y se nombran primer, segundo, tercer… lugar.***
- ***Un dígito en un lugar representa un valor diez veces mayor que el mismo dígito ubicado en el lugar inmediato siguiente a la derecha.***

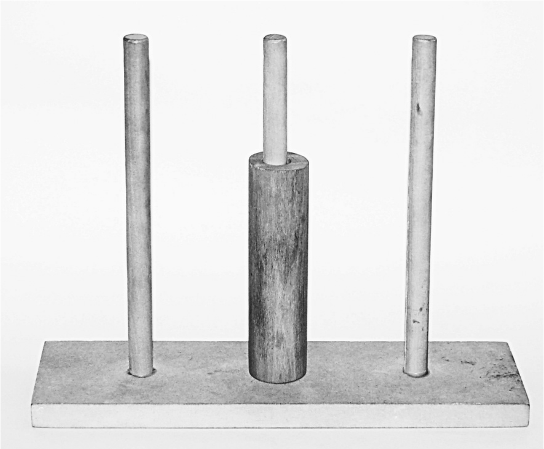
Resulta entonces que para escribir el número **diez** representamos las diez unidades por una unidad escrita en el segundo lugar y completamos el lugar vacío con el dígito cero.

Diez $\longrightarrow$ **10**

La iniciación en el trabajo con un sistema de numeración posicional requiere del manejo de materiales concretos. Tal vez, uno de los más adecuados sea el ábaco ya que la posición de los diversos barrales permite visualizar las equivalencias entre las unidades de los diversos órdenes, según los lugares que se ocupen. Existen diferentes tipos de ábacos, pero creemos que el primer acercamiento de los niños a ellos debe hacerse a través del llamado **ábaco de los tamaños**, donde las equivalencias se plantean no solo por la posición sino también por el tamaño de las arandelas. En estos ábacos el tamaño de dichas arandelas resulta un referente visual muy significativo.

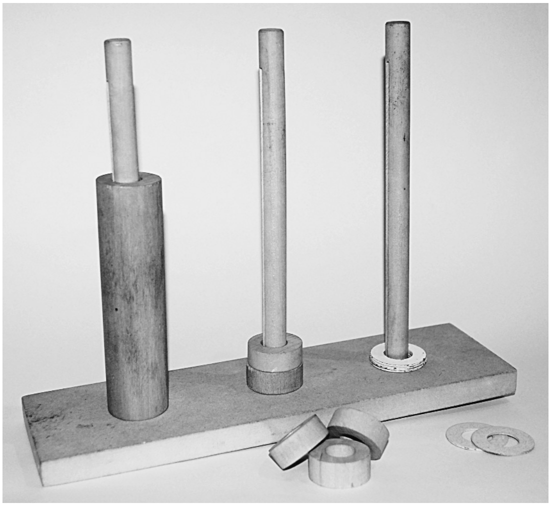


Según este tipo de ábacos el diez se representa:



• Una unidad en el segundo barral equivale a 10 unidades colocadas en el primer barral.

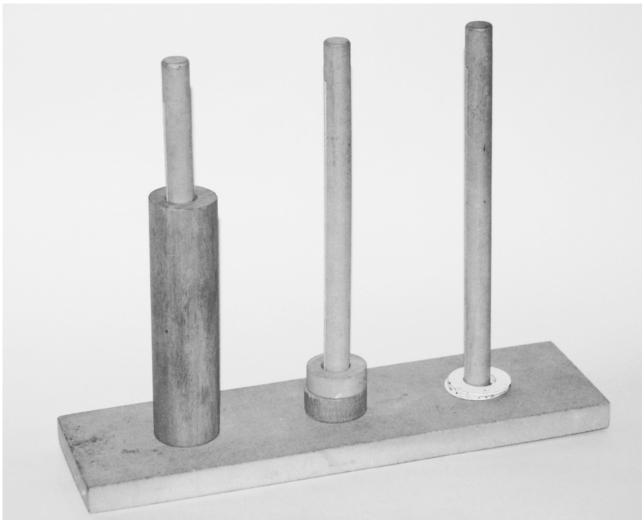
Este tipo de ábaco, que atiende al atributo **tamaño** de las arandelas para plantear las equivalencia puede también usarse para escribir números mayores que el número 99. Para esto será necesario trabajar con ábacos de más barrales y con fichas de mayor tamaño.



Concretamente, consideramos que el alumno del primer ciclo debe ser competente para escribir

$$\begin{aligned} 123 &= 1c + 2d + 3u \\ &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \end{aligned}$$

y, en consecuencia, poder representar:



$$\begin{aligned} 123\ \mathrm{u} &= 1\mathrm{c} + 2\mathrm{d} + 3\mathrm{u} = \\ &= 12\ \mathrm{d} + 3\mathrm{u} \end{aligned}$$

Descomposición
en unidades de los
diversos órdenes

En resumen, en el primer ciclo se deben ir construyendo, en forma precisa, las reglas que rigen nuestro sistema de numeración. De este modo el alumno será competente para escribir los símbolos que representan cada número, comprendiendo su estructura, su orden de magnitud y usándolos con significatividad.

Numerosos problemas pueden identificar las metas que suponen el manejo de los números naturales y el cero en lo que hace a su representación decimal. Solo a título de ejemplo proponemos dos problemas:

PROBLEMA 1

¿Cuántas decenas enteras hay

en 500? en 720? en 810? en 980? en 210?

PROBLEMA 2

A partir del número 5136:

a) escribe de menor a mayor todos los números que se obtienen conmutando sus dígitos, incluyendo el número original.

b) ¿cuál de esos números es el que tiene mayor cantidad de unidades?, ¿cuál el que tiene la menor cantidad de decenas?

c) ¿cuáles de los números obtenidos tienen más de 50 centenas?

Hemos pretendido en esta sección resaltar a través de lo expuesto el valor de los materiales concretos para la construcción de los conceptos. Los llamados equipos de canje, multibase, ábacos, por citar algunos, deben estar presentes en el aula y al alcance de la manipulación de los niños.

Hemos, además, comentado sobre la importancia del "ábaco de los tamaños". Sin embargo, creemos que después de presentar la centena puede modificarse esta situación de establecer equivalencias teniendo en cuenta el tamaño de las arandelas y recurrir a otros códigos, como el color. Es oportuno en ese caso utilizar arandelas de un mismo color pero en un degradé de tonos del mismo, hasta llegar al blanco ("arandelas más oscuras representan valores mayores"). El color a utilizar puede ser arbitrario, pero ya que es empleado por la Geografía el degradé de azul para marcar las profundidades de los mares, podríamos utilizar el mismo degradé. Se puede considerar el blanco para representar las unidades, el celeste para las decenas e ir incrementado el tono para las unidades de mayor orden. El número de barrales a utilizar en el ábaco dependerá de la magnitud del número que se quiere representar.

Por ejemplo:

- *10 fichas blancas equivalen a 1 ficha celeste claro (10u = 1d)*
- *10 fichas celeste claro equivalen a 1 ficha celeste más oscuro (10d = 1c)*
- *10 fichas celeste más oscuro equivalen a 1 ficha azul (10c = 1d)*

y así sucesivamente.

Este ábaco puede ser útil para trabajar sistemas de numeración posicionales en cualquier base, teniendo en cuenta que las reglas básicas de tales sistemas son las mismas.

5.3. **Operaciones con los números de N_0**

Hasta este momento hemos hecho referencia a los números en su aspecto conceptual y a sus formas de representación. Resulta natural tratar en este momento el significado de las operaciones entre ellos. Si nos posicionamos en el marco teórico que sustenta el concepto de operación en N_0, como la función que a cada par de números de N_0 le hace corresponder otro número de N_0, resulta que las operaciones posibles en este conjunto son la adición y la multiplicación[1]. La sustracción ($a - b$) y la división ($a{:}b$) aparecen como las relaciones inversas de ellas, cuando puedan definirse.

En N_0 se definen:

$$a - b \text{ si } a \geq b \quad y \quad a{:}\, b \text{ si } a \text{ es múltiplo de } b \text{ y } b \neq 0$$

1. El mcm y el dcm son operaciones de N.

Al tratar cada operación o la correspondiente relación inversa surgirán dos cuestiones que responden a competencias matemáticas distintas:

- ***Comprensión conceptual de la operación.***
- ***Construcción de algoritmos que permitan obtener el resultado de la operación.***

LA ADICIÓN

En lo que respecta a la adición, concepto que partirá de la unión de conjuntos sin elementos comunes, su aprendizaje es simultáneo con el de los dígitos. En el trabajo con dígitos se presentan sumas que permiten conocer la estructura aditiva de los mismos. Así, por ejemplo: 1+4; 4+1; 2+3; 3+2; 5+0; 0+5 son sumas que determinen al número 5.

Es en estos primeros pasos del aprendizaje donde se descubren las propiedades que caracterizan a esta operación:

- ***Conmutativa***
- ***Asociativa***
- ***Existencia de elemento neutro***

Estas propiedades serán reconocidas a través de situaciones concretas, descubiertas como regularidades, a partir de la multiplicidad de actividades que se propongan. En particular, la propiedad *asociativa* surgirá con el planteo de sumas con más de dos sumandos. Por ejemplo, ¿cómo obtener 2 + 3 + 1? Los paréntesis son imprescindibles para dar sentido a la operación (la suma es una operación binaria). El uso de los mismos nos permite escribir:

$$2 + 3 + 1 = (2+3) + 1= 2 + (3+1)$$

El significado y el valor de las propiedades de la suma constituyen el marco teórico necesario para construir los algoritmos de cálculo y lograr las competencias para justificarlos, comprenderlos y utilizarlos.

A medida que se conocen números de mayor magnitud, el alumno se enfrentará a cálculos del tipo:

$$12+15 \qquad 35+7 \qquad 123+389$$

cuya resolución dará lugar a la construcción de algoritmos de cálculo.

El alumno que conoce las propiedades de la suma cuenta con los recursos necesarios para resolverlas, independientemente de la enseñanza sistemática de un mecanismo. Más aún, independientemente de caratular a las sumas como “sumas con dificultad” o su equivalente “suma de llevarse”, como habitualmente se las identificaba.

Los algoritmos o métodos de resolución se basan en dos nociones básicas:

- ***Las propiedades de las operaciones***
- ***La estructura del sistema de numeración adoptado***.

Proponemos algunas estrategias para resolver sumas:

¿Cuál es el resultado de sumar 18+23?

En forma horizontal:

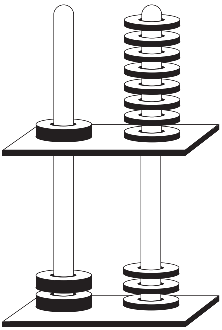
$$\begin{aligned}&18 + 23\\ &=(10+8)+(20+3)=\\ &=(10+20)+(8+3)=\\ &=30+11=\\ &=30+(10+1)=\\ &=(30+10)+1=\\ &=40+1= 41\end{aligned}$$

Las propiedades asociativa y conmutativa dan sentido al algoritmo

En forma vertical:

$$\begin{array}{c} 18 \\ + \\ 23 \\ \hline 11 \\ + \\ 30 \\ \hline 41 \end{array}$$

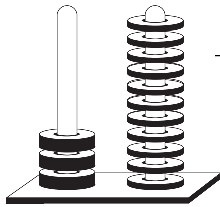
Empleando el ábaco:



18 ➤ **1**d + **8**u

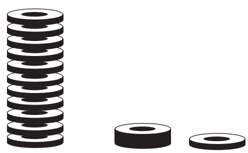
23 ➤ **2**d + **3**u

Se saca la varilla y resulta:

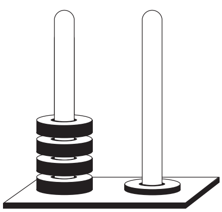


$$\begin{array}{rcccc} & \mathbf{1}\text{d} & + & \mathbf{8}\text{u} \\ + & \mathbf{2}\text{d} & + & \mathbf{3}\text{u} \\ \hline & \mathbf{3}\text{d} & + & \mathbf{11}\text{u} \end{array}$$

Con las 11 unidades se forma
1 decena y nos sobra 1 unidad.



Entonces:



$$\begin{array}{rcccc} & \mathbf{3}\text{d} & + & \mathbf{11}\text{u} \\ + & \mathbf{1}\text{d} & + & \mathbf{1}\text{u} \\ \hline & \mathbf{4}\text{d} & + & \mathbf{1}\text{u} \end{array}$$

41

En forma práctica:

$$\begin{array}{r} \mathbf{18} \\ + \quad \\ \mathbf{23} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} & \mathbf{1d} + \mathbf{8u} \\ + & \\ & \mathbf{2d} + \mathbf{3u} \\ \hline & \mathbf{3d} + \mathbf{11u} \\ & \mathbf{1d} + \mathbf{1u} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{18} \\ + \quad \\ \mathbf{23} \\ \hline \mathbf{41} \end{array}$$

LA SUSTRACCIÓN

El trabajo, en estas primeras etapas del aprendizaje, supone atender a la reversibilidad del pensamiento matemático. En este marco, el trabajo con la suma permitirá la construcción del concepto de sustracción que simbólicamente expresamos:

Si $a \geq b$ entonces,

$$a - b = c \Leftrightarrow c + b = a$$

que coloquialmente equivale a decir que restar dos números *a (minuendo)* y *b (sustraendo)* es encontrar un tercer número *c (diferencia o resta)* que sumado a *b* dé por resultado *a*. La condición de que el minuendo sea mayor o igual al sustraendo permite que la resta tenga sentido en N_0.

Es necesario, en el caso de la sustracción, comprender el concepto de la misma y evitar confundirlo con definiciones apoyadas en acciones concretas tales como “quitar”, “sustraer”, etc. y que, generalmente, al matematizarlas se expresan o resuelven con restas.

Numerosos problemas de la vida cotidiana suponen como instrumento de resolución una resta. Por ejemplo:

- *En el jardín hay 62 flores, corto 10, ¿cuántas quedan?*
- *En el curso de Luis hay 23 niños, 18 son nenas, ¿cuántos son varones?*
- *¿Cuál es la diferencia entre el mayor número de dos cifras y el menor número de dos cifras iguales?*

- *La capacidad máxima de pasajeros sentados en un ómnibus es de 45. En la estación Mariano Moreno, donde comienza el recorrido, subieron 24. ¿Cuántos asientos libres quedan? ¿Cuántos pasajeros pueden subir, aún?*

Cada uno de ellos se resuelve con una resta, utilizada con distintos usos (sustraer, buscar la diferencia, buscar cuánto le falta). Es necesario atender y plantear los diversos usos y aplicaciones de un concepto que matemáticamente es único.

¿Qué algoritmos permiten resolver "las restas"?

Los algoritmos para resolver restas son variados y pueden ser construidos por los mismos alumnos a partir del planteo de situaciones concretas.

Lucía tiene 17 años, ¿cuánto le falta para cumplir 30 años?

$$\begin{array}{ccc} 30 & \xrightarrow{+3} & 33 \\ - & & - \\ 17 & \xrightarrow{+3} & 20 \\ \hline ? & & 13 \end{array}$$

Usamos restas equivalentes

Se resuelve una resta equivalente a la dada cuyo sustraendo termine en cero.

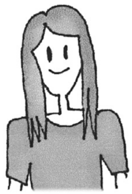
Concluimos que:

$$\begin{array}{c} 30 \\ - \\ 17 \\ \hline 13 \end{array}$$

A Lucía le faltan 13 años para cumplir 30.

Algunas estrategias que pueden utilizar los alumnos para resolver las restas se exhiben en el siguiente problema:

¿40-18?



$$\begin{array}{r} 40 \\ - \\ 18 \\ \hline \boxed{\ldots\ldots} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 42 \\ - \\ 20 \\ \hline \boxed{\ldots\ldots} \end{array}$$

Transforma en restas equivalentes

$$\begin{array}{r} 40 \\ - \\ 18 \\ \hline \boxed{\ldots\ldots} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 3d + 10u \\ - \\ 1d + 8u \\ \hline \boxed{\ldots\ldots + \ldots\ldots} \end{array}$$

Pasa decenas a unidades

- **Buscá "lo que le falta"**
  al minuendo para llegar al sustraendo

"De 18 para llegar a 20 faltan 2.
De 20 para llegar a 40 faltan 20.
En total para llegar de 18 a 40 faltan 22".

40 - 18= ....

El gran desafío consiste en lograr que el descubrimiento de los distintos algoritmos sea capitalizado por el uso autónomo de los mismos.

El desarrollo del pensamiento matemático de cada niño es el que le permitirá elegir en cada momento un algoritmo adecuado o crear el propio. La era tecnológica requiere un mejor manejo de los conceptos y la independencia de criterios para la elección de procedimientos.

Para reflexionar

Siglo XXI
¿Cómo un alumno efectúa este cálculo?

$$\begin{array}{r} 2000 \\ -\ 1998 \\ \hline \end{array}$$

LA MULTIPLICACIÓN

Continuando con el manejo de los números naturales y el cero abordaremos algunas cuestiones de la otra operación mencionada: la **multiplicación**. En este caso deben analizarse cuatro situaciones diferentes que influyen con gran peso en la organización de la tarea en el aula:

- ***El concepto de multiplicación en N_0.***
- ***Las propiedades de la multiplicación.***
- ***Los resultados de las multiplicaciones entre dígitos (tablas de multiplicar).***
- ***Los algoritmos de la multiplicación.***

Es preciso, antes de planificar cualquier proceso de enseñanza, definir el paradigma a partir del cual se abordan estas ideas.

Comencemos por el concepto de multiplicación en $\boldsymbol{N_0}$

$$a \in N_0,\ n \in N,\ n \geq 2, \text{ entonces:}$$

$$a.n = \overbrace{a + a + \ldots + a}^{n}$$

A partir de la definición resulta, por ejemplo, que:

$$2 \times 5 = 2+2+2+2+2$$
$$3 \times 4 = 3+3+3+3$$
$$0 \times 6 = 0+0+0+0+0+0$$
$$1 \times 3 = 1+1+1$$

En todos los casos la multiplicación se traduce en una suma de sumandos iguales (dos por lo menos). De esto se deduce que las expresiones $n \times 0$ y $n \times 1$ con $n \in N_0$ carecen de sentido en el marco de la definición, ya que no se pueden escribir como suma de sumandos iguales.

Se hace entonces necesario, para dar sentido a estas expresiones, completar la definición anterior, conviniendo que:
Si $n \in N_0$,

$n.1 = n$ *(Cualquier número multiplicado por 1 da el mismo número)*
$n.0 = 0$ *(Cualquier número multiplicado por 0 da cero)*

Estos convenios no son caprichosos, tienen su razón de ser. Si no se definen de este modo no valdrían las propiedades de las operaciones que conocemos en N_0.

El manejo de estos conceptos resulta necesario para la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

A partir de la definición de multiplicación surgen las propiedades de la misma, que recordamos son:

- ***Conmutativa***
- ***Asociativa***
- ***Existencia de elemento neutro***

Por simple aplicación de la definición, se puede conocer el resultado de la multiplicación de cualquier par de números. Así, por ejemplo, si se quiere determinar el número de asientos que hay en un cine que tiene 15 filas con 12 asientos en cada una, bastará con hacer:

$$15+15+15+15+15+15+15+15+15+15+15+15$$

Esta estrategia de solución es eficiente, aunque laboriosa, por lo que es necesario buscar otras alternativas de cálculo, otros algoritmos o procedimientos de cálculo de la multiplicación.

La construcción de los algoritmos implica el uso de las propiedades de la suma y de la multiplicación, como así también de la propiedad que las vincula: **la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma en N_0**, que simbólicamente expresamos:

$$(a+b).c = a.c + b.c$$

Solo a título de ejemplo y como materia de discusión, proponemos algunos algoritmos para resolver una multiplicación:

Un ejemplo: Obtener 12 x 2

En forma horizontal: 12 x 2 = (10 + 2).2 = 10.2+2.2 = 20 + 4 = 24

En forma vertical:

$$\begin{array}{ccc} 12 & \longrightarrow & 1d + 2u \\ \underline{\times 2} & & \underline{\qquad \times 2} \\ ? & & 2d + 4u \\ & & 24 \end{array}$$

Otro ejemplo: Obtener 12 x 13

En forma horizontal: 12 x 13 = 12.(10 + 3) = 12.10 + 12.3 = 120 + 36 = 156

En forma vertical:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \text{x } 10+3 \\ \hline 36 \\ 120 \\ \hline 156 \end{array}$$

La aplicación ágil y exitosa de estos algoritmos u otros similares requiere el conocimiento nemotécnico de los resultados de las multiplicaciones entre dígitos, que puede ser facilitado por el uso de las propiedades conmutativa y asociativa.

LA DIVISIÓN

El trabajo sobre la multiplicación y el desarrollo del pensamiento reversible constituyen los elementos básicos para la construcción del concepto de división. En efecto, la división surge como la relación inversa de la multiplicación

$$\boldsymbol{a; c} \in N_0, \boldsymbol{b} \in N; \text{ entonces } \quad a : b = \text{c} \Leftrightarrow b.c. = a$$

O sea:

$$8 : 2 = 4 \Leftrightarrow 4 \text{ x } 2 = 8$$
$$15 : 5 = 3 \Leftrightarrow 5 \text{ x } 3 = 15$$

Estas cuestiones se traducen en el plano didáctico a la necesidad de trabajar simultáneamente la multiplicación y la división.

Por ejemplo, al trabajar la multiplicación 8 x 2 surgirán simultáneamente las divisiones 16 : 2 y 16 : 8

$$
8 \text{ x } 2 = 16 \quad
\begin{array}{l}
\nearrow \quad 16 : 2 = 8 \longrightarrow \begin{array}{rl} & 16 \;\lfloor\, 2 \\ - & \underline{16} \quad 8 \\ & \;\; 0 \end{array} \\[2em]
\searrow \quad 16 : 8 = 2 \longrightarrow \begin{array}{rl} & 16 \;\lfloor\, 8 \\ - & \underline{16} \quad 2 \\ & \;\; 0 \end{array}
\end{array}
$$

Más aún, el trabajo conjunto de la multiplicación y la división permite introducir la idea de múltiplo y divisor. Para el ejemplo anterior decimos que:

16 *es múltiplo de* 2	*o*	2 *es divisor de* 16
16 *es múltiplo de* 8	*u*	8 *es divisor de* 16

En la educación primaria se trabajan, además, divisiones en las que el dividendo no es múltiplo del divisor. Por ejemplo:

35:8 ó 45:7

cuyo tratamiento supone la introducción de un nuevo concepto: el de ***división entera***.

¿Cuál es la idea de división entera?

Dados dos números a y b naturales con $b \neq 0$, la expresión:

$a{:}b$ que simbolizamos $a \,\lfloor\!\underline{\; b \quad}$

significa hallar dos números c y r tales que:

$r = a - b.c$ y c es el mayor entero posible

$$
\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & c \end{array}
$$

Es decir, significa hallar *c* y *r*, números de de N_0 tales que:

- r sea la diferencia entre *a* y *bc* ($r = a - b.c$ o equivalentemente: $a = b.c + r$)
- c sea el mayor entero posible que verifique lo anterior

Estos números c y r tienen nombre, son respectivamente el cociente entero y el resto de la división entera. Así podemos resumir diciendo:

*Dados dos números **a** y **b** naturales con **b** ≠ 0 se llama cociente entero (o cociente) al **mayor** entero **c** que multiplicado por **b** da un producto **menor o igual** que **a**; y se llama resto **r** a la diferencia entre **a** y ese producto **b.c**. Evidentemente, **r** es menor que **b**.*

¿Cómo se hallan el cociente y el resto de una división entera?

Para responder estas preguntas trabajamos sobre un ejemplo:

¿Cuáles son el cociente y el resto de 215: 9?

o bien, contextualizando la cuestión, con el problema:

> ¿Cuál es la mayor cantidad de caramelos que recibe cada uno de los 9 niños entre quienes se reparten equitativamente 215 caramelos?, ¿cuántos caramelos sobran?

La determinación de ambos números se realiza por aproximaciones sucesivas:

¿Qué número multiplicado por 9 *da "próximo" a* 215*?*

O, contextualizando el problema:

¿Cómo se reparte 215 entre 9?

Se empieza por "repartir" a cada niño caramelos según el total de caramelos de los que se dispone.

Una respuesta inicial podría ser: 10 ya que 10 x 9 = 90, ¡pero restan 125! (125 no es menor que 9)

$$\begin{array}{r|l} 215 & \underline{\;\;9\;\;} \\ 125 & 10 \end{array}$$

¡Falta repartir los 125! La pregunta ahora es:

¿Qué número multiplicado por 9 *da "próximo" a* 125*?*

La respuesta puede ser nuevamente 10 ya que 10 x 9 = 90, pero… ¡ahora sobran 35! (y 35 no es menor que 9)

$$\begin{array}{r|l} 125 & \underline{\;\;9\;\;} \\ 35 & 10 \end{array}$$

¿Qué número multiplicado por 9 *da "próximo" a* 35*?*

La respuesta es: 3, porque 3 x 9 = 27 y el resto es 8 (ya que es menor que 9).

$$\begin{array}{r|l} 35 & \underline{\;\;9\;\;} \\ 8 & 3 \end{array}$$

***El cociente entero es* 23 *y el resto* 8.**

Una disposición práctica del proceso realizado es:

$$\begin{array}{r r|l}
 & 215 & \underline{\;\;9\;\;} \\
 & \underline{-90} & \left.\begin{array}{r} 10 \\ \\ 10 \\ \\ 3 \end{array}\right\} \; 10 + 10 + 3 = \underset{\textit{cociente entero}}{\underset{\downarrow}{23}} \\
 & 125 & \\
 & \underline{-90} & \\
 & 35 & \\
 & \underline{-27} & \\
\textit{resto} \longrightarrow & 8 &
\end{array}$$

verificándose que:

$$23 \times 9 + 8 = 215$$

Este algoritmo no es más que la reproducción de una experiencia concreta. Si una persona tiene que repartir 215 caramelos entre 9 chicos es probable que comience dándole 10 a cada uno. Cuando vea que le quedan muchos aún, les dará otros 10 y el proceso continuará hasta que le quede una cantidad que no le alcance para repartir entre los niños sin fraccionarla.

Nuestra propuesta no es la mecanización de un algoritmo. Es importante que exista un proceso creado por el alumno para obtenerlo.

Por último, observamos que el tradicional algoritmo de cálculo de la división entera no es más que la aplicación de este método pero descomponiendo el dividendo convenientemente, en unidades de distinto orden, como mostramos:

¿Cuál es el resultado de dividir 63 entre 3?

$$\begin{array}{r|l} 63 & \underline{\;3\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 6d + 3u \;|\underline{\;3\quad} \\ - & \underline{6d \qquad\quad}\;\; 2d + 1u \\ & 0d + 3u \\ & \underline{\quad - 3u} \\ & \quad\;\; 0u \end{array}$$

Para escribirlo más sencillo, podemos hacer:

$$\begin{array}{rl} & 63 \;|\underline{\;3\quad} \\ - & \underline{6\;\;}\;\;\; 21 \\ & 03 \\ - & \underline{\;\;3} \\ & \;\;0 \end{array}$$

MÚLTIPLO COMÚN MENOR Y DIVISOR COMÚN MAYOR

Hasta el momento hemos trabajado con las operaciones suma y multiplicación y con sus relaciones inversas (resta y división) entre elementos de N_0. Sin embargo, y a pesar de que en este libro no las trataremos, queremos rescatar el valor de dos operaciones en N_0: Múltiplo Común Menor [2] y Divisor Común Mayor cuyo valor conceptual debe ser analizado como instrumento en la resolución de problemas y no meramente como herramienta para buscar el denominador común en la suma de fracciones (*mcm*) o para simplificar fracciones (*dcm*).

Rescatamos, como ya dijimos, el valor de estas operaciones enunciando problemas que consideramos importante llevar al aula.

PROBLEMA 3

Tengo una varilla metálica que puedo dividir en trozos iguales ya sean de 8 cm, o de 10 cm o de 15 cm de longitud, sin que le falte ni sobre nada. ¿Qué longitud tiene la varilla si sé que tiene menos de 2 m de longitud?

PROBLEMA 4

Para obsequiar a los niños en la fiesta de cumpleaños se dispone de 30 caramelos, 18 chocolatines y 24 chupetines. Se desea colocarlos en bolsitas de modo que cada una contenga la misma cantidad de cada golosina. ¿Cuántas bolsitas podrán armarse con esas golosinas? ¿Cuántas golosinas de cada clase habrá en cada bolsita?

2. Leer sección de Competencias Matemáticas de este libro.

5.4. El conjunto de los números racionales no negativos

Hemos trabajado en la sección anterior con los números de N_0, trabajo esencial en el primer ciclo de la enseñanza primaria. Sin embargo, y en este nivel, surgen y se plantean problemas con la idea de "repartir" en partes iguales que no tienen solución en este conjunto. Nos referimos a situaciones como:

Repartir equitativamente 2 chocolates entre 5 niños

En la práctica, este problema, se resuelve sencillamente partiendo el chocolate en partes iguales. Pero…

¿cómo expresar matemáticamente el resultado de este hecho,
que se asocia a la cuenta 2:5?

Sabemos que si se llama x al número que representa el "resultado" tendremos:

$$2 : 5 = x$$

que, de acuerdo con la definición de cociente, debe verificar:

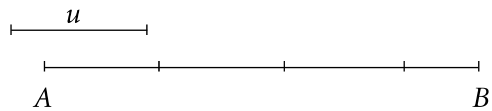
$$x.5 = 2$$

Sin embargo, no existe en N_0 un número x que cumpla tal condición.

Creemos que los docentes tienen que tener muy claro que ciertos problemas "exigen" para su resolución ampliar el conjunto N_0.

Hemos aludido a un simple problema de división. No obstante, existen otras situaciones que plantean la misma exigencia. Lo veremos en un caso relativo a medición, por ejemplo la medición de una longitud donde la unidad elegida para medir no "entra" un número entero de veces en el objeto a medir. Así, por ejemplo, si queremos medir el segmento AB

tomando como unidad el segmento u encontramos que la medida de $\overline{AB}$ con respecto a u no es número de N_0.



Ningún número de N_0 multiplicado por u da la medida de $\overline{AB}$.

Es importante notar que las dos cuestiones que hemos planteado provienen de un problema algebraico común que tiene que ver con el hecho de que:

Conocidos dos números naturales *m* y *n* (pudiendo *m* ser cero) no es posible expresar con un natural el cociente $m : n$

o, equivalentemente,

Conocidos dos números naturales *m* y *n* (pudiendo *m* ser cero) no es posible hallar un natural *x* tal que:

$$x \,.\, n = m$$

Para resolver cuestiones como estas, se crean los **números racionales no negativos** ampliando $\mathbf{N_0}$.

Creemos oportuno destacar que el aprendizaje de los *números racionales no negativos* dependerá, en gran parte, de que el alumno comprenda las razones que motivaron la ampliación del conjunto N_0. Pero, si bien es importante conocer las razones de su creación, debemos ir más allá y, por empezar, debemos definirlos.

¿Qué es un número racional no negativo?

Un número es un racional no negativo cuando puede expresarse en la forma $\frac{p}{q}$ (fracción) con $p \in N_0$ y $q \in N$

Así, $\frac{2}{3}$; $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2}$; $0 = \frac{0}{5}$ son números racionales no negativos

Estos números permiten dar respuesta a los problemas anteriores escribiendo en el primero:

$$2:5 \ \frac{2}{5}$$

y, en el segundo:

la medida $\overline{AB}$ respecto de u es $\frac{7}{2}$

Los números $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{2}$ resuelven situaciones para las que los números de N_0 no son suficientes.

Al conjunto de todos los números racionales no negativos se lo simboliza con Q_0^+. Así, podemos decir que:

$\frac{7}{2}$ es un número racional no negativo,

o que:

$$\frac{7}{2} \in Q_0^+.$$

Observemos que los números de N_0 pueden representarse como una fracción donde el numerador es múltiplo del denominador.

Por ejemplo:

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{15}{3}$$

Por esto, todo número de N_0 es un número de Q_0^+.
Recordemos entonces:

- **Se simboliza Q_0^+ al conjunto de los números racionales no negativos**
- **Todo número de N_0 es un racional no negativo. Es decir:**
  $N_0 \subset Q_0^+$

"El poder expresar mediante un número el resultado de una división nos mostró uno de los usos del número racional. Sin embargo, estos números creados por los matemáticos pueden emplearse para expresar otras cuestiones" 🕮 Buschiazzo (2008).Veamos algunas de ellas.

Las fracciones pueden representar parte de un todo.

Mamá compró 2 docenas de naranjas.
Dibuja las naranjas de acuerdo a cómo las fue repartiendo, sabiendo que:

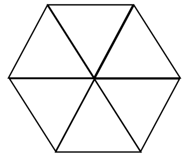
- Colocó $\frac{1}{6}$ de las naranjas en una canasta,
- guardó $\frac{1}{2}$ del total de las naranjas en un cajón de la heladera,
- embolsó $\frac{1}{3}$ de las naranjas que compró.

Las fracciones pueden expresar un cociente.

Tengo 3 turrones iguales para repartir equitativamente entre 5 niños. ¿Qué fracción le corresponde a cada uno de los niños?

Las fracciones pueden expresar una probabilidad.

Marcela hizo un barrilete con forma de exágono. Como es centralista pintó, alternadamente, un triángulo azul y otro amarillo.



Al remontar su barrilete se le rompe uno de los triángulos,

¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo que se haya roto sea uno azul?

Las fracciones pueden expresar una razón.

Colorea de rojo las bolitas que correspondan, sabiendo que 2 de cada 3 son rojas.

¿Cuántas son rojas? ¿Qué fracción representan las rojas?

Las fracciones pueden expresar un porcentaje.

Se ha vendido un departamento en $80 000. La mitad se pagó al contado. El resto se pagó en cuotas con un recargo del 20%.

¿Cuál es el importe de cada cuota?

Es importante que desde muy temprana edad el alumno conozca los distintos significados con los que se utilizan las fracciones, pero sin desconocer el significado de los números que representan.

Por último, queremos observar que los números de Q_0^+ pueden escribirse de otra forma llamada: "*forma decimal*". Así, los números racionales no negativos pueden adoptar dos formas de representación: fraccionaria y decimal. Veamos un ejemplo:

Forma fraccionaria	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{7}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Forma decimal	0.5	0.4	0.333…	$1.\overline{428571}$

Estas formas de escritura han motivado que a los números de Q_0^+, por extensión de lenguaje, se los llame números fraccionarios o números decimales cuando, en realidad, son los números racionales no negativos representados de distinta forma.

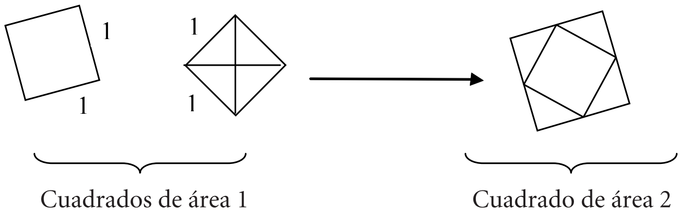
Según la forma que se utilice para representar los elementos de Q_0^+, surgen algoritmos diferentes para las operaciones.

Forma fraccionaria	**Forma decimal**
$\frac{1}{2} + \frac{12}{10} = \frac{5}{10} + \frac{12}{10} = \frac{17}{10}$	$0{,}5 + 1{,}2 = 1{,}7$ $\begin{array}{rr} 0{,}5 & 0u + 5 \text{ déc} \\ 1{,}2 & 1u + 2 \text{ déc} \\ \hline 1{,}7 & 1u + 7 \text{ déc} \end{array}$
$\frac{1}{2} \times \frac{12}{10} = \frac{1 \times 12}{2 \times 10} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$	$0{,}5 \times 1{,}2 = 0{,}60 = 0{,}6$

5.5. Los números reales no negativos

En los últimos cursos de escolaridad de la educación primaria se plantean problemas para cuya solución resultan insuficientes los números racionales no negativos. Es oportuno atender a ellos a los efectos de completar el campo numérico requerido en este nivel.

Un problema que para los alumnos no tiene dificultades aparentes es el de hallar el lado de un cuadrado de área 9, por ejemplo. Sin embargo, si el área es 2 la resolución del problema no es posible dentro de los conjuntos numéricos conocidos. El alumno podría suponer entonces que no existe un cuadrado de área 2 pero esta duda es fácilmente superada si construimos dicho cuadrado usando dos cuadrados de lado 1 (es decir dos cuadrados de área 1). En la figura mostramos cómo hacerlo (los 4 triángulos en que dividimos uno de los cuadrados de área 1 los agregamos al otro).



Para encontrar la medida del lado de este nuevo cuadrado resultan insuficientes los números de Q_0^+, pues se puede demostrar que no existe ningún número racional no negativo cuyo cuadrado sea 2. Es decir, no existe ningún número en forma de fracción ni en forma decimal, aunque tenga infinitas cifras decimales periódicas, cuyo cuadrado sea 2.

Sin embargo, hemos construido un cuadrado de área 2, es decir, podemos asegurar que existe y, en consecuencia, debe existir un número que sea la medida de su lado. No es objetivo de esta publicación abundar sobre las características de estos números. Bastará por el momento con presentarlo. El número cuyo cuadrado es 2 es un número con infinitas cifras decimales no periódicas, que se simboliza $\sqrt{2}$ (se lee raíz de 2) y cuyas primeras cifras son:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$$

Desde un plano didáctico debemos pensar sobre la necesidad o no de aludir a estos números no racionales, dado que el problema planteado no reviste mayor interés en el nivel primario. Nuevamente recurrimos a las mediciones para tratar de reflexionar sobre la cuestión planteada.

Un problema de la escuela primaria es la medición de la longitud de una circunferencia considerando como unidad de medida el diámetro de la misma. No resulta novedoso que esta situación presente la misma problemática que la de buscar la medida del lado de un cuadrado de área 2. Tampoco en este caso existe ningún número racional no negativo que multiplicado por la longitud del diámetro dé la longitud de la circunferencia. Resolver este problema necesita del número que simbolizamos con π (pi) que no es racional pues no se puede escribir en forma de fracción.

La representación decimal de π tiene infinitas cifras decimales no periódicas, sus primeras cifras son:

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

Los números positivos que tienen infinitas cifras decimales no periódicas se llaman irracionales positivos. A título informativo, observamos que el conjunto de los números racionales no negativos unido con el conjunto de los que no se pueden escribir como fracción (irracionales positivos) constituyen el conjunto de la números reales no negativos.

No creemos que este tema deba ser objeto de estudio en la escuela primaria, pero sí que el docente debe tener en cuenta las características y los usos de los distintos conjuntos numéricos, como así también las razones que motivan las sucesivas ampliaciones de los distintos conjuntos numéricos. Esto, entre otras tantas cuestiones, ayudaría a desmitificar al número π.

Queremos dejar en claro que nuestra posición respecto de la enseñanza y el aprendizaje de contenidos de matemática es que se debe considerar que algunos de ellos —como el que acabamos de mencionar: números irracionales positivos— presentan dificultades propias y que por ello su conocimiento se debe lograr a partir de niveles de profundización creciente según el nivel del desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos. De esta manera, la helicoidalidad en el abordaje de ciertos contenidos pasa a ser una herramienta importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje que supone retomarlo en etapas sucesivas desde distintos ángulos con el propósito de lograr su aprendizaje por aproximaciones sucesivas.

6. La enseñanza de la Geometría

“Para un sujeto inmóvil no existe ni espacio ni geometría”
POINCARÉ

6.1. **Introducción**

Es nuestro objetivo, en esta sección, plantear algunas cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría o, más simplemente, plantear algunas cuestiones referidas a la didáctica de la Geometría.

Es necesario puntualizar, en primer lugar, que con frecuencia y tal vez justificado por su mismo nombre GEOMETRÍA,

GEO: Tierra y METRÍA: medición,

al hacerse referencia a la Geometría, se ha hecho referencia tanto al estudio de las formas del espacio y sus relaciones como a cuestiones relativas a mediciones de magnitudes geométricas.

En otros casos se ha independizado el estudio de las formas y sus relaciones del estudio de las mediciones, a partir de entender que el estudio de las mediciones de las magnitudes longitud, superficie y volumen involucra estrategias de abordaje para su enseñaza y aprendizaje análogas a las que involucra el trabajo con otras magnitudes como peso, capacidad, tiempo, sistema monetario, entre otras. En este marco, el estudio de las mediciones conforma otro campo de la Matemática, que suele llamarse “Medidas”.

Creemos que las medidas y sus prácticas merecen un estudio aparte, en lo referente a su didáctica, que plantea, como veremos en otras secciones, situaciones diferentes para su enseñanza y aprendizaje que las que hacen a la exploración, conocimiento y análisis del espacio geométrico.

Esta propuesta no implica, de ningún modo, fragmentar el estudio del área, pero sí significa ver que los campos que la integran tienen características propias que deben identificarse.

Es por lo expuesto que en esta sección nos abocaremos a analizar situaciones sobre la enseñanza de la Geometría, reservando los temas de mediciones de magnitudes geométricas para la sección en que abordemos las Medidas en general.

Esto no supone realizar un ordenamiento de temas para su desarrollo, ya que la organización didáctica de los contenidos varía según los docentes, los grupos escolares y las estrategias a emplear.

6.2. **Reseña de la evolución histórica de la Geometría**

Según Boyer 🕮 (1996):

> *Todas las afirmaciones que se hagan sobre los orígenes de la Matemática, ya sea de la Aritmética o de la Geometría, serán necesariamente arriesgadas y conjeturales ya que, en cualquier caso, los orígenes de esta materia son más antiguos que el arte de la escritura.*

El nombre Geometría provino de los egipcios. Este pueblo, que habitaba a orillas del Nilo, sufría periódicamente inundaciones de las tierras cultivables. Sus tierras estaban divididas en parcelas de forma rectangular y para volverlas a delimitar, después de las inundaciones, utilizaban una soga con trece nudos equidistantes con los que construían fácilmente un triángulo rectángulo (triángulo pitagórico) y por lo tanto podían remarcar sus terrenos.

Los egipcios se ocuparon, por entonces, de cálculos de áreas y volúmenes, o sea problemas relacionados con las medidas. Su Geometría era empírica.

Fueron los griegos (Pitágoras, Thales, Apolonio, entre otros) quienes le dieron, a esta rama de la Matemática, un enfoque abstracto, casi filosófico, haciendo el pasaje de una Geometría empírica a una Geometría formal, una Geometría "ideal" (usamos este adjetivo basándonos en su concepción, ya que los elementos que estudia la Geometría no son entes concretos, son idealizaciones de la realidad) trabajando las formas y figuras del plano y del espacio.

Probablemente, la idea de círculo haya surgido al observar el movimiento del agua del lago al caer una piedra y conjuntamente con ella se haya "visto" la equidistancia de los puntos de la circunferencia al centro. Estas percepciones fueron la base del concepto de circunferencia y círculo que solo residen en la mente del hombre.

Siguiendo con la reseña histórica, sabemos que fue Euclides quien hizo la primera recopilación de los conocimientos geométricos de la época. Organizó la Geometría estructurándola sobre la base del pensamiento lógico. Sus esfuerzos quedaron plasmados en su obra *Los Elementos.* En ella, a través de una cadena lógica de teoremas basados en definiciones previas, cinco famosos postulados y nociones comunes, la geometría euclidiana pasó a ser una disciplina perfectamente estructurada.

En el siglo XVI aparecieron otras geometrías, como la proyectiva y la descriptiva. Más tarde la vinculación de la Geometría con el cálculo, dio origen a la Geometría analítica o cartesiana.

Con el tiempo surgieron otras, tales como: diferencial, probabilística, no euclidianas, combinatorias, entre otras 🕮 Boyer (1996).

Con el avance del álgebra y la teoría de conjuntos la Geometría fue reemplazada por estos nuevos conocimientos, hasta que a fines del siglo XIX Felix Klein (1849-1925) propuso una nueva organización de todas las visiones geométricas. Según comentan Alsina, Burgués y Fortuny (1995: 15),

> *será Klein quien tenga la genial idea de intentar definir un concepto unificador de Geometría del que todos los adjetivos históricos resultan casos particulares: en Geometría se considerará un* ***espacio*** *(recta, plano, espacio tridimensional, superficie…) y unas* ***transformaciones*** *que permitan clasificar figuras (figuras equivalentes serán las que se puedan pasar de una a otra usando una transformación de la gama considerada). Los conceptos genuinos de cada geometría serán los que se conserven (queden invariantes) por las transformaciones.*

Es sabido que en las últimas décadas de la enseñanza, la Geometría no está pasando un buen momento, ha perdido protagonismo y quedado relegada ante otras temáticas del currículo. Frente a esto, la comunidad matemática ha propuesto, en los últimos años, insistir en el retorno de la Geometría a la escuela, retorno caracterizado por revalorizar la Geometría en la educación matemática. La necesidad de reimplantar y resignificar el trabajo en Geometría es algo en lo que ya los docentes de Matemática parecen estar de acuerdo pero no es claro aún cómo hacerlo. Ese es el gran desafío en la escuela del siglo XXI.

6.3. La Geometría, sus objetos de conocimiento

Hemos dicho que el desafío del siglo XXI es proponer y llevar a cabo una enseñanza de la Geometría renovada, significativa, actual y eficaz.

El logro de esta meta exige conocer los objetos de conocimiento de esta ciencia. Su conocimiento facilitará el proceso de renovación en su enseñanza.

La definición propuesta por Claudi Alsina (1992) para esta ciencia

la Geometría es la ciencia del espacio

identifica de algún modo su objeto de conocimiento.

Más aún, a partir de esta definición podríamos decir que la Geometría estudia las figuras del espacio y sus relaciones.

Se ha planteado cuáles son los objetos de conocimiento de la Geometría. Tales objetos de conocimiento son, como ya dijimos, ideales, abstractos y constituyen lo que en lo sucesivo llamaremos espacio geométrico. Si bien este espacio es de naturaleza ideal, su construcción parte de un espacio real.

Veamos qué queremos significar con esto y cuál es el proceso de construcción del espacio geométrico a partir del espacio real

Este proceso comienza, como dijimos, en el mundo real, en el que se habita, en el que se mira, se visualiza, se actúa. A partir de este mundo real se comienzan a formar imágenes mentales con las que se opera y se construyen saberes. En este mundo, también, hay que ubicarse y desplazarse. Por ello, en la primera etapa del aprendizaje se ve potenciada la influencia de los sentidos como elemento básico de conocimiento. La visión y las configuraciones visuales constituyen un importante medio a partir del cual se comienza a construir el saber.

El entorno ambiental es la fuente a través de la cual se inicia el acercamiento al espacio geométrico.

A partir de ver círculos en los CD, prismas en torres que se arman con juguetes o cuerpos, pirámides en los cartuchos de papas fritas, paralelas en los códigos de barra de las gaseosas o golosinas, conos en los cucuruchos de los helados, se memorizan imágenes y se reconocen, entre otra generalidad de objetos, aquellos similares a los que “se vieron”. Se comienza luego a diferenciar cada uno de los objetos que se reconocen y se intenta construirlo, reproducirlo de alguna manera. Es en esta etapa, donde se visualizan, se descubren las partes de los objetos. Objetos que dejan de ser un todo absoluto para tener componentes que necesitan nombrarse para ser descriptos. Es decir, se requiere de información para la reproducción y descripción de los objetos, para ubicarlos en el espacio y poder desplazarlos en el mismo.

Así se arman prismas con planchas de cartón, se crean cubos con plastimasa o esferas con barro, sin pensarlo se crean policubos y más aún se arman examinós[3] en el intento de unir cuadraditos iguales. Se los ubica, ordena, desplaza.

El conocimiento del espacio geométrico supone, según Alsina (1992), dos momentos diferentes, uno que corresponde a la intuición y otro a la lógica, y a los que respectivamente llama *de naturaleza visual y de naturaleza verbal*.

Estos momentos, aunque son muy distintos, se complementan y se interrelacionan en el aprendizaje de la Geometría. La transición de un momento a otro supone un tratamiento helicoidal de los temas. Para lograr alcanzar la etapa de la naturaleza verbal deben haberse incorporado suficientes imágenes que permitan reconocer, reconstruir, imaginar, abstraer figuras, ubicarlas y desplazarlas en la etapa de naturaleza visual.

---

3. Examinó: figura formada por seis cuadrados todos congruentes unidos de modo que cada dos de ellos tengan solo un lado en común. El desarrollo plano de un cubo es un examinó.

6.4. **El proceso de enseñar y de aprender en Geometría**

Planteamos a continuación una serie de cuestiones fundamentales para iniciar este proceso de enseñar y aprender Geometría:

- **Los aprendizajes deben atender al desarrollo evolutivo del niño**

En este aspecto es preciso marcar la diferencia entre los distintos grados de complejización que caracterizan a un mismo contenido. No es el *contenido específico* sino el grado de *profundidad* lo que debe tenerse en cuenta, y graduarlo en función de la capacidad del niño (no puede un niño de primer grado pensar en un cubo sin un referente concreto). El modelo no debe suponer un aprendizaje lineal, en el sentido de considerar cada tema como una unidad que se aprende y desarrolla acabadamente en un único lapso. La enseñanza debe ser cíclica. Cada tema se retomará una y otra vez hasta su aprendizaje completo, en cada uno de los distintos niveles de complejidad, acorde a las capacidades de los alumnos. Si es posible se retomarán con otro enfoque, otra profundidad, otro contexto" 🕮 (Lagreca, 1997).

Así, los diversos temas serán analizados desde un aprendizaje intuitivo hasta llegar a una primera formalización de los mismos, a una primera intelectualización. El conocimiento intuitivo constituye la base sobre la que se cimienta la construcción de los conceptos abstractos y formales con que opera la Geometría y que constituyen el espacio geométrico.

Así:

1º grado	**4º grado**	**7º grado**
El niño ve un cubo en el dado.	El niño sabe que el cubo es un poliedro de 6 caras cuadradas iguales.	El niño tiene la imagen del cubo en la mente, prescindiendo de su representación.

- **La construcción de los conceptos en Geometría**

La Geometría requiere que el pensamiento geométrico pase de una faz intuitiva a otra lógica, desarrollando las competencias adecuadas.

La visualización espacial es una de esas competencias y no es simple de alcanzar si no se ha accionado previamente con el material concreto, si no se ha estimulado al alumno para que la misma pueda darse.

la intuición de una recta surge de la acción de seguir con la mano o la mirada, sin cambiar de dirección (Piaget)

Es importante en este momento tener en cuenta ***los estadios de conocimiento***; tal como explican los esposos Van Hiele (Alsina, 1995), *el paso de un nivel de conocimiento a otro superior no se logra con el solo transcurrir del tiempo*, o sea con la edad; por sólo ser adultos no se avanza en el nivel de conocimientos geométricos.

La construcción de un concepto (llegar desde lo concreto a lo abstracto) supone cumplimentar los cinco momentos concebidos por Pallascio (1985): **visualización, estructuración, traducción, determinación y clasificación**.

> ***Visualización:*** *consiste en poder memorizar imágenes parciales a fin de poder reconocer objetos iguales o semejantes por cambio de posición o de escala, entre una diversidad de objetos, teniendo el mismo croquis.*

> ***Estructuración:*** *después de haber visualizado un objeto, su "estructuración" consiste en poder reconocer y reconstruir el objeto a partir de sus elementos básicos constituyentes*

> ***Traducción:*** *consiste en poder reconocer un objeto a partir de una descripción literaria y viceversa.*

Determinación: *consiste en poder reconocer su existencia a partir de una descripción de sus relaciones métricas.*

Clasificación: *consiste en poder reconocer clases de objetos equivalentes según diferentes criterios de clasificación*

Estos momentos se relacionan directamente con competencias requeridas por nuestros alumnos, como ejemplificaremos en el parágrafo relativo al estudio de las formas 6.5.2.

- **El trabajo con los objetos del espacio geométrico**

En este proceso helicoidal, a partir de la imagen mental del objeto geométrico se comienza a descubrir y reconocer las características y propiedades del mismo.

Este pasaje que el alumno debe hacer, de lo empírico a lo formal, es la mayor dificultad con la que nos encontramos los docentes de Matemática. Para aproximarnos a él, durante la educación matemática, debemos cumplimentar ***los procesos de pensamiento***:

observar - conjeturar - demostrar - validar

Procesos que comienzan en la escuela primaria pero que perduran en el tiempo, por ser la base del razonamiento deductivo[4].

En ese marco de experimentación (naturaleza visual) se establecerán relaciones y se descubrirán regularidades y propiedades que en los primeros cursos serán simples conjeturas. La validación general (naturaleza verbal) que se tratará en cursos superiores, las transformarán en un conocimiento universal.

4. Ver capítulo El proceso de enseñar y de aprender en Geometría.

6.5. **Una forma de abordar la enseñanza de la Geometría**

Abordar la enseñanza de la Geometría implica abordar la enseñanza de los siguientes núcleos:

- La ubicación en el espacio
- Los recorridos o desplazamientos en el espacio
- Las figuras del espacio

En el marco de las tres ideas directrices marcadas en el parágrafo anterior, analizaremos, en primer término, los núcleos relativos a ubicación y recorridos, dado que sus características y tratamiento los relacionan permanentemente.

6.5.1. **La ubicación y los recorridos**

Teniendo en cuenta las ideas expuestas en el parágrafo anterior, proponemos una forma secuenciada de acercamiento a los temas relativos a la ubicación y al desplazamiento. Planteamos esta secuenciación en tres etapas consecutivas de la educación primaria.

- En una primera etapa:
  Se establecen relaciones con el espacio próximo y relaciones entre los objetos que se encuentran en ese espacio próximo.
  Así, por ejemplo:
  Se relaciona:
  – el niño con el aula, con los objetos del aula
  – los objetos del aula entre sí
  Se trabajan:
  – desplazamientos en ese espacio

- En una segunda etapa:
  Se establecen relaciones con el espacio cercano, menos próximo y entre los objetos de ese espacio. Pensamos en el espacio geográfico cercano.

Así, por ejemplo:
Se relaciona:
– el niño y la escuela con sus distintas dependencias
– el niño con el barrio de su escuela
– los objetos de este espacio geográfico entre sí
Se trabajan:
– los desplazamientos y los recorridos en ese espacio geográfico
– los códigos para fijar ubicaciones y desplazamientos

- En una tercera etapa:
  Se establecen relaciones con el espacio geográfico lejano y se trabajan ubicaciones y desplazamiento en ese espacio.
  Así, por ejemplo:
  Se relaciona:
  – el niño con su provincia, su país, el mundo y el universo
  – el niño con sistemas de referencia que den ubicaciones
  Se trabajan:
  – códigos, coordenadas, planos, esfera terrestre
  – escalas para interpretar ubicaciones

Como vimos en estas tres etapas, estamos partiendo de la idea de que el entorno ambiental que rodea a un niño es la fuente a través de la cual construye conceptos, experimentando y actuando sobre él, en un primer acercamiento a la Geometría.

Claro está que en nuestra propuesta no solo nos referimos a la ubicación, a los recorridos, consideramos que en los distintos momentos y en los distintos espacios más o menos cercanos se comienzan a visualizar, reconocer, percibir las formas que luego se modelizan, se construyen, se manipulan, constituyendo la base de las imágenes mentales de las formas geométricas (que trataremos más adelante).

El trabajo sobre la ubicación y el desplazamiento o recorrido en los diversos espacios geográficos implica el uso de códigos y lenguajes específicos. Así, por ejemplo, si en las primeras etapas queremos plantear situaciones que atiendan a ubicación: derecha-izquierda, arriba-abajo, cerca-lejos, entre otras, será preciso convenir algunos criterios básicos, tales como:

- *La determinación de derecha e izquierda tiene como elemento de referencia a las personas.*

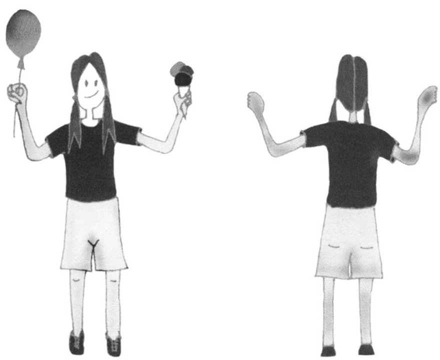
Esto se plasmará en problemas cuya resolución es de naturaleza concreta y de carácter experimental. La dramatización o reproducción de situaciones concretas es una estrategia invalorable.

Proponemos algunos problemas a trabajar en el aula sobre el tema que nos ocupa.

PROBLEMA 1:

Alfredo, el papá de Sol, le tomó dos fotos, en el mismo tiempo. Una de frente y otra de espalda.

Te mostramos una completa y en la otra ocultamos el helado y el globo.

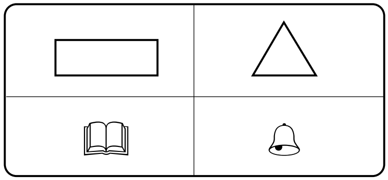


DE FRENTE DE ESPALDA

Dibuja el globo y el helado completando la foto de la derecha.
¿Con qué mano Sol sostiene al helado?

Problema 2:

Completa de acuerdo con la ubicación.



...... está arriba a la derecha ...... está arriba a la izquierda

...... está abajo a la derecha ¿Dónde está el libro? ....

- *Las ubicaciones y los recorridos necesitan para su determinación elementos de referencia (puntos de referencia, códigos de desplazamiento, matrices de ubicación).*

En los siguientes problemas exhibimos el uso de estos elementos.

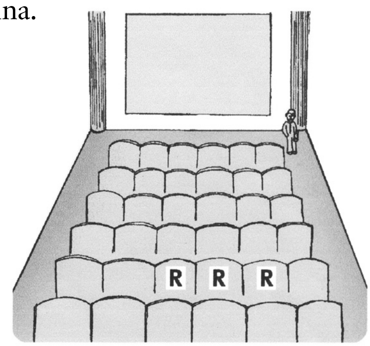
Problema 3:

El acomodador está parado al lado de la 1º fila, 1º columna.

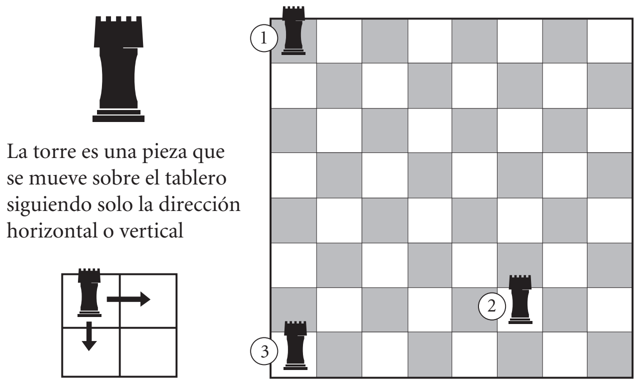
Necesita reservar los asientos ubicados en:
3º fila, 4º columna y 3º fila, 5º columna.

Para ayudarlo dibuja una R en los respaldos de dichos asientos.
Hay algunos asientos que ya están reservados.

¿Qué lugares ocupan?



Problema 4:



Marca con color rojo un posible trayecto de la torre para que partiendo de 1 llegue a 2, con un solo cambio de dirección.

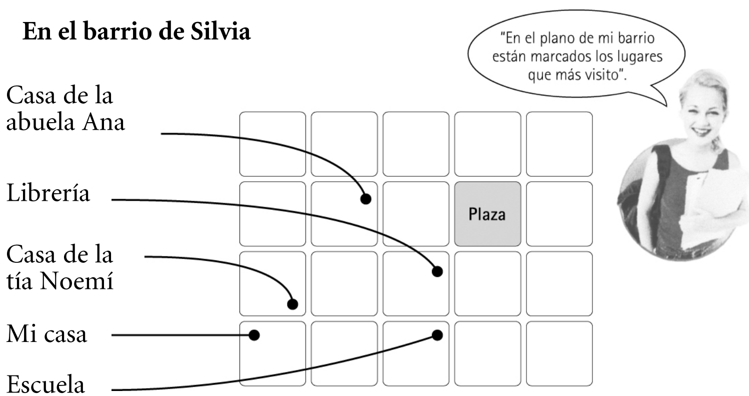
Marca con verde un trayecto con tres cambios de dirección para ir de la posición 1 a 2.

¿Para ir de 1 a 3 necesitas hacer algún cambio de dirección?

___

Problema 5:

En el barrio de Silvia



- El $\rightarrow$ representa **una cuadra** en dirección **horizontal** y hacia la **derecha**
- El $\uparrow$ representa **una cuadra** en dirección **vertical** y hacia **arriba**
- Silvia sale de su casa. **¿A dónde llega si sigue los recorridos dibujados en cada caso?**

1. $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$ ____________________
2. $\rightarrow \uparrow \rightarrow \rightarrow$ ____________________
3. $\rightarrow \uparrow \uparrow \rightarrow$ ____________________

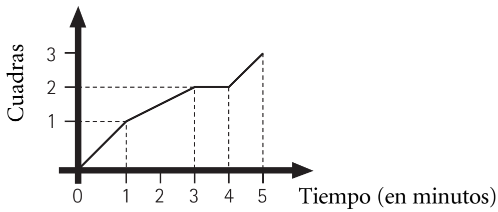
- Utilizando los vectores dibuja el menor recorrido que podría hacer Silvia para ir de su casa a la plaza, pasando por la escuela.

- **¿Cuántas cuadras recorrió?** ____________________
- **¿Cuántas bocacalles cruzó?** ____________________
- **¿Cuántos giros debió hacer?** ____________________

PROBLEMA 6:

Nicolás vive a tres cuadras de la escuela. Generalmente vuelve corriendo y no tarda más de 3 minutos. Pero esta vez se encontró con un amigo, al finalizar la segunda cuadra de su recorrido de vuelta de la escuela a su casa y las cosas cambiaron.

Este gráfico te cuenta cómo hizo su viaje ese día.



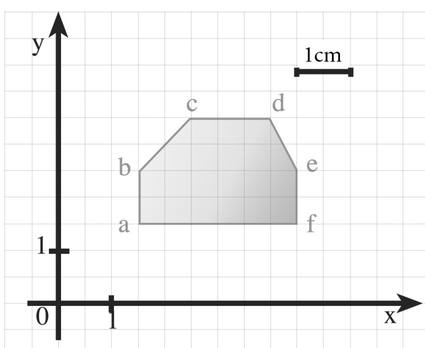
Obtén información del gráfico y responde:

a) ¿Cuánto tiempo tardó en hacer todo el recorrido?

b) ¿Recorrió todas las cuadras a igual velocidad?

c) ¿Cuáles fueron algunas causas que motivaron que tardara más que otras veces?

Determina las coordenadas de los vértices del polígono. Establece por el número de lados el nombre del polígono. Calcula la superficie, descomponiéndolo en figuras más sencillas.



A través de estos problemas observamos la necesidad de recurrir a elementos de referencia (como el acomodador en el problema 3) para dar posiciones, o de códigos (como los vectores) para mostrar desplazamientos.

Más aún, observemos que el uso de los sistemas de coordenadas se constituye en un modo simbólico de expresar posiciones y recorridos, una forma especial del lenguaje matemático.

Es importante, desde la etapa inicial, hacer uso del lenguaje técnico de la asignatura. Describir con precisión ubicaciones y recorridos es una competencia a lograr. La forma precisa de hablar y comunicar no debe ser exclusiva de la "hora de Matemática", sino que será un desafío permanente y común en todas las actividades de docentes y alumnos.

En el quehacer áulico es necesario tener en cuenta estas cuestiones:

- incorporar los conceptos en forma constructiva,
- considerar la evolución de cada concepto a lo largo de la enseñanza primaria,
- emplear recursos didácticos adecuados.

6.5.2. **Formas geométricas**

Como lo enunciamos anteriormente, en la exploración del espacio profundizamos el tratamiento de las formas geométricas, dada la trascendencia que tiene su conocimiento y significación en la formación matemática del niño.

¿Cómo lograr que los niños construyan el concepto de figura geométrica?

Estudiar las formas geométricas implica reconocerlas, conocer sus características, sus propiedades, poder reproducirlas.

Para abordar su tratamiento es frecuente clasificarlas en:

- **figuras tridimensionales** (figuras del espacio)
- **figuras bidimensionales** (figuras del plano)
- **figuras unidimensionales** (figuras de la recta)

No es casual el orden en que las mencionamos,
lo real y concreto es lo espacial.
¡La realidad es tridimensional!

Eso es lo que "ve" el niño de primera intención. La primera mirada es una mirada topológica de las cosas. Se ve en forma global, luego se entra en detalles (podríamos decir que es en sentido inverso a como se estructura en general la asignatura Geometría cuando en el nivel superior se aborda su estudio).

Sintéticamente, presentamos dos ejemplos mostrando los pasos que sugiere Pallascio para la formación del concepto de un objeto.

Primer ejemplo: concepto de rectángulo

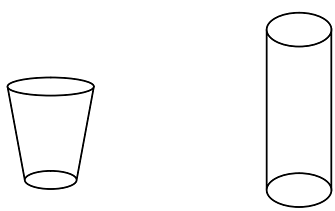
- Se reconoce el rectángulo con distintas posiciones, con distintos tamaños, entre otras figuras (**visualización**).
- Se reconocen sus elementos básicos constituyentes: lados, ángulos vértices (**estructuración**).
- Se lo reconoce a través de una descripción literaria. Por ejemplo: es un cuadrilátero equiángulo (**traducción**).
- Se lo describe a partir de sus relaciones métricas (**determinación**).
- Se descubren sus diagonales, se comienza a descubrir relaciones métricas entre ellas (este es un buen ejemplo para ***conjeturar***, ***deducir*** y ***validar***)[5].
- Se clasifican los rectángulos: rectángulos con todos los lados congruentes y rectángulos con lados congruentes de a dos (**clasificación**).
- Construye y descubre el cuadrado (puede decir ahora que el cuadrado es un rectángulo).

5. Ver capítulo El proceso de enseñar y de aprender en Geometría.

Segundo ejemplo: concepto de cilindro

- Se reconocen cilindros en los troncos de los árboles, en columnas de edificios, en los mástiles de las banderas. Se descubren características comunes, como la curvatura de su superficie, las bases de apoyo (**visualización**).
- Se reconocen elementos básicos: superficies curvas, bases de apoyo. Se reproducen cilindros utilizando materiales diversos: plastimasa, cartulina (**estructuración**).
- Se describe el cilindro a partir de sus características. Por ejemplo: es un cuerpo redondo con dos bases congruentes (**traducción**).
- Se lo describe atendiendo a las congruencias de sus bases (**determinación**).
- Se atenderá a las distintas bases que puede tener un cilindro (un círculo, una elipse) o a distinguir entre cilindros rectos y oblicuos (**clasificación**).

Observemos que a veces, como en el caso del cilindro, la determinación de sus características conviene obtenerlas, más que por detección de semejanzas, por la detección de diferencias con otros cuerpos. Así, comparando un vaso (tronco de cono) con un florero (cilindro),

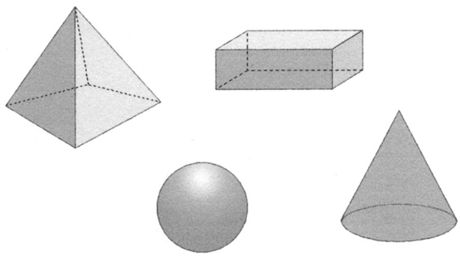


se observarán sus características, viendo que en el florero (cilindro) las bases son círculos congruentes y en el vaso (tronco de cono) las bases son circulares pero no congruentes, permitiendo esta diferencia establecer la clasificación en cilindro y no cilindro.

Veamos algunos problemas que pueden utilizase en la enseñanza de las formas:

PROBLEMA 7:

Alejo escondió dos de estos cuerpos.



En esta  colocó el que tiene exactamente cinco puntas.

¿Cuál es?

____

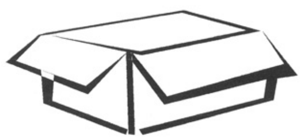
En esta  colocó el que tiene sólo una punta.

¿Cuál es?

____

ESTAS PUNTAS SE LLAMAN VÉRTICES.

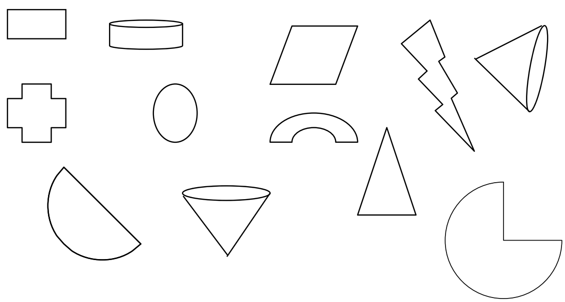
Dibuja el que no tiene ningún vértice, en el interior de esta caja.



PROBLEMA 8:

Entre las figuras que se encuentran debajo del cuadro busca y copia un par de ellas en cada rectángulo, cuyas características comunes sean las indicadas en el mismo:

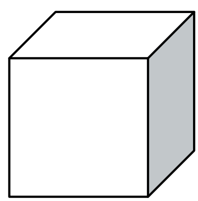
Solo tienen cuatro lados.	Tienen un lado curvo.	Son cuerpos con un solo vértice.



PROBLEMA 9:

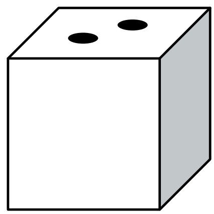
Pinta:
- con rojo la cara que está hacia arriba,
- con azul la cara que está al frente

La cara que se ve y que ya está pintada, ¿está a tu derecha o a tu izquierda?
¿Cuántas caras no se ven?



PROBLEMA 10:

Ana quiere fabricar un dado. Tiene un cubo de madera pero no sabe cómo pintar los puntos que representan a los números. Su mamá le dice: "los números de las caras opuestas deben sumar 7".
Ya marcó algunos puntos:
los que se ven en la cara superior,
y 3 en la cara que no se ve y está
a tu izquierda.

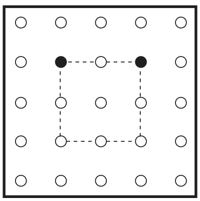


¿Cuántos debe pintar en la cara coloreada de gris?

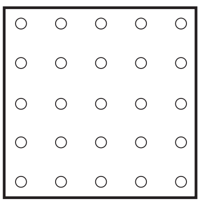
¿Cuántos en la cara de abajo?

PROBLEMA 11:

En tu geoplano coloca
una bandita elástica como
muestra la figura.



Cambia de lugar en
la misma fila, sólo los puntos ●
de manera que quede otro
cuadrilátero.
Dibuja la figura que obtuviste.



¿Cómo se llama?

6.6. **El dibujo y las construcciones geométricas**

En el trabajo en Matemática en general y en Geometría en particular, la representación de los objetos matemáticos es un recurso básico. Esta representación que puede adoptar múltiples facetas, desde simples gráficos hasta representaciones empleando tecnologías complejas, adquiere especial significado en Geometría ya que ésta es una ciencia en la que es importante recurrir a un dibujo o una construcción, para facilitar la comprensión de conceptos, para ayudar a pensar, para resolver problemas.

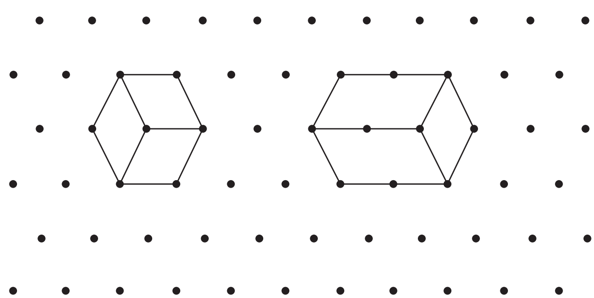
No podemos dejar de mencionar un recurso invalorable: el papel común que, acompañado por la técnica del plegado, colabora sobre todo cuando es necesario experimentar con representaciones. Al respecto, Miguel de Guzmán expresa:

> *Euclides no tenía para sus clases en Alejandría la abundancia de papel que nosotros hoy disfrutamos. Pero seguro que de haber dispuesto de papel lo hubiera utilizado a fondo. ¿Qué se puede hacer plegando papel? Muchas cosas, y muy interesantes.*

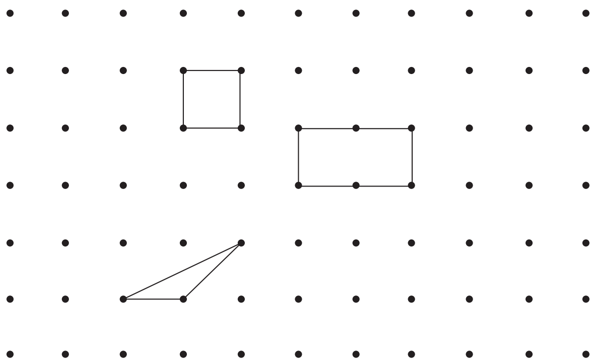
Los medios visuales de representación son múltiples y su utilización facilita el aprendizaje de los conceptos.

Así:

- El plegado de papel facilita la representación de rectas y planos.
- El geoplano triangular permite la representación de cubos y prismas en distintas posiciones (visualización de aristas).

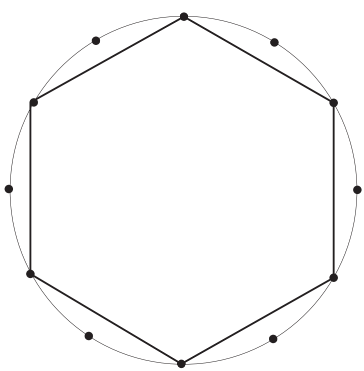


- El geoplano cuadrangular es útil para representar figuras planas, en especial cuadriláteros o triángulos (visualización de sus lados).



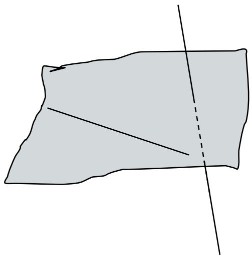
- Las hojas punteadas que reproducen estos geoplanos constituyen un gran apoyo visual simple de usar, fundamentalmente con los más pequeños.

- El geoplano circular permite representar figuras geométricas cualesquiera y, en particular, permite establecer relaciones entre polígonos y circunferencia.



- El dibujo a mano levantada, sin empleo de reglas, compases, escuadras, es utilizado frecuentemente para describir situaciones o resolver un problema.

Por ejemplo, para representar dos rectas que no tienen puntos en común y no son paralelas, un gráfico a mano levantada puede ser útil.

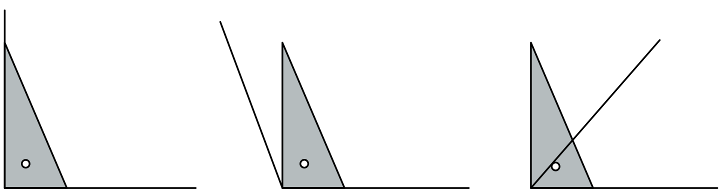


El gráfico del plano es necesario para mostrar que las rectas son alabeadas (no coplanares).

Es conveniente realizar estas representaciones en papel liso para no agregar condicionamientos como los aportados por el papel cuadriculado.

- El dibujo con útiles geométricos: regla, escuadra, semicírculos, entre otros, da características especiales a las representaciones. Su uso para realizar dibujos debe ser objeto de trabajo en el aula. Es importante enseñar su manejo de manera que el alumno pueda vincular los conceptos geométricos con las posibilidades que le brinda el instrumento.

Reconocer y dibujar ángulos rectos, obtusos y agudos usando la escuadra es una actividad elemental y básica en la enseñanza primaria. Veamos estos gráficos para ejemplificar:



Por cierto que las diversas estrategias de representación y/o dibujo serán utilizadas en los momentos que resulten significativos. Queremos revalorizar su utilización como medio para reflexionar sobre los conceptos adquiridos y poder aplicarlos en la resolución de problemas.

Dibujar un exágono regular, una pirámide oblicua o simplemente un pentágono no convexo con dos ángulos rectos, son ejemplos de actividades que atienden a competencias a lograr en el tema que nos ocupa.

Estas competencias también se enriquecen, como señalamos anteriormente, por actividades de plegado, recorte, dibujo por calcos.

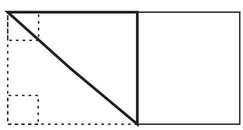
Pensemos, por ejemplo, dado el siguiente problema, todas las actividades mentales que se ponen en juego para su resolución.

> A partir de una hoja de papel rectangular, construye por plegado un cuadrado.

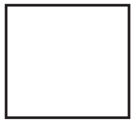
¿Cómo se puede accionar para llegar a obtener el cuadrado?

- El lado del cuadrado puede ser el lado menor de la hoja de papel. De esta manera se tiene un lado y dos ángulos rectos del futuro cuadrado.

- Un simple proceso de plegado de la hoja (llevar el lado menor del rectángulo sobre el mayor) permite marcar un punto sobre el lado mayor que determine la medida del lado menor. (En realidad se mide el lado del cuadrado buscado con el lado menor del rectángulo que es el otro lado del cuadrado.)



- El doblez de la hoja de papel por el punto señalado, en forma perpendicular (o sea superponiendo el borde del rectángulo sobre sí mismo) al lado mayor del rectángulo, determina el cuadrado buscado.



La resolución del problema supone un juego de competencias.

- Comprensión del concepto de cuadrado
- Reconocimiento de las propiedades del cuadrado y del rectángulo.
- Dominio del proceso de medición con unidad no convencional.
- Manejo de las propiedades sobre paralelas y perpendiculares.

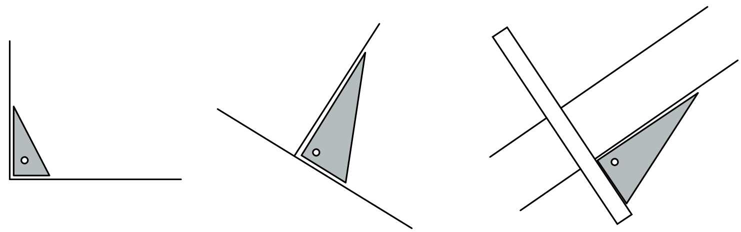
Resuelto el problema, podría avanzarse con la propuesta de otros que suponen mayores desafíos.

a) A partir de una hoja de papel rectangular, construye por plegado un cuadrado de lado dado.

b) A partir de una hoja de papel irregular, construye por plegado un cuadrado.

c) A partir de una hoja de papel cualquiera construye un cuadrado conocida su diagonal.

Si quisiéramos seguir trabajando sobre el cuadrado, podríamos proponer su dibujo utilizando elementos geométricos. El uso correcto de los útiles geométricos es un tema relevante en la educación primaria. Sin embargo, no resulta tarea sencilla el uso de la escuadra para trazar ángulos rectos (o tal vez para verificar si lo son); el empleo de la regla y la escuadra para trazar perpendiculares y paralelas; procedimientos que ilustramos.



Es frecuente observar que el dibujo de figuras geométricas reviste distintos grados de dificultad según el problema:

- Dibujar un cuadrado con "tal" longitud del lado, es una cuestión.
- Dibujar un cuadrado con "tal" longitud de la diagonal es otra muy diferente.

Sin embargo, las dos cuestiones son representaciones a trabajar en la escuela primaria.

Es necesario tener presente que ser competente en el manejo de elementos de representación y dibujo supone trabajar asiduamente con ellos.

Atendiendo a las diversas formas de representar una figura, abordamos el tema ***construcciones geométricas.***

Las construcciones geométricas son representaciones que se realizan usando solo regla no graduada y compás.

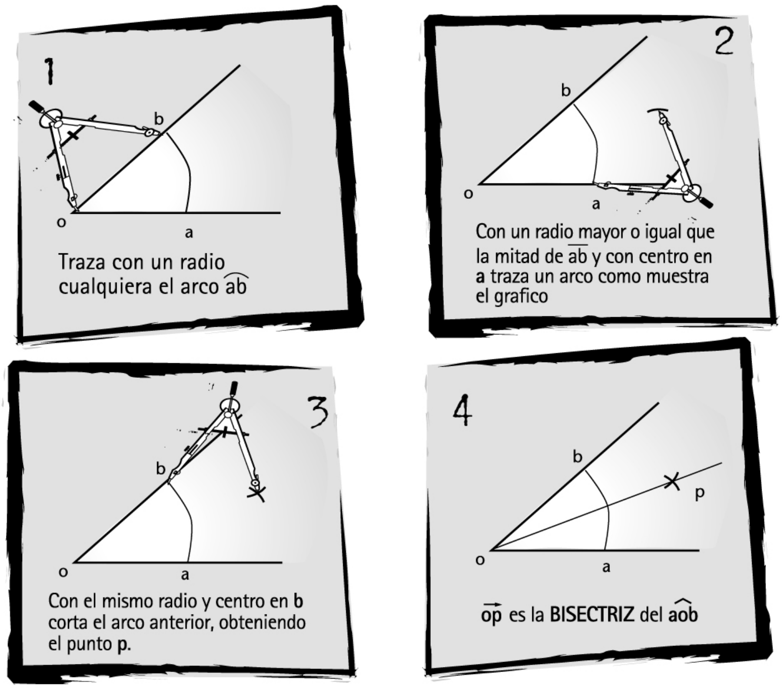
En estas construcciones la regla se utiliza solamente para trazar rectas, pero no para medir o transportar longitudes (por ello es no graduada); el compás es el único elemento que puede transportar longitudes, o sea "medir" de alguna manera.

El uso de las construcciones geométricas se remonta a la antigüedad. Fueron los griegos quienes hicieron uso frecuente de ellas. No todos los problemas propuestos para resolver con este método han sido factibles de solucionar. Por ejemplo, los griegos se plantearon tres problemas que no tienen solución: la trisección del ángulo recto, la duplicación del cubo (construir la arista de un cubo cuyo volumen sea doble de otro de arista dada) y la cuadratura del círculo.

Efectuar una construcción geométrica implica un proceso que requiere pensar en un plan de ejecución y en la justificación de cada acción.

Veámoslo en la construcción de la bisectriz de un ángulo:

PROBLEMA 12:



Para reflexionar:

¿Cómo justificar que la semirrecta obtenida es la bisectriz del ángulo?

Rescatamos el valor de las construcciones geométricas como medio para favorecer el desarrollo de la argumentación y la justificación. En la justificación de que el proceso no es mágico ni caprichoso, que es lógicamente planeado, reside la importancia de las construcciones geométricas como contenido a trabajar en el aula.

Con el propósito de establecer las diferencias entre el dibujo y la construcción geométrica, proponemos el siguiente problema.

PROBLEMA 13:

Construye un cuadrado cuyo lado es congruente con el segmento $\overline{AB}$.

A $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ B

a) Utilizando escuadra y regla graduada. (*Dibujo geométrico)*
b) Utilizando regla no graduada y compás. (C*onstrucción geométrica)*

¿Cómo puede proceder un alumno en cada caso?

a) Dibujo geométrico:

Dibuja un segmento igual al dado, midiendo con la regla graduada su longitud. Utilizando la escuadra adecuadamente dibuja una semirrecta que determina el ángulo recto cuyo vértice es uno de los extremos del segmento. Midiendo nuevamente dibuja otro de los lados, consecutivo al anterior, incluido en la semirrecta que es lado del ángulo recto, y así sucesivamente obtiene el cuadrado.

b) Construcción geométrica

Usando el compás transporta el $\overline{AB}$ sobre una recta cualquiera. Construye otro segmento, en la misma recta, consecutivo y congruente con él, obteniendo el segmento $\overline{AM}$, de longitud doble del segmento dado, siendo B su punto medio. Construye la mediatriz[6] del $\overline{AM}$ encontrando, de ese

6. Debe ser un contenido tratado previamente la construcción de una mediatriz.

modo, el ángulo recto del cuadrado, en el vértice *B*. Transporta con el compás, sobre la mediatriz, un segmento $\overline{BC}$ congruente con $\overline{AB}$, obteniendo otro lado del cuadrado.

Ha logrado tres vértices del cuadrado, *A*, *B* y *C*. Con la abertura del compás igual al lado del cuadrado y haciendo centro, sucesivamente, en los vértices *A* y *C*, traza dos arcos. La intersección de estos dos arcos define el vértice *D* del cuadrado *ABCD*.

De lo expuesto resulta que los objetivos del dibujo y de las construcciones geométricas van más allá del solo logro de competencias para representar figuras.

Sabemos que existen, para que sean utilizados en la escuela primaria o secundaria, algunos softwares de construcciones geométricas como son, por ejemplo, los *Cabri geomètre* 1 y 2. La versión 1 solo traza rectas y circunferencias, es como si trabajase solo con una regla y un compás. Es esto precisamente lo requerido por este tipo de construcciones.

Estos programas de computadora poseen un gran valor formativo, sobre todo si se los utiliza para resolver problemas que requieren construcciones geométricas, y más aún si se analizan dichas construcciones teniendo en cuenta la variación de alguno de sus elementos constitutivos.

Es importante observar que estos últimos recursos tecnológicos deben estar en el aula, sin excluir el trabajo a mano con elementos geométricos. Tanto su empleo como el uso de los otros elementos de dibujo o representaciones aportan positivamente al logro de competencias pertinentes al área.

Para reflexionar:

¿Qué competencias se logran cuando construimos figuras sobre papel con instrumentos geométricos o cuando las construimos sobre el monitor de una PC, con un software adecuado?

6.7. **Observaciones para el trabajo en el aula**

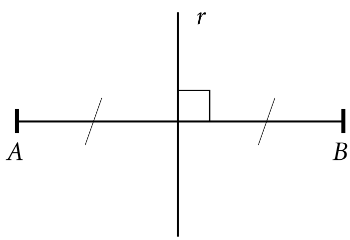
De lo expuesto hasta el momento resulta importante resumir observaciones que son útiles a la hora de organizar el trabajo en el aula.

- ♦ La enseñanza de la Geometría parte del entorno ambiental, un espacio tridimensional a partir del cual se incursionará en los espacios bidimensionales y unidimensionales.
  Del conocimiento de una pirámide surgirá la construcción de la idea de triángulo y de ésta las nociones de segmento, ángulo, punto.

- ♦ Las diversas técnicas de representación, desde un simple plegado hasta la construcción geométrica con regla y compás, son contenidos imprescindibles a trabajar en la enseñanza primaria.
  Representar la mediatriz de un segmento por plegado, dibujarla con una escuadra y una regla, construirla con regla no graduada y compás, son competencias básicas cuyos logros deben ser metas de la enseñanza primaria.

- ♦ El empleo de diversos tipos de lenguajes se constituye en una herramienta imprescindible en el desarrollo de la Geometría. Es más, el lenguaje simbólico se transforma en el medio más eficaz para comunicar.

  ¿Cómo decir, por ejemplo, que r es la mediatriz del segmento AB?



El símbolo de ángulo recto ( ) y un código para marcar segmentos de igual longitud son estrategias visuales que informan que:

r es mediatriz pues es perpendicular al segmento AB en su punto medio.

- El conocimiento correcto y preciso de los conceptos que conforman el campo de la Geometría resulta necesario para poder pasar de un espacio geométrico concreto a un espacio abstracto.

  El conocimiento del concepto de rombo: cuadrilátero equilátero, y del concepto de rectángulo: cuadrilátero equiángulo, permitirán al alumno concluir que un cuadrado es un polígono regular y, por lo tanto, la expresión para el cálculo de su superficie puede ser: $\frac{\text{per x ap.}}{2}$

  El conocimiento del concepto de triángulo equilátero: triángulo de lados congruentes, y sus propiedades: todo triángulo equilátero es equiángulo, le permitirá al alumno concluir que un triángulo equilátero es un polígono regular. No le resultará extraño, entonces, dibujar la apotema de un triángulo equilátero.

- El abordaje de la Geometría debe capitalizar temas de otros campos. La Geometría está en los números, en la estadística, por solo dar algunos ejemplos.

  El tratamiento y el trabajo de los números figurados y sus regularidades es un testimonio de esta observación. 🕮 Cattaneo (2001).

Finalmente, podemos agregar que la Geometría es un campo del saber propicio para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. Es un campo adecuado para trabajar el descubrimiento de patrones a través de la inducción y avanzar con ello hacia los procesos de deducción.

Dijimos al principio que esta asignatura debía volver a las aulas en forma renovada. En esta síntesis de observaciones que seguramente podrá ser enriquecida, proponemos disparadores para reflexionar sobre ellos de modo de favorecer el retorno de la Geometría al aula.

7. La enseñanza de la Medida

7.1. **Introducción**

Las medidas de magnitudes conforman un campo de la Matemática que ha sido incorporado en todos los diseños curriculares, desde el nivel inicial hasta el superior. Es significativo en sí mismo, además de ser de gran aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Su enseñanza y aprendizaje resultan procesos que requieren el manejo de marcos conceptuales, que están en estrecha relación con otros temas del quehacer matemático.

Desde los primeros niveles de escolarización, su enseñanza debería revalorizar la difícil y olvidada tarea de medir, ya que frecuentemente se minimiza su tratamiento por considerársela como el resultado de un proceso de autoaprendizaje en el marco de un contenido de uso social. Es más, frecuentemente en la enseñanza primaria el tema de la Medida se reduce a resolver cuestiones aritméticas con el manejo de unidades, omitiéndose el estudio y la práctica del proceso de medir magnitudes.

Es momento oportuno de plantearnos algunos interrogantes.

¿Cómo encarar la enseñanza de la medida?

¿Cómo retomar experiencias de la vida cotidiana que contribuyan a la construcción de conceptos que involucran la medida?

¿Qué cuestiones tratar para valorar su significatividad?

¿Qué competencias esperamos que logren nuestros alumnos en el desarrollo del tema Medida?

Pretendemos que finalizada la lectura de esta sección el lector pueda reflexionar y aproximar una respuesta a cada uno de estos interrogantes.

7.2. **La medición de magnitudes**

El aprendizaje de la medida requiere para su comprensión la permanente referencia a actividades concretas de medir. En todos los niveles de enseñanza, el "acto de medir" una magnitud determinada debe constituirse en el primer acercamiento al trabajo con medidas.

El "acto de medir" implica, en primer lugar, puntualizar qué entendemos por "medir", concepto que adquiere distintas acepciones según el nivel de los alumnos.

En una primera etapa la idea de *medir* está asociada a la idea de *comparar*, traduciéndose en actividades como:

- *Comparar* la estatura de dos niños.
- *Comparar* el largo del cabello de dos personas.
- *Comparar* el contenido de dos botellas.
- *Comparar* el peso de dos manzanas.

En todos estos casos, la medición se efectúa por una **comparación directa**.

De esta forma se arriba a relaciones tales como:

"es más alto que…", "es más corto que…", "es tan largo como…"

En una etapa posterior, la medición implicará otra estrategia, la **comparación indirecta**, que permite la comparación de dos objetos a medir, a través del empleo de un tercer objeto que se utilizará como elemento de comparación entre ambos.

Veamos un ejemplo.

Dos niños están jugando al tejo. Desean saber cuál de los tejos está más cerca del tejín (los "objetos" a medir son las distancias de cada tejo al tejín).

Para resolver la cuestión toman un trozo de hilo, un palito o utilizan simplemente el palmo (tercer objeto) y lo transportan tantas veces como sea posible, entre cada tejo y el tejín, hasta "cubrir" dicha distancia. Obtienen por cada distancia un número. Comparando los números pueden decidir qué tejo está más cerca del tejín.

Surge así la idea de *unidad de medida.* En este caso, la cuerda o el palito o el palmo, según se haya elegido, es la unidad de medida considerada.

El ejemplo descrito se ha referido a medición de longitudes. Las estrategias para medir otras magnitudes como peso, capacidad, tiempo, pueden ser semejantes.

Así, para saber qué manzana pesa más que otra, utilizando la *comparación directa*, las sopesamos, colocando cada una en una mano. Cuando la diferencia de peso entre ambas es poco significativa o queremos mayor precisión, recurrimos a la *comparación indirecta*. En este caso, se puede trabajar con una balanza de platillos, resultando que el tercer elemento es una pesa. Si la balanza que se utiliza es digital, no es visible el tercer elemento para la comparación indirecta. Por esta razón, la balanza de platillos se convierte en un recurso didáctico valioso en el trabajo con la magnitud peso.

En síntesis, el aprendizaje del concepto de *medir* a través de variadas experiencias se desarrolla partiendo de la comparación directa y de la comparación indirecta teniendo en cuenta que en esta última subyace la necesidad de una *unidad de medida* y la determinación de un **proceso de medición**.

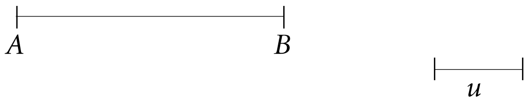
Para el proceso de medición se deben cumplimentar tres instancias:

- Elegir una unidad de medida o patrón de comparación.
- Establecer un método de trabajo: comparación del objeto a medir con la unidad.

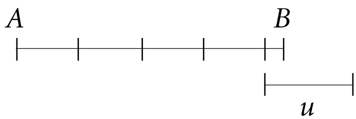
- Determinar un número: medida que se obtiene al saber las veces que cabe la unidad en el objeto a medir.

El resultado del proceso de medición es la obtención del **número medida**. Dicha obtención no es siempre un proceso sencillo, como podemos ver a continuación a partir de un ejemplo realizado en el marco de la magnitud longitud.

Supongamos que nos proponemos medir el segmento *AB* de la figura, tomando como unidad de medida *u*.



Es evidente que un número natural no es suficiente para expresar su medida.



Al tratar de cubrir el segmento *AB* con el segmento *u*, resulta que *u* no cabe un número entero de veces pues sobra una parte de *AB* (menor que *u*) que no puede cubrirse con una unidad entera. Para medir esta parte restante, debe elegirse otra unidad. Generalmente, esta nueva unidad se elige subdividiendo la unidad inicial.

Supongamos que, en este caso, dividimos a *u* en cuatro partes iguales y encontramos una nueva unidad de medida (submúltiplo de la anterior) que es $\frac{1}{4}$ de *u*. Esta nueva unidad cabe una sola vez en la parte que resta medir, cubriéndola totalmente.

Resulta entonces que:

$$\text{longitud de } \overline{AB} = 4\,u + \frac{1}{4}\,u = 4\frac{1}{4}\,u = \frac{17}{4}\,u$$

Tenemos así que:

la medida del segmento $\overline{AB}$ con respecto a u es $\frac{17}{4}$

El número medida es $\frac{17}{4}$. En este caso, el número medida es un número racional.

Como vimos, no siempre el número medida es un número natural, a veces es necesario subdividir la unidad de medida, resultando la medida un número racional.

Todavía la situación puede ser más compleja y que no sea posible encontrar un submúltiplo de la unidad con la que se cubra el objeto a medir. Esta situación se traduce matemáticamente en el hecho que no exista ningún número racional que sea medida del segmento dado con respecto a esa unidad de medida (por supuesto, esta situación no puede verificarse desde el punto de vista práctico). En estos casos la medida es un número irracional, como se explica en el capítulo de La Enseñanza de los Conjuntos Numéricos, en su referencia a los números π y $\sqrt{2}$.

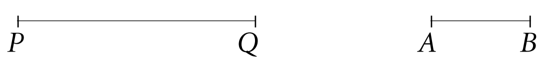
Observemos que el número medida depende de la unidad de medida elegida. Si se cambia la misma, cambia el número medida.

El proceso que hemos descrito para la magnitud longitud es análogo para otras magnitudes.

Con el propósito de crear un espacio de trabajo y reflexión sugerimos algunos problemas y adjuntamos comentarios sobre el objetivo de cada uno de los mismos

PROBLEMA 1

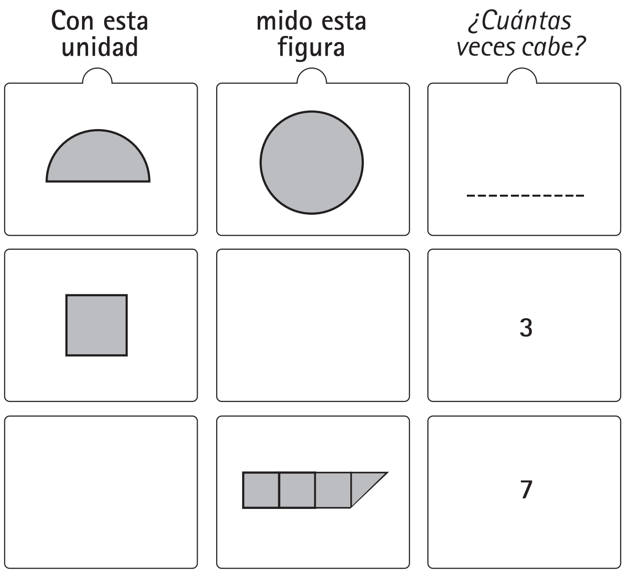
El segmento $\overline{PQ}$ es la unidad de medida. ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{AB}$ con respecto a la unidad $\overline{PQ}$?



El objetivo de este problema es mostrar que la unidad de medida puede ser mayor que el objeto a medir. El desafío es encontrar una estrategia para medir en este caso. Es importante el problema para que el alumno choque con este obstáculo a los fines de superarlo.

PROBLEMA 2

Completa el cuadro



PROBLEMA 3

La medida del segmento $\overline{PQ}$ con respecto a cierta unidad es 4. Dibuja la unidad.

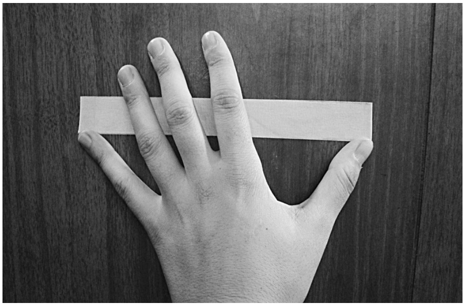
La resolución de estos dos últimos problemas pone en juego la reversibilidad del pensamiento, situación a la que los alumnos no están acostumbrados (es frecuente dar la unidad de medida y no pedir que se la halle). Además, permite identificar los conceptos que se interrelacionan en el proceso de medición: objeto a medir, unidad de medida, número medida.

7.3. **Sistemas de medición**

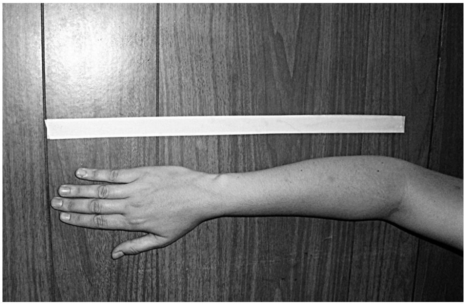
Ya hemos observado que el número medida depende de la unidad de medida elegida. No siempre se utilizaron para medir las mismas unidades que hoy se utilizan. Los egipcios, por ejemplo, no conocían ninguna de las unidades que hoy nos son familiares para medir longitudes.

Los egipcios y casi todos los pueblos primitivos utilizaron partes de su propio cuerpo como unidades de medida, dando origen al primer sistema que se adoptó para medición de longitudes, el **antropométrico.** Así surgieron el palmo, el pie, el codo, etc.

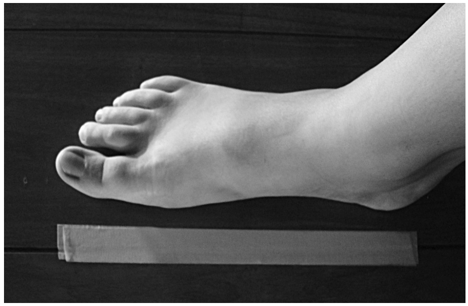
Palmo:
es la medida de la distancia entre la punta del pulgar y la del meñique teniendo la mano abierta.



Codo:
es la medida de la distancia desde la punta del codo y el extremo del dedo mayor de la mano de un hombre.



Pie:
es la medida del largo del pie de un hombre "normal".



Entre otras unidades de longitud anatómica, podemos mencionar algunas, cuyos orígenes son curiosos, como las que siguen:

Yarda: es la medida de la distancia que mediaba entre la punta de la nariz y el extremo del pulgar del rey Enrique I de Inglaterra cuando tenía el brazo extendido.

Vara inglesa: es la medida de la distancia que mediaba entre la punta del pie izquierdo del hombre que encabezaba cierta procesión al salir de la iglesia, y el talón, también izquierdo, del hombre que ocupaba el decimosexto lugar en la misma procesión (Inglaterra, siglo XVI).

Como vemos, a lo largo de la historia el hombre ha elegido la unidad de medida de distintas maneras. Para que los distintos pueblos pudieran entenderse en cuestiones de medición, fue necesario unificar los "patrones" o unidades y establecer un sistema universal de medición cuya implementación acercara a los hombres de los diversos pueblos.

Con el correr de los años y en el marco del propósito anterior surge el ***Sistema Internacional de Medidas*** (S.I.) que establece unidades universales para medir las distintas magnitudes.[7]

7. Los países de habla inglesa no han adoptado este sistema, utilizando el llamado Sistema Imperial de Medidas. Dada la importancia comercial de estos países conviven en el mercado los dos sistemas.

En nuestro país y de acuerdo con el S.I., por la ley 19.511 de 1972, fue establecido como único sistema de unidades de uso autorizado el ***Sistema Métrico Legal Argentino*** (**SIMELA**).

El SIMELA establece las unidades de base para medir las diversas magnitudes como así también los múltiplos y submúltiplos de dichas unidades. En algunos casos, como en el de la magnitud longitud o superficie, por ejemplo, los múltiplos y submúltiplos de la unidad base se relacionan con ésta a través de potencias de 10 (en forma decimal). Para estos casos los múltiplos y submúltiplos se nombran usando determinados prefijos que se anteponen al nombre de la unidad y que aluden a la relación de equivalencia entre aquellos y esta.

Adjuntamos dos tablas que muestran los prefijos utilizados para nombrar múltiplos y submúltiplos de la unidad base de algunas magnitudes. Su empleo permite expresar, con facilidad, una misma cantidad en distintas unidades.

MÚLTIPLOS			SUBMÚLTIPLOS	
Prefijo	**Símbolo**	**Factor**	**Prefijo**	**Símbolo**
Exa	E	10^{18}	deci	d
Peta	P	10^{15}	centi	c
Tera	T	10^{12}	mili	m
Giga	G	10^{9}	micro	µ
Mega	M	10^{6}	nano	n
Kilo	k	10^{3}		
Hecto	h	10^{2}		
Deca	da	10^{1}		

Para el caso de la magnitud longitud, cuya unidad base es el metro (m), resulta:

- Un múltiplo del metro es el *kilómetro*. Su nombre está constituido por el prefijo *kilo* (que significa 1000) y el sustantivo *metro* (unidad de la magnitud considerada)

Es decir:

$$1\ kilómetro = 1000\ m = 10^{3} m$$

- Un submúltiplo del metro es el *centímetro,* cuyo nombre está constituido por el prefijo *centi (que significa centésimo)* y el sustantivo *metro* de modo que:

$$1cm = \frac{1}{100}\ m = 0{,}01\ m = 10^{-2}m$$

Estas formas de escritura y la equivalencia de los múltiplos y submúltiplos con el metro son útiles al momento de tener que expresar una cantidad referida a una cierta unidad con respecto a otra unidad.

Veamos a continuación un problema que alude a esta última cuestión.

PROBLEMA 4

> El perímetro de la tabla de una mesa es de 4,5 *m*.
> Si se hubiese medido el perímetro de la mesa con la unidad decímetro, *¿cuál sería el número medida?*

Para arribar a la solución de este problema se pueden considerar dos caminos diferentes: uno experimental y otro algebraico.

• Camino experimental

Se toma un decímetro (décima parte del metro) y se ***mide*** el perímetro de la mesa. Como éste cabe, cubriendo exactamente el perímetro de la mesa, 45 veces, se concluye que el número medida con respecto al decímetro es 45.

• Camino algebraico

Conociendo la relación aritmética entre el metro y el decímetro se ***calcula*** el número medida. ¿Cómo hacerlo?

Como *deci* significa décimo y se abrevia *d*, resulta:

$$1dm = \frac{1}{10}\ m$$

o sea

$$10\,dm = 1\,m$$

Entonces, reemplazando convenientemente, tenemos:

$$4{,}5\,m = 4{,}5 \text{ x } \underline{10\,dm} = 45\,dm$$

Cabe observar, volviendo al enunciado del problema, que al informarse que el perímetro de la mesa es 4,5 *m* (expresión que se lee 4 enteros 5 décimos del metro) estamos significando que el metro cabe 4 veces y su mitad cabe una vez más en el perímetro de la mesa.

En síntesis, podemos concluir que:

Cuando se ha comprendido el proceso de medición a partir de situaciones didácticas diversas, el trabajo a seguir es interiorizar al alumno, tanto experimental como analíticamente, en el uso de distintas unidades de medida. A través de la práctica observará que al medir un mismo objeto o calcular dicha medida, con diferentes unidades, se obtienen distintos números medida que están relacionados según la equivalencia entre las distintas unidades.

Con el propósito de mostrar estrategias de resolución de problemas que aluden a los temas tratados proponemos:

PROBLEMA 5

¿Cómo expresar en metros la cantidad 2,7 Mm (megámetros)?
O equivalentemente:
¿a cuántos metros equivalen 2,7 Mm?

El prefijo *Mega* significa un millón:

$$1\,Mm = 1000000\,m = 10^6\,m$$

Entonces:

$$2{,}7\,Mm = 2{,}7 \text{ x } 10^{6} m = 2700000\,m$$

En este caso, la relación se estableció entre la unidad base y uno de sus múltiplos.

Veamos un problema similar donde se establecen relaciones entre la unidad base y uno de sus submúltiplos.

PROBLEMA 6

¿A cuántos kilogramos (kg) equivalen 125g?

Recordando que $1kg = 1000\,g$, resulta que $1\,g = \frac{1}{1000}\,kg$ de donde:

$$125\,g = 125 \,.\, \frac{1}{1000}\,kg = 0{,}125\,kg$$

Continuando con el trabajo de expresar una misma cantidad en distintas unidades, trabajamos seguidamente con las magnitudes superficie y volumen.

• Magnitud Superficie

¿Qué ocurre cuando trabajamos con unidades de superficie?

La unidad para medir una superficie es un cuadrado de lado $1m$.

La superficie de este cuadrado es[8] :

$$1m \text{ x } 1m = 1m = 1m^{2}$$

8. Con las unidades de medida se opera de la misma forma que con los números.

Uno de sus submúltiplos es el decímetro cuadrado (dm^2), cuadrado de 1 dm de lado.

¿Qué relación podemos establecer entre el dm^2 y el m^2?

$$1m^2 = 1m \text{ x } 1m = 10\ dm \text{ x } 10\ dm = 10 \text{ x } 10\ dm.dm = 100\ dm^2$$

O sea:

$$1m^2 = 100 \text{ dm}^2$$

o, en forma equivalente:

$$1dm^2 = \frac{1}{100}\ m^2 = 10^{-2}\, m^2$$

Veamos nuevamente que los prefijos también resultan aquí útiles. Por ejemplo,

$$1dm^2 = 1(\boldsymbol{dec}\textit{ímetro})^2 = 1(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\ m)^2 = 1.\ \frac{1}{100}\ m^2 = \frac{1}{100}\ m^2 = 0{,}01m^2$$

Apliquemos estas ideas para resolver un problema

PROBLEMA 7

¿Cómo expresar 36 m^2 usando como unidad el dm^2?

La relación entre el m^2 y el dm^2 permite resolver el problema.

$$36\,m^2 = 36 \text{ x } 100\,dm^2 = 3600\,dm^2$$

- **Magnitud Volumen**

*¿Qué ocurre cuando trabajamos con **unidades de volumen**?*

La unidad para medir un volumen es un cubo de $1m$ de arista.
El volumen de este cubo es:

$$1m \text{ x } 1m \text{ x } 1m = 1m.m.m = 1m^3$$

Uno de los submúltiplos de esta unidad es el dm^3, cubo de 1 dm de arista.

¿Qué relación podemos establecer entre el dm^3 y el m^3?

$$1m^3 = 1m \text{ x } 1m \text{ x } 1m = 10\ dm \text{ x } 10\ dm \text{ x } 10\ dm =$$
$$10 \text{ x } 10 \text{ x } 10\ dm.dm.dm = 1000\ dm^3$$

O sea:

$$1m^3 = 1000\ dm^3$$

o, en forma equivalente:

$$1dm^3 = \frac{1}{1000}\ m^3$$

Utilicemos estas ideas para resolver un problema

PROBLEMA 8

¿Cómo expresar 24 m^3 usando como unidad el dm^3?

La relación entre el m^3 y el dm^3 permite resolver el problema.

$$24m^3 = 24 \text{ x } 1000\,dm^3 = 24000\,dm^3$$

Es además útil tener en cuenta las equivalencias entre las unidades de medidas de volumen y las unidades de **medidas de capacidad** atendiendo al uso indistinto que de las mismas se efectúa en la vida de relación.

Así, es frecuente leer

- en la etiqueta de una caja de leche que la misma contiene 1000 cm^3 o 1 *litro* de leche.
- en las instrucciones para la administración de medicamentos que la dosis debe ser de 5 cm^3 o *de 5 ml*
- en recetas de comidas que de tal o cual ingrediente se utilizará una cucharadita de té o, aproximadamente, 2 cm^3

A los efectos de poder expresar indistintamente medidas de volumen y medidas de capacidad, es necesario tener en cuenta las siguientes equivalencias:

$$1dm^3 = 1l$$
$$1000\ dm^3 = 1000\ l \Rightarrow 1m^3 = 1kl$$
$$\frac{1}{1000}\ dm^3 = \frac{1}{1000}\ l \Rightarrow 1cm^3 = 1ml$$

En resumen:

$$1dm^3 = 1l \qquad 1cm^3 = 1ml \qquad 1m^3 = 1kl$$

7.4. **El proceso de cálculo y aproximación de medidas de magnitudes**

El tratamiento de las magnitudes geométricas como longitud, superficie y volumen supone, además de los procesos que hemos descrito, el abordaje de cuestiones relativas a:

• El cálculo y la aproximación de medidas.

Hemos observado que los procedimientos utilizados para medir magnitudes suelen presentar en la práctica áulica algunas dificultades. Por ejemplo, los alumnos pueden medir sin inconvenientes la superficie de la tabla de su mesa de trabajo tomando como unidad de medida un cuadradito, pero no les resulta sencillo medir, con esa misma unidad, la superficie de una cancha de fútbol. Una situación análoga se da cuando el alumno mide, utilizando un cubito como unidad de medida, el volumen de un estuche de perfume de forma prismática y pretende, con esa misma unidad, medir el volumen del aula o el volumen del contenido del frasco de perfume.

Estas y otras dificultades motivan la necesidad de crear procedimientos y estrategias que permitan calcular o aproximar medidas de magnitudes. En el primer caso, estos procedimientos conducen a la obtención de expresiones aritméticas (fórmulas) que permiten calcular perímetros, superficies o volúmenes, midiendo solo magnitudes lineales (longitudes); en el segundo da lugar a la obtención de valores a los cuales se aproximan los perímetros, superficies o volúmenes de figuras.

Nos hemos referido ya a la medición de magnitudes. Para el caso del cálculo y la aproximación de medidas contextualizaremos el trabajo a la magnitud superficie ya que el mismo es análogo para perímetros o volúmenes.

Vergnaud, en su teoría de los campos conceptuales, agrupa en un mismo campo conceptual las magnitudes geométricas: longitud, superficie y volumen ya que su tratamiento requiere para las tres, conceptualizaciones tanto de orden geométrico como de las estructuras aditivas y las estructuras mutiplicativas.

7.4.1. **Cálculos de superficies**

Para tratar este tema es necesario tener presente cómo evoluciona el pensamiento de los alumnos (desde lo intuitivo hasta iniciarse en el pensamiento lógico) como así también saber que todo accionar áulico relacionado con la idea de medición no puede independizarse de los conocimientos geométricos y numéricos necesarios.

Partimos de suponer que los alumnos reconocen figuras geométricas, tanto del plano como del espacio, con las que han trabajado en forma conjunta. Por otra parte, suponemos que ya se han iniciado en el proceso de medir, realizando actividades que llevan implícitas la noción de superficie.

¿Cómo avanzamos sobre esto para llegar a obtener fórmulas que expresen la superficie de figuras?

El proceso de construcción de estas fórmulas se inicia con la obtención, por parte del alumno, de la fórmula que da la superficie de un rectángulo.

¿Cómo se obtiene esta fórmula?

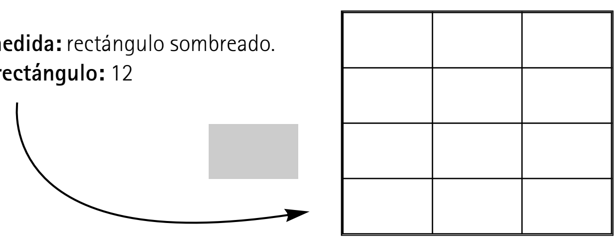
Comenzamos por proponer medir la superficie de un rectángulo con una unidad elegida adecuadamente.

Se presentan distintos casos.

♦ *Primer caso*

La unidad de medida elegida está contenida un número entero de veces en el objeto a medir (la medida es un número natural).

Unidad de medida: rectángulo sombreado.
Medida del rectángulo: 12



Observamos que, en este caso, la unidad de medida cabe 12 veces, en 4 filas de 3 columnas cada una, o sea:

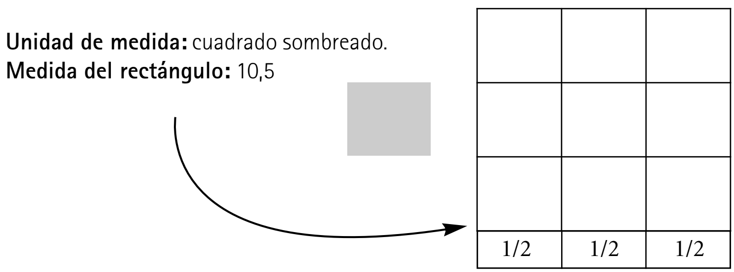
Medida de la superficie del rectángulo = 4 x 3 = 12

En esta etapa, como una primera aproximación al cálculo de la superficie de un rectángulo, los alumnos comprenden que la misma se puede conseguir a partir de conocer el número de veces que la unidad cabe sobre la base y sobre la altura del rectángulo. Pueden conjeturar entonces que el producto *b. a* es la superficie del rectángulo, siendo *b* y *a* las longitudes de la base y la altura del rectángulo respectivamente.

Esta tarea constituye un primer acercamiento a la idea de calcular superficies a partir del conocimiento de medidas de longitud. Los alumnos comienzan a diferenciar el proceso de medición del proceso de calcular una superficie a través de la medición de longitudes.

♦ *Segundo caso*

La unidad elegida no está contenida un número entero de veces en el rectángulo.



Se observa que el rectángulo queda cubierto por 9 unidades enteras y 3 mitades de unidad, dispuestas en 3 columnas cada una de las cuales contiene 3 veces y media la unidad.

De ello concluyen que:

Medida de la superficie del rectángulo = 3 x 3,5 = 10,5

En esta última instancia los alumnos se enfrentaron a situaciones donde la unidad de medida no cabía un número entero de veces en la superficie a medir, por lo que tuvieron que elegir submúltiplos de la misma. Esto supone pasar de utilizar números naturales a utilizar números racionales para expresar la superficie de un rectángulo. Los alumnos se encuentran aquí con una primera dificultad que, en general, no conlleva mayores problemas para superarla. Los alumnos descubren que también en este caso la medida de la superficie del rectángulo se puede calcular realizando el producto de las medidas de su base y su altura.

Conjeturan entonces que, también en este caso:

Superficie del rectángulo = $b\,.a$
(b: longitud de la base; a: longitud de la altura)

repitiendo la conclusión a la que arribaron en el caso anterior.

De la experimentación propuesta en las dos etapas precedentes los alumnos conjeturan que la superficie del rectángulo se obtiene multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura, cuestión que el docente deberá institucionalizar, haciéndola válida para cualquier rectángulo. Claro está que, desde un marco totalmente abstracto y analizando cuestiones que un alumno de la educación primaria no se plantea, resulta necesario tener en cuenta que la conjetura anterior se construye sin analizar un tercer caso que, muy probablemente, no sea necesario socializar con los alumnos, pero que sí debe capitalizar el docente.

♦ *Tercer caso*

La unidad elegida y cualquier submúltiplo de ella no están contenidos un número entero de veces en el rectángulo.

Es decir:

- Existen rectángulos cuya superficie no se puede cubrir con cierta unidad o cualquier submúltiplo de ella.
- La medida de la superficie de esos rectángulos no es un número racional.

A partir de esta situación será necesario postular que: la superficie de cualquier rectángulo es el producto de la longitud de su base por la longitud de su altura:

$$\text{Superficie del rectángulo} = b \,.\, a$$

Este postulado permite calcular la superficie de cualquier rectángulo en cualquiera de los casos descritos.

Es importante observar que, según esta expresión, la superficie del rectángulo depende de las dimensiones del rectángulo, es decir que la superficie del rectángulo es **función** de la longitud de la base y la de la altura del rectángulo.

A partir de la expresión de la superficie del rectángulo pueden obtenerse fórmulas para calcular la superficie de otras figuras.

• Superficie del cuadrado

Es importante en este caso rescatar el valor que revisten los contenidos conceptuales. Comenzamos recordando la definición de cuadrado:

Un cuadrado es un rectángulo equilátero.

Podemos así afirmar que:

$$\{\text{cuadrados}\} \subset \{\text{rectángulos}\}$$

De donde, por ser el cuadrado un rectángulo:

$$\boxed{\text{Superficie del cuadrado} = b \,.\, a}$$

Como en el cuadrado, la base y la altura son iguales (las llamamos lado del cuadrado y notamos con l a su longitud), tenemos que:

Luego:

$$\text{Superficie del cuadrado} = l \,.\, l = l^2$$

• Superficies de prismas

Obtenidas estas fórmulas es importante no circunscribir su empleo al cálculo de superficies de figuras del plano y utilizarlas para que los alumnos calculen superficies de figuras tridimensionales. Por ejemplo, conociendo la superficie del cuadrado podrán obtener la superficie del cubo; conociendo la del rectángulo la superficie lateral y total del prisma. Para ello, es necesario que los alumnos manejen contenidos previos, tales como el concepto de prisma, en particular el de cubo. Consideramos que no es necesario recordar las tradicionales fórmulas de cálculo de superficies de figuras tridimensionales. El alumno debe poder obtener formas de cálculo de las mismas a partir de estrategias que obtendrá libre e individualmente. La superficie total de un cubo será seis veces la superficie de una cara y la de un prisma será la suma de la superficie de los rectángulos que son sus caras y la superficie de las dos bases que deberán ser polígonos cuya superficie sepan determinar.

• Superficies de otras figuras del plano

La obtención de expresiones de cálculo para otras figuras del plano supone conocer los conceptos de polígonos equicompuestos y de polígonos equivalentes.

Recordemos:

Polígonos equicompuestos son aquellos formados por polígonos respectivamente congruentes, de modo que cada par de ellos tiene solo en común sus fronteras o parte de ellas.

Polígonos equivalentes son los que tienen igual superficie.

En consecuencia:

Los polígonos equicompuestos son equivalentes.

Para la comprensión de estos dos conceptos es interesante el empleo de un recurso lúdico como lo es el Tangram[9], con el que se pueden construir, empleando las siete piezas, polígonos equicompuestos y equivalentes.

Actividades similares a las que da lugar el Tangram pueden proponerse con la simple construcción de polígonos en cartulina. Así, por ejemplo, se pueden indicar las siguientes actividades:

Actividad 1

- Construye dos cuadrados congruentes.
- Corta uno de ellos por la diagonal.
- Con las tres piezas que obtuviste forma dos figuras equicompuestas.

Algunas posibles figuras, producto de esta actividad, son:

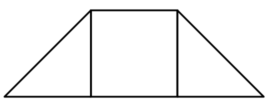


Fig. 1

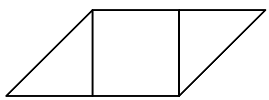


Fig. 2

La Fig. 1 representa un trapecio y la Fig. 2, un paralelogramo. Ambas figuras tienen "formas" distintas; sin embargo, tienen algo común: están

9. "El Tangram (tabla de la sabiduría o tabla de los siete elementos), el milenario juego chino de las formas, no es un juego competitivo, sino un juego individual o de grupo que estimula la fantasía creadora. Joost Elffers, "El Tangram" (del Libro *FORUM 14*, Año 1, Nº 1).

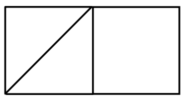
compuestas por la unión, sin superposición, de los polígonos obtenidos por el alumno. Es decir, estas dos figuras son equicompuestas y, por lo tanto, equivalentes.

Podemos avanzar sobre esta actividad proponiendo una nueva.

Actividad 2

Reacomodar las piezas que forman la figura 2 de modo de obtener un rectángulo equicompuesto con el trapecio y el paralelogramo.

La resolución de esta actividad podría dar como resultado la construcción de un rectángulo como el siguiente



que es equicompuesto con el trapecio y el paralelogramo.

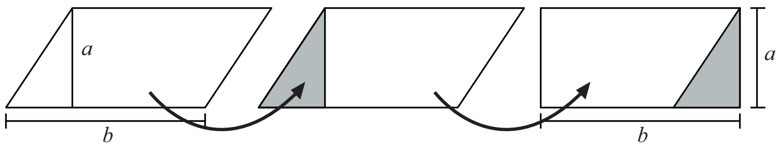
El concepto de figuras equicompuestas constituye, en algunos casos, la base para deducir expresiones para el cálculo de la superficie de polígonos. Un recurso importante se suma en este proceso: el de **la visualización**. Este recurso tiene como finalidad permitir que los alumnos interpreten, comprendan, conjeturen, recuerden, a partir de la manipulación de objetos o del análisis de representaciones gráficas.

Para ejemplificar lo expuesto presentamos una estrategia que permitirá al alumno deducir fórmulas de cálculo de superficies de polígonos. Lo hacemos con el nombre de **Mirar, ver y concluir**.

En estos casos, la deducción de la fórmula es la respuesta de observar la secuencia de dibujos propuesta. Cada una de estas secuencias tiene por objetivo que el alumno visualice, a través de las mismas, cómo se transforma una figura, de la cual no conoce una expresión para calcular su superficie, en otra de la cual sí conoce dicha fórmula.

- **Superficie del paralelogramo**

Mirar, ver y concluir

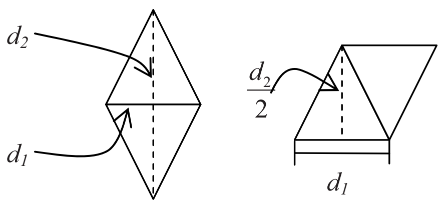


El recurso visual permite a los alumnos concluir que el paralelogramo y el rectángulo son figuras equicompuestas y, por lo tanto, equivalentes. Entonces la superficie del paralelogramo es igual a la del rectángulo y, en consecuencia:

Superficie del paralelogramo = *b.a*

- **Superficie del rombo**

Mirar, ver y concluir



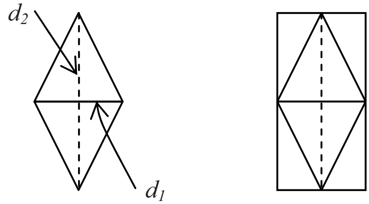
El recurso visual permite a los alumnos concluir que la expresión que da la superficie del rombo es la misma que la que da la superficie del paralelogramo que resulta equicompuesto con el rombo, de donde concluirá que:

$$\text{Superficie del rombo} = d_1 . \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 . d_2}{2}$$

Así como el concepto de polígonos equicompuestos fue un recurso importante para la obtención de las fórmulas de cálculo de la superficie del paralelogramo y la del rombo, la estrategia de utilizar **construcciones auxiliares** se constituye en otro valioso recurso para la obtención de fórmulas de cálculo de superficies de figuras del plano. Contextualizamos estas ideas trabajando con el auxilio de la visualización para obtener las fórmulas de cálculo de las superficies del rombo (otra forma), del trapecio y del triángulo con propuestas también relacionadas con **Mirar, ver y concluir**.

• Superficie del rombo

Mirar, ver y concluir

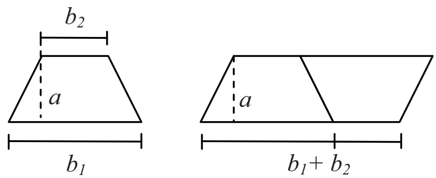


De la observación de la figura se concluirá que la superficie del rombo es la mitad de la superficie de un rectángulo cuyos lados son d_1 y d_2; de donde:

$$\text{Superficie del rombo} = \frac{d_1 \,.\, d_2}{2}$$

• Superficie del trapecio

Mirar, ver y concluir



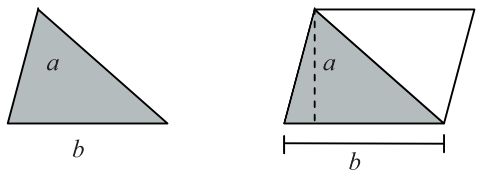
De la observación de las figuras se concluirá que la superficie del trapecio es la mitad de la superficie de un paralelogramo cuya base es la suma de las bases del trapecio y su altura la misma que la del trapecio. Se obtiene entonces que:

$$\text{Superficie del trapecio} = \frac{(b_1 + b_2)\,a}{2}$$

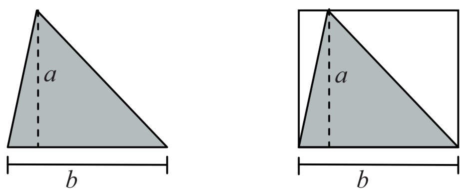
• Superficie del triángulo

Mirar, ver y concluir

• Una forma



• Otra forma



De la observación de cualquiera de las dos secuencias dadas en las figuras se concluirá que la superficie del triángulo es la mitad de la superficie de un paralelogramo que tiene igual base y altura que el triángulo. Se obtiene entonces que:

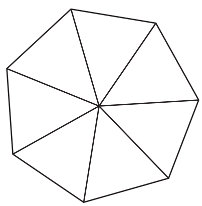
$$\text{Superficie del triángulo} = \frac{b \,.\, a}{2}$$

Otro camino para lograr la deducción de las fórmulas de cálculo se basa en el empleo del razonamiento deductivo, independientemente del recurso visual. Para ejemplificar nuestra propuesta, como lo hacemos habitualmente, circunscribimos la exposición a un tema particular. En este caso, la deducción de la fórmula de cálculo para la superficie de polígonos regulares.

La obtención de esta fórmula será un proceso de razonamiento deductivo sencillo a partir de la información lograda en procesos previos.

En efecto:

- Al estudiar los polígonos se consideraron los polígonos regulares, reconociendo en ellos lados y ángulos congruentes.
- Los polígonos regulares son polígonos inscriptibles en una circunferencia y por lo tanto sus vértices equidistan del centro de la misma, lo que implica que al unir cada vértice con el centro queden determinados tantos triángulos isósceles congruentes como lados tenga el polígono.
- La altura de cada triángulo respecto al lado del polígono es la apotema del polígono regular.
- La superficie del polígono es la suma de las superficies de estos triángulos.



De estos datos se concluye que:

La superficie del polígono regular es igual al producto de la superficie de uno de los triángulos por el número de triángulos.

En símbolos:

$$\boxed{\text{Superficie del polígono regular} = n \,.\, \frac{l \,.\, ap}{2}}$$

donde:

l es la longitud del lado del polígono

n es el número de lados del polígono

ap es la longitud de la apotema del polígono

expresión que sintetiza el proceso de pensamiento.

Claro está que en la educación primaria será suficiente con llegar a esta fórmula.

Si se desea hacer uso de propiedades de la multiplicación y seguir operando en la fórmula aplicando además el concepto de perímetro, se puede obtener la fórmula tradicionalmente conocida.

Así,

$$\text{Superficie del polígono regular} = n \cdot \frac{l \cdot ap}{2}$$

$$\text{Superficie del polígono regular} = \frac{(n \cdot l) \cdot ap}{2}$$

$$\text{Superficie del polígono regular} = \frac{per \cdot ap}{2}$$

Hemos visto algunas estrategias para la obtención de fórmulas de cálculo de algunas superficies. Estrategias similares podrían emplearse para la deducción de expresiones de cálculo de otras figuras.

Como síntesis de lo expuesto consideramos oportuno realizar: ***algunas observaciones que hacen a la organización curricular.***

- Conocida la expresión que permite obtener la superficie de un triángulo, la determinación de la superficie lateral o total de pirámides rectas —de bases cuya superficie sabemos calcular— se constituirá en un problema de aplicación de conocimientos.

  ¿Qué estamos proponiendo?

  Estamos proponiendo que calcular la superficie lateral o total de esas pirámides no supone la elaboración de fórmulas distintas de las conocidas. Simplemente, por ejemplo, el cálculo de la superficie total se reducirá a sumar las superficies de los triángulos que definen la superficie lateral y la de la figura que es base de la pirámide.

El cálculo de superficies no se circunscribirá al cálculo de figuras del plano.

- El uso de las fórmulas para calcular la superficie de las distintas figuras depende de la información que se disponga sobre las mismas. Así, por ejemplo, si del cuadrado se conociese la longitud de sus diagonales recurriríamos al hecho de que el cuadrado es un rombo y utilizaríamos la fórmula que da la superficie de éste.

  De manera análoga, si de un rombo se conociese un lado y la altura relativa al mismo necesitaríamos, para calcular su superficie, recurrir a la fórmula de la superficie del paralelogramo.

- El cálculo de superficies de polígonos no regulares puede efectuarse aplicando la estrategia de *descomponer el polígono* en figuras de las cuales se conozca su fórmula de cálculo.

- Una lectura sobre la historia de la Matemática nos muestra que la transformación de figuras y/o la construcción de figuras auxiliares para el cálculo de superficies de figuras fue una estrategia utilizada desde la antigüedad. Los papiros egipcios que han logrado sobrevivir 3.500 años aproximadamente dan cuenta de esto. En el problema Nº 52 del más extenso de estos papiros, conocido como papiro Rhind (siglo XVII A.C.) —actualmente en el Museo Británico—, se plantea cómo calcular el área de un trapecio isósceles considerando el caso particular en que la base mayor es 6, la menor es 4 y la distancia entre ellas es 20. El escriba considera la semisuma de las dos bases "*de manera que se convierta en rectángulo*" y lo multiplica por 20.

  Para reflexionar:

  ¿Cómo habrá construido la figura el escriba?

En lo expuesto hemos planteado algunas estrategias para la determinación de fórmulas de cálculo de superficies. Los fundamentos y marcos teóricos que subyacen en esta propuesta son similares a los que permitirían construir fórmulas de cálculo para perímetros y volúmenes. No es objeto de la presente publicación el tratamiento de estos temas. Sugerimos se consulte en distintos textos de la bibliografía.

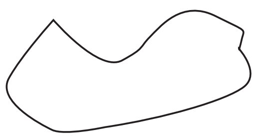
7.4.2. **Aproximación de superficies**

Es de notar que podemos calcular las superficies de todas las figuras planas cuyas fronteras están constituidas por una poligonal cerrada.

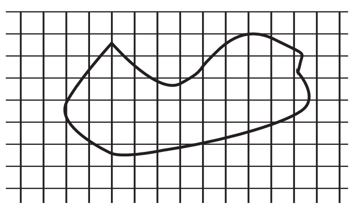
Es hora de que nos preguntemos:

¿Cómo determinar la superficie de figuras cerradas y acotadas pero con fronteras no necesariamente constituidas por una poligonal?

Supongamos, por ejemplo, que deseamos calcular la superficie de la siguiente figura:



La figura muestra la estrategia utilizada para aproximar la superficie buscada mediante la superficie de una figura conocida: la del cuadrado.



Los alumnos pueden aproximar la superficie de la figura por exceso y por defecto mediante un trabajo muy sencillo: contando la menor cantidad de cuadrados que contiene la figura en el primer caso, contando los cuadrados que quedan contenidos en la figura para el segundo. Considerando como unidad de superficie cada cuadrado, la medida de la superficie de la figura se encontrará entre los dos números naturales anteriores.

Ante la pregunta: *¿podremos obtener una mejor aproximación del área*[10] *buscada?*, los alumnos deberán ser capaces de proponer: considerar cuadrados más pequeños como unidad de medida.

Probar que esto es válido experimentalmente, es una tarea que supone un trabajo reflexivo y cuidadoso, donde la idea de medir surge como herramienta imprescindible para que el trabajo realizado adquiera el sentido que le estamos queriendo infligir. Los alumnos están construyendo una nueva noción: la de aproximar el área de una figura cualquiera mediante áreas de figuras conocidas (en este caso cuadrados) que le darán valores por exceso y por defecto de la misma. Más aún, podrán acotar el error que está cometiendo si consideran un determinado valor del área entre los valores por exceso y defecto calculados.

En síntesis: a través del proceso de medición se puede obtener un número: la medida de la superficie —función de la unidad seleccionada— o una aproximación de dicho número.

7.5. **Conclusión**

A través del desarrollo del capítulo hemos planteado ideas generales con el tema Medidas. Pensemos que si existen obstáculos durante la transposición didáctica, si hay contenidos básicos no desarrollados, si no se han usado debidamente los instrumentos de medición, es momento oportuno de replantearse la forma de enseñar y revalorizar este tema de gran "uso social".

Esto será para algunos, quizás, el reto didáctico de hoy.

En caso contrario los invitamos a continuar avanzando, no debemos descuidarnos, ya que los avances tecnológicos provocan otras exigencias en el desarrollo de este contenido, para que esté acorde a las demandas sociales y culturales del presente.

10. Área: es la medida de la superficie.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA, C.; C. BURGUÉS; J. FORTUNY (1995) *Invitación a la didáctica de la Geometría*. Síntesis, Madrid.

——— (1995) *Una matemática feliz y otras conferencias*. OMA, Buenos Aires.

——— (2000a) *Sorpresas geométricas*. OMA, Buenos Aires.

——— (2000b) *La matemática hermosa se enseña con el corazón*. OMA, Buenos Aires.

ALSINA, C.; C. BURGUÉS; J. FORTUNY; J. GIMENEZ; M. TORRA (1996) *Enseñar matemáticas*. Graó, Barcelona.

BARELL, J. (1999) *El aprendizaje basado en problemas. Un enfoque investigativo*. (Edición especial para la Red Federal de Formación Docente Continua, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.) Manantial, Buenos Aires.

BRESSAN, A. M. y otros. (1997). *Los CBC y la enseñanza de la matemática*. A-Z Editora, Buenos Aires.

BOYER, C. B. (1996) *Historia de la Matemática*. Alianza, Madrid.

BROUSSEAU, G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros El Zorzal, Buenos Aires.

——— (1990) "¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diversos enfoques de la Didáctica de la Matemática?". En *Enseñanza de las Ciencias*. Revista de la Universidad de Barcelona. Barcelona.

Buschiazzo de González Beltrán, N.; S. Filipputti de García; L. Lagreca de Cattaneo; N. Lagreca de de la Pace; S. Strazziuso de Hinrichsen (2010a) *Matemática 1. Aprendo Haciendo Matemática. Libro para primer año*. UNR Editora, Rosario.

——— (2010b) *Matemática 2. Aprendo Haciendo Matemática. Libro para segundo año.* UNR Editora, Rosario.

——— (2010c) *Matemática 3. Aprendo Haciendo Matemática. Libro para tercer año.* UNR Editora, Rosario.

——— (2010d) *Matemática 4. Aprendo Haciendo Matemática. Libro para cuarto año.* UNR Editora, Rosario.

——— (2010e) *Matemática 5. Aprendo Haciendo Matemática. Libro para quinto año.* UNR Editora, Rosario.

——— (2010f) *Matemática 6. Aprendo Haciendo Matemática. Libro para sexto año.* UNR Editora, Rosario.

Buschiazzo de González Beltrán, N.; S. Filipputti de García; M. I. González de Fongi; L. Lagreca de Cattaneo; N. Lagreca de de la Pace; S. Strazziuso de Hinrichsen (2008) *Aprendo Haciendo Matemática.* PREM 7 *Libro para séptimo año.* UNR Editora, Rosario.

Castelnuovo, E. (1963) *Geometría intuitiva.* Editorial Labor, Barcelona.

Castro Martínez, E.; L. Rico Romero; I. Segovia Alex (1989) *Estimación en cálculo y medida.* Síntesis, Madrid.

Cattaneo, L.; E. Fongi; M. I. González (2001) *De los naturales a los reales, un largo camino*. Editorial Homo Sapiens, Rosario.

Cattaneo, L.; N. Lagreca; S. Filipputti; S. Strazziuso de Hinrichsen; N. Buschiazzo (1997) *Matemática hoy en la EGB.* Homo Sapiens, Rosario.

Chamorro, Ma. del C. *et al.* (2005) *Didáctica de las matemáticas.* Colección Didáctica primaria. Pearson, Madrid.

Chamorro Plaza, Ma. del C.; J. M. Belmonte Gómez (1994) *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis, Madrid.

Chevallard, Y. (1985) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique, Buenos Aires.

Courant, R.; H. Robbins (1963) *¿Qué es la Matemática?* Aguilar, Madrid.

D'Amore, B. (2005) *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática.* Reverté, México.

DEL OLMO ROMERO, Ma. A.; Ma. F. MORENO CARRETERO; F. GIL CUADRA (1993) *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Síntesis, Madrid.

DIENES, Z. P.; E. W. GOLDING (1971) *Los primeros pasos en matemática 3. Exploración del espacio y práctica de la medida.* Teide, Barcelona.

FERNANDEZ, S. (2001) "La historia de las matemáticas en el aula". UNO. Revista de didáctica de las matemáticas Nº 26. Barcelona.

GENTILE, E. (1991) *Aritmética elemental en la formación de Matemática.* Red Olímpica. Buenos Aires.

GUZMÁN, M. DE (1996) *Tendencias innovadoras en educación matemática.* OMA, Buenos Aires.

——— (1991) *Para pensar mejor*. Labor, Barcelona,

——— (consultado 2010) "La enseñanza de las Ciencias y la Matemática". En: www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

——— (1976) *Mirar y ver*. Red Olímpica, Buenos Aires.

KLINE, M. (1992) *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Alianza, Madrid.

MALBA TAHAN (1994) *El hombre que calculaba*. Panamericana, Bogotá.

MARTÍNEZ RECIO y otros (coord.) (2004) "Matemáticas: Cultura y aprendizaje" en Revista Nº 16.

MILLER, C. D.; V. E. HEEREN; E, J. HORNSBY (1999) *Matemáticas, Razonamiento y Aplicaciones*. Editorial Pearson, México.

PISA 2006. *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico*.

PROCIENCIA CONICET. (1995) *Geometría, su enseñanza*. Ministerio de Educación de la Nación. Buenos Aires.

——— (1996) *Matemática. Metodología de la Enseñanza.* Ministerio de Educación de la Nación. Buenos Aires.

RESSIA DE MORENO, B. (2004) *La enseñanza del número y del sistema de numeración en el nivel inicial y el primer año de la EGB*. Paidós. Buenos Aires.

REY PASTOR, J.; J. BABINI (1984) J. *Historia de la Matemática.* Gedisa. Barcelona.

SANTALÓ, L. A. (1981) *Enseñanza de la matemática en la escuela media.* Docencia, Buenos Aires.

——— (1993) *La geometría en la formación de profesores.* Red Olímpica. Buenos Aires.

SANTOS TRIGO, L. M. (1996) *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericano. México.

STACEY, K.; S. GROVES (1998) *Resolver problemas: estrategias.* Narcea, Madrid.

VERGNAUD, G. (1991) *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas, México.

Serie Didácticas

Didáctica de la Matemática

Enseñar a enseñar Matemática

Liliana Cattaneo
Noemí Lagreca
María Inés González
Noemí Buschiazzo

ISBN 978-950-808-615-0

9 789508 086150

HomoSapiens
EDICIONES