CAPÍTULO 6

La Clase de Matemáticas Centrada en la Resolución de Problemas

La primera sección de este capítulo explica qué es un problema, en particular un problema abierto y da pistas para formular un buen problema para la clase. Finalmente argumenta por qué centrar la clase en la resolución de problemas.

En segunda sección parte con un ejemplo de cómo se construye un problema en el marco del Estudio de Clases y luego explica cómo preparar la clase y en qué consiste la clase centrada en el enfoque de resolución de problemas.

En la tercera sección se desarrolla un ejemplo de cómo transformar una clase de ejercitación en una clase atractiva de resolución de problemas. Se presenta un plan de clases construido por el profesor Hosomizu y se detalla el desarrolllo de algunas actividades matemáticas creativas.

El capítulo finaliza con la descripción de clases que cautivan, siguiendo el modelo del profesor Tsubota.

Temas:

1. El problema de la clase
2. La construcción del problema para la clase
3. Problemas que hacen interesante la ejercitación
4. Clases que cautivan a los niños

1. EL PROBLEMA DE LA CLASE

¿Qué se entiende por problema?, ¿qué es un problema abierto?

Tradicionalmente los textos de matemática han incluido ejercicios al final de cada unidad, para que los alumnos consoliden sus aprendizajes por medio de la práctica repetitiva y el encadenamiento de algunos comportamientos. En adición a los ejercicios, algunos textos incluyen problemas de aplicación, es decir, enunciados verbales referidos a situaciones vinculadas de manera casi directa a los procedimientos ejercitados. Tales problemas no ponen a los alumnos en una situación que derive en la construcción de un conocimiento nuevo para ellos, sino que los expone a una situación en la cual han de integrar los conceptos asociados a los procedimientos recién ejercitados.

En el enfoque de enseñanza, donde el procedimiento que da origen a la ejercitación (algoritmo de la multiplicación, por ejemplo) deriva de la comprensión del concepto asociado (producto, por ejemplo como grupo de objetos que se repite cierta cantidad), el problema de aplicación es sólo un ejercicio.

El verdadero problema es aquel que pone al alumno en una situación nueva, ante la cual no dispone de procedimiento inmediato para su resolución. Por ende, un problema se define en cuanto a su relación con el sujeto que lo enfrenta y no en cuanto a sus propiedades intrínsecas. Un problema puede ser un ejercicio para un alumno de un curso superior y de hecho un enunciado que fue un problema para un alumno deja de serlo una vez que lo resuelve.

El problema por naturaleza es abierto. Para los matemáticos un problema está abierto si no se conoce su solución. Por ejemplo, la conjetura de la existencia de infinitos primos impares consecutivos es un problema abierto. En el ámbito de la matemática escolar se dice que un problema es abierto para un estudiante si éste no dispone de procedimientos estándares para solucionarlo, o bien, el problema tiene varias soluciones.

Los problemas abiertos son de especial interés para desarrollar en los alumnos una conducta de investigación y su pensamiento heurístico. Tienen un valor formativo, más que informativo en la formación matemática de los niños.

Un buen problema para la clase

Un buen problema es accesible a la mayor parte de los alumnos, por ende son buenos aquellos problemas que admiten varios enfoques para su resolución, tanto intuitivos como formales, siendo apropiados para atender a la diversidad de los alumnos de un curso.

Un problema que no tiene solución única o que admite soluciones parciales es particularmente útil para trabajarlo en clases, en el aula donde los ritmos de aprendizaje son distintos. Es usual que los alumnos con mayor habilidad para resolver problemas en matemáticas experimenten la alegría de resolver un problema. Aquellos problemas que admiten distintos caminos y distintas soluciones dan la posibilidad que simultáneamente varios alumnos experimenten la alegría de resolver el problema con originalidad.

En virtud de estos criterios, la selección y el análisis de los problemas antes de su aplicación en el aula constituyen una tarea de relevancia pedagógica. Los problemas encierran potenciales muy variados. La selección y estudio de buenos problemas es una tarea compleja y valiosa en la didáctica de la matemática.

Un buen problema para la clase de matemáticas es consistente con el objetivo de la clase, con los objetivos de mediano plazo de la componente matemática del currículo y con los objetivos transversales del mismo. Un buen problema permite al alumno alcanzar un conocimiento nuevo al poner en juego los ya adquiridos en clases anteriores. También es un buen problema aquel que desarrolla habilidades genéricas propias del quehacer en matemáticas, como pensamiento inductivo, modelación, formulación, representación, argumentación y validación.

En las clases de matemáticas bajo el estilo de resolución de problemas, como ya es tradición en Japón, el profesor expone al alumno un problema que es un pequeño paso en la procedimentalización o en la extensión de un concepto, de modo que el proceso de búsqueda individual del alumno y la instancia plenaria de presentación y discusión de soluciones al problema conlleven una mayor comprensión del alumno acerca del concepto y de los procedimientos asociados.

- **¿Por qué centrar la clase en la resolución de un problema?**

Porque este tipo de clases es proclive a la consecución de los múltiples objetivos que se propone el currículo a través de la matemática escolar. Un problema es un reactivo que involucra al alumno en una actividad orientada a la abstracción, la modelación, la formulación, la discusión, en fin. A partir del enunciado del problema, el profesor entrega a los alumnos la responsabilidad de construir su conocimiento guiando la dinámica de la clase hacia la discusión, la reflexión o la ejercitación según los objetivos propuestos y el tiempo previsto para ello.

El enfoque de resolución de problemas en matemáticas se ajusta a las demandas sociales del currículo. Esto es, a la aspiración de que los ciudadanos se incorporen constructivamente a un país en que la tecnología ha dejado para las máquinas las tareas intelectuales repetitivas y las manuales que exigen fuerza física. El requerimiento social actual y futuro es la capacidad de integración al medio y de adaptación constructiva a los cambios que muchas veces no se prevén.

Desde la perspectiva psicológica, el aprendizaje puede ser entendido como una reconstrucción de la comprensión. La memorización contribuye a que los aprendizajes se retengan pero sólo como conocimientos aislados. Es la resolución de problemas la que lleva al alumno a integrar los conocimientos nuevos a los ya adquiridos, favoreciendo el enriquecimiento de la comprensión y por ende un mejor aprovechamiento de las capacidades personales para la vida del individuo y de su colectivo.

Teniendo en consideración que los formatos de las clases inciden en los objetivos de las mismas, podemos precisar que aquellas clases en que el profesor asume un rol eminentemente de expositor, o en que la actividad del alumno se reduce preferentemente a la ejercitación, los objetivos de la clase se limitan a aprendizajes reproductivos. En el modelo de clases, centrado en la exploración de un problema nuevo para los alumnos, el ritmo y enfoque de la clase es armoniosamente negociado por el profesor y los alumnos. Si bien la clase no conduce a los alumnos por un camino "óptimo" y uniforme, favorece la vinculación del concepto nuevo con los aprendizajes previos de los alumnos.

Si bien el proceso de exploración es lento, lleva a una comprensión más profunda por parte del alumno y tiene ventajas en otras dimensiones que lo hace más eficiente desde una perspectiva más amplia y de largo plazo. Al tener presente el doble objetivo de la matemática escolar: el formativo (habilidades generales de comunicación, pensamiento y actitudes) y el informativo (destrezas y conceptos), el modelo de aprendizaje productivo de resolución de problemas es más eficiente que el modelo reproductivo, de modelación por repetición.

Aprendizaje desde una perspectiva multidimensional

Modelo I Discurso del profesor

Modelo II Exploración del alumno

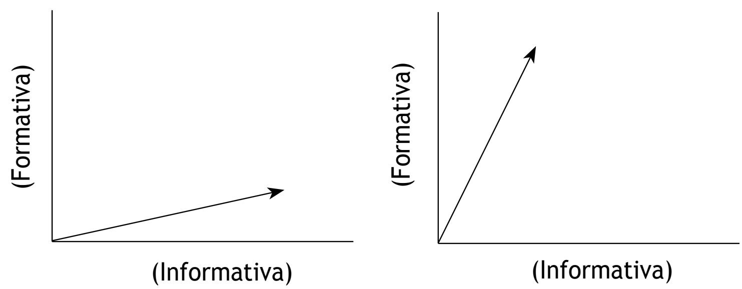

Figura 6.1: Representación bidimensional de la enseñanza

Reflexión:

Analice las dos situaciones de enseñanza presentadas en el video con respecto a la exposición de contenidos por parte del profesor y la exploración del alumno. Para cada video comente su percepción con respecto al desarrollo de conocimientos, procedimientos y actitudes en el alumno: habilidades de pensamiento y comunicación, equidad y participación, igualdad de oportunidades, colaboración, desarrollo social y valores, desarrollo de la personalidad, autonomía y respeto a las diferencias individuales, atención a los conocimientos previos variados.

¿Qué puede hacer un profesor y un sistema educativo para el logro de los objetivos del currículo? ¿Cómo crear una clase en la que todos los alumnos aprendan? Reflexione un minuto y comparta su opinión con sus colegas respecto al siguiente enunciado:

En el proceso de la internacionalización de los últimos 50 años ha habido una tendencia a estudios comparativos que han permitido estudiar la relación entre los niveles de aprendizaje de los alumnos y distintos factores como la articulación del currículo, la de la clase, la formación del profesor, y otros como la gestión de las escuelas, el honorario de los profesores y el gasto en educación. Las conclusiones de estos magnos estudios, sin que estén exentos de controversias, abogan por la importancia de la participación intelectual activa del alumno en el proceso de aprendizaje.

- El uso de problemas abiertos frente a la diversidad

(1) Los problemas ampliables o de final abierto: Solucionar problemas es la norma en las clases de matemáticas porque aprender cómo solucionar problemas se considera importante. Sin embargo, muy a menudo incluso si hay varias maneras de solucionar el mismo problema, hay solamente una respuesta correcta. Algunas personas encuentran que este es un enfoque renovado y les gusta. Por otra parte, otras personas detestan el hecho de que haya solamente una respuesta no negociable. ¿Qué sucede cuando hay varias respuestas posibles en vez de una sola respuesta correcta? Si uno pregunta, "¿cuánto es 3 + 4?" un chico disparará la respuesta "¡7!" y es así. Sin embargo, si preguntamos, "¿qué pares de números suman 7?". Hay muchas respuestas posibles. Por supuesto, habrá estudiantes que contestarán "3 + 4", otros podrían dar la respuesta opuesta, es decir, "4 + 3". Algunos niños dirán "1 + 6", mientras que otros dirán "0 + 7". Estudiantes de grados más altos que digan 1.6 + 5.4 también sería correcto. De esta manera, la idea de trabajar con fracciones puede empezar a funcionar con bastante rapidez.

La introducción de tales problemas en clase que implican varias respuestas correctas permite que muchos niños se sientan involucrados en la lección. Como cada una de las respuestas es correcta, el número de niños evaluados positivamente aumentará. Los problemas que tienen varias respuestas o finales correctas se llaman los problemas ampliables o de final abierto, y las clases que utilizan tales problemas se dice que son de enfoque de final abierto.

(2) Tipos de problemas de final abierto. El problema dado en el ejemplo antedicho es un problema estructurado de manera inverso debido a la manera en que se han ubicado las condiciones y las respuestas. Hay muchos otros tipos de problemas de final abierto. Los problemas que permiten a los estudiantes descubrir una regla son un tipo. Un ejemplo de este tipo es uno que se refiere a la búsqueda de propiedades en la tabla de multiplicación. Los problemas de clasificación donde los estudiantes distinguen los números desde varios puntos de vista son otro tipo de problemas.

Existen también los problemas de conversión numérica, donde uno tiene que pensar en usar un método de ordenamiento cuando los equipos compiten en maratones. La puntuación del mejor del equipo, o bien, del promedio del equipo se puede utilizar como la puntuación del grupo. Además, los problemas de condición insuficiente se pueden a veces considerar como problemas de final abierto. Un problema de este tipo sería: el número 36 está formado por cierta cantidad de decenas y cierta cantidad de unidades. La pregunta requiere como respuesta que contiene una combinación de números, así “3 veces 10 y 6 por 1” es correcta. Sin embargo, un pensamiento cuidadoso revela que la respuesta dada arriba no es la única. Otras respuestas, como “2 por 10 y 16 veces 1” también son correctas. El pensar en estas posibilidades se hace necesario para hacer cálculos con reservas, como por ejemplo “36 - 19,” porque el cálculo de los dígitos para la unidad 1 requiere la idea de que se preste desde la cifra de las decenas. Así, los estudiantes están conscientes de que aunque la respuesta sea particular, es correcta, habiendo otras respuestas posibles igualmente correctas. Usando las técnicas descritas arriba, pueden ser creados distintos problemas de final abierto. Las lecciones futuras pueden entonces mejorarse incorporando este tipo de problemas con el objeto de desafiar a la diversidad en el pensamiento del estudiante. En las clases de matemáticas, es posible alejarse de la noción de que solamente los temas convencionales deben ser estudiados.

De esta manera, los niños ganarán seguramente experiencia en buscar respuestas por sí mismos, y adquirirán la capacidad de ver a su alrededor desde una perspectiva más amplia, así demostrando habilidades diversas de resolución de problemas no sólo dentro del reino de las matemáticas sino también al hacer frente a diversos acontecimientos de la vida real.

2. LA CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA PARA LA CLASE

Sin profundizar en un marco teórico para la construcción del problema de la clase, cuestión tratada en los capítulos 6 y 7, se destacan en esta sección criterios cercanos al sentido común que ayudan al docente a planificar la clase.

- Construcción del problema: un caso en la escuela de Tsuta

El relato de Fernández y Yoshida (2005) en relación al Estudio de Clases en la escuela de Tsuta es una buena forma de entrar en el tema. En un comienzo la propuesta de enseñanza para los alumnos de Tsuta fue comenzar con el problema de restar 19-8 porque el curso tenía 19 alumnos y 8 eran mujeres, lo cual era una situación concreta para los niños. Pero en la conversación entre los profesores se dijo que esa situación estaba forzando el sentido de la situación y que se debía decidir con argumentos matemáticos, qué números eran más apropiados. Luego, decidieron elegir nuevos números ligándolos a la actividad de recoger hojas caídas de los árboles en otoño, la estación del momento, lo que sería significativo para los niños. Además, podrían vincular el tema con el árbol genealógico y la familia, que era el tema que trataban en la asignatura Vida, en ese momento. Además, usarían el formato "El niño … recogió __ (número) hojas". En cartulina con el dibujo de un árbol pegarían varias hojas ajustadas a las ramas. En cada hoja pegarían fotos de los integrantes de su familia. Surgiendo preguntas como ¿cuántas hojas no fueron usadas?, ¿cuántas sobraron?

Los profesores que preparaban la clase decidieron que restar 7 a 12 era un buen problema. 12 era bueno, ya que cualquiera sea el número de integrantes de la familia como sustraendo, la resta requeriría usar reservas y agrupar. Recogerían más de 12 hojas de los árboles, pero la profesora les pediría 12 hojas limpias para hacer el collage con el árbol genealógico. El problema sería 12-7 ya que se adaptaría a la realidad del contexto elegido. Decidieron que los niños trabajaran en algunos problemas previos, antes de enfrentar el problema principal. Pensaron en 10-2 y en 10-5, que serían fáciles para los niños por no requerir la estrategia de agrupación.

La profesora con más experiencia sostuvo que los niños podrían aplicar la estrategia del suplemento, para llegar a 10, podrían restar 5 y resolver 12-2 sin necesidad de reagrupar. Inventaron contextos para la situación, como por ejemplo que la profesora recolectó 12 hojas, pero tuvo que dar 2 a un niño,

¿con cuántas hojas quedó la profesora?

Luego, sugirieron ejercicios para practicar. 12-9 les pareció adecuado, porque ninguna familia tenía 9 miembros y sería un cálculo nuevo. Un profesor sugirió 6 y no 9, pues 9 está cerca de 10. La idea no prosperó porque 7 y 6 están cercanos. Así avanzó la discusión acerca de la proposición del problema de la clase.

- ¿Cómo preparar la clase bajo el enfoque de resolución de problemas?

Preparar la clase bajo este enfoque involucra preparar un problema que motive a los alumnos a buscar regularidades, por ejemplo, ¿qué multiplicaciones en los naturales tienen como producto 600? Detrás de esta pregunta aparecen los divisores de un número, y más al fondo, la descomposición prima del mismo.

Para planificar la clase los profesores japoneses usualmente identifican una situación preliminar que los alumnos pueden resolver con sus conocimientos previos y una situación asociada, algo más compleja que no pueden resolver de manera inmediata por estar asociada a la vez a un conocimiento no adquirido previamente. Sin embargo, en la resolución del nuevo problema el alumno es desafiado a poner en juego las estrategias, de manera más generalizada, usadas para la resolución del problema inicial.

El desafío propuesto es una herramienta para cultivar en los alumnos el pensamiento inductivo que les permita por ejemplo explicar regularidades. En el planeamiento de este proceso que favorece el desarrollo de variadas formas de pensamiento, el profesor, o grupo de profesores, idea preguntas para los alumnos, como por ejemplo, ¿por qué resulta?, ¿funcionará en otros casos? Así, el profesor favorece el desarrollo del pensamiento deductivo en los alumnos, mientras están construyendo un nuevo conocimiento, como podría ser "una forma para multiplicar números de dos dígitos".

El desafío propuesto pone al alumno en conflicto, se encuentra ante una situación que en su expresión simple es capaz de resolver, pero ahora no. El alumno se ve obligado a volcar su pensamiento hacia sus propias capacidades a la extensión de sus conocimientos, a la re-conceptuación de sus ideas. Se ve en la necesidad de disponer de nuevos procedimientos para resolver una gama más amplia de situaciones. El alumno ha sido desafiado a asumir la responsabilidad de su aprendizaje.

- La clase centrada en la resolución de problemas

La clase ha de entenderse como un proceso y el problema como un vacío o diferencia entre un estado actual y uno esperado. El proceso consiste en que el alumno pasa del estado inicial al deseado recurriendo a elaboraciones personales.

Durante la clase se espera que el alumno por iniciativa propia o por efecto de la comunicación con sus pares avance en la construcción de conocimientos, la extensión de saberes y la superación de los conflictos. Por ende, la tarea del profesor es disponer de recursos para que el proceso fluya y los alumnos avancen hacia la consecución de la meta: ganar comprensión, disponer de técnicas de mayor alcance, extender los significados a nuevos ámbitos, desarrollar procesos de pensamiento.

El problema o la pregunta de la clase se construye usualmente en el contexto de los contenidos del currículo, de modo que la exposición de los alumnos a estas situaciones problemáticas que contribuyen al desarrollo de sus formas de pensar de carácter inductivas, deductivas o analógicas, contribuyan también a (a) la comprensión, profundización, extensión y procedimentalización de conceptos matemáticos, (b) al desarrollo de formas de representación de los objetos matemáticos, y (c) al desarrollo de distintas formas de comunicación, explicación, argumentación, provisión de ejemplos y contra-ejemplos, declaración de condicionales del tipo “si… entonces” y “si no”, la provisión de conjeturas, entre otras.

El problema propuesto para la clase debe tener un alcance limitado, de modo que sea posible avanzar en la consecución de la meta en el lapso de los 45 minutos disponibles en la clase y en el rango de la capacidad de concentración de los niños en una tarea que les exige concentración. Los procesos de búsqueda no debieran sobrepasar los 20 minutos, pues de lo contrario será infructuoso mantener a los alumnos concentrados. Se tendrá en mente un pequeño paso, una actividad en la que todos los alumnos se sientan participando y en la que atiendan los objetivos.

El profesor anticipará su rol durante la clase, tendrá decidido cómo presentará el problema a los alumnos, el contexto y el diálogo a tener con ellos. El profesor anticipará las posibles formas de pensar de los alumnos, ¿cómo ellos podrían estar abordando el problema?, ¿qué dificultades podrían tener?, ¿frente a qué obstáculos podrían estar detenidos?, ¿qué podrían estar aprendiendo en el proceso?

Alumno: Cuando estudiamos el caso para un dígito…

Alumno: La explicación de la clase pasada podría…

Profesor: Por favor, recuerde…

La pregunta central de la clase puede estar vinculada a una secuencia de preguntas que hagan fluir la clase hacia procesos de pensamiento de nivel superior. Siendo conveniente partir con una situación que ponga en juego los conocimientos ya adquiridos por los alumnos, es deseable que la actividad provoque en todos los alumnos una sensación de éxito y capacidad para abordar la próxima tarea.

La pregunta central puede consistir en “pensar una forma de calcular” frente a un tipo de situación aditiva o multiplicativa por ejemplo. El alumno debiera elaborar una forma propia de calcular teniendo en consideración los aprendizajes ya adquiridos. El alumno dispondrá ya de un modelo para preguntas parecidas y deberá adaptar su modelo, extenderlo, para conseguir una nueva forma de calcular exitosa para el tipo de problema que se le propone

Pero no bastará que encuentre la nueva forma de calcular o extienda la ya aprendida. Le será requerido que argumente su respuesta, que la valide y eventualmente que explique a sus compañeros por qué esa respuesta es adecuada, y más allá tendrá que vincularla con las respuestas de los compañeros, reflexionando en cuanto a la facilidad y eficiencia de su forma de proceder.

En la preparación del problema el profesor habrá de figurarse cómo lo va a abordar el alumno, ¿cuánto avanzará?, ¿qué hará en clases el alumno que ya alcanzó la respuesta o la sabía de antemano?, ¿cómo evitará que algunos alumnos se aburran? O ¿cómo atenderá a los alumnos que están quedando atrás?

El profesor deberá preguntarse por el sentimiento que desarrolla el alumno que siempre tiene dificultades. Y en consecuencia deberá desarrollar preguntas complementarias, material concreto, formas de representación alternativas, para poder gestionar la clase de modo que la mayoría sino todos los alumnos se sientan partícipes y avancen en su comprensión.

La pregunta central estará inmersa en una situación problema que favorezca la comprensión del alumno y que lleve a que surja en él la necesidad de buscar la respuesta al problema. El tema debe llegar a ser familiar para el alumno y las tareas requeridas deben ser comprendidas por él. El profesor debe imaginar las distintas respuestas parciales o completas de los alumnos y debe desarrollar ideas para conducirlas a una integración.

El profesor dispondrá de un repertorio de preguntas complementarias o meta preguntas que le permitirán conducir la clase de modo que los alumnos profundicen en el contenido -¿Cuál es la respuesta?, ¿cuántas maneras puede encontrar que lleven a la solución?- y que conduzcan a los alumnos hacia nuevas formas de pensamiento: ¿En qué difiere la forma en que lo hizo tu compañero?

Además, el profesor debiera reflexionar acerca de las posibles estrategias de enseñanza a tener en cuenta: ¿Qué se podría enseñar a los alumnos a partir de esta situación?, ¿qué tipo de preguntas se podrían formular y en qué momento sería más apropiado formularlas? El profesor ha de preguntarse ¿cómo puedo optimizar el proceso?, ¿qué podría preguntar más allá de cómo calcular? Podría cuestionarse sobre qué otros procesos podrían llevar adelante.

La siguiente sección es un ejemplo de cómo un profesor se cuestiona a sí mismo para producir cada vez mejor sus clases.

3. PROBLEMAS QUE HACEN INTERESANTE LA EJERCITACIÓN

Lo ideal es un plan de clases en el que emergen preguntas y más preguntas,

En el siguiente ejemplo, el profesor Hosomizu presenta una forma de planear la clase teniendo en consideración el estilo de clase centrado en la resolución de problemas y en la necesidad de cumplir con el requerimiento de trabajar los contenidos del currículo.

- Un plan de clases en el que emergen preguntas

El siguiente plan de clases fue construido por el profesor Yasuhiro Hosomizu de la Escuela Primaria Anexa a la Universidad de Tsukuba, con el objeto de desarrollar una clase en la cual los alumnos digan "¡Mmh!, de esta forma sí que es fácil calcular". Esta clase fue planeada en el contexto de la enseñanza del cálculo vertical de la multiplicación en tercer grado. El profesor Hosomizu se planteó la pregunta ¿cómo desarrollar lecciones en las que los alumnos aprendan el cálculo vertical mientras disfrutan el proceso de pensar a través del razonamiento? Frente a ella elaboró dos ideas: crear oportunidades en las que los alumnos vivan la experiencia de entusiasmarse mientras piensan desde una perspectiva matemática, y desarrollar actividades matemáticas creativas.

El profesor Hosomizu y su grupo de estudio se dieron cuenta que una vez que los alumnos ya captan el cálculo vertical de la multiplicación para números de dos dígitos, las actividades posteriores de ejercitación -cuya finalidad es proveerles de precisión y rapidez en el cálculo-, tienden a ser aburridas y monótonas para ellos, y eso trae como consecuencia que aquellos alumnos que habían comenzado a tener iniciativa en su aprendizaje y se divertían pensando, se transformen en alumnos más pasivos. Teniendo en cuenta lo anterior, el profesor decidió idear un nuevo plan de clases; un plan en el cual durante la práctica del cálculo vertical, los alumnos se enfrenten a situaciones y problemas donde los mecanismos del cálculo les atraigan la atención y les interesen.

Esto es, el profesor Hosomizu se propuso desarrollar una lección en la que los alumnos puedan ir reconociendo regularidades o propiedades de los números y las operaciones, aun cuando no las puedan ver con claridad. Lo que llevaría a los niños a buscar información adicional, proceso al cual deben poner atención los profesores. El profesor Hosomizu supuso que esta serie de actividades podría cultivar en los alumnos la habilidad para buscar y construir patrones usando el pensamiento inductivo.

El profesor Hosomizu razonó de la siguiente forma: una vez que los alumnos llegan a visualizar un patrón, les surgen nuevas preguntas: ¿Por qué se tiene la regularidad, de dónde procede? ¿Es cierta la regularidad para todos los casos? Entonces, los alumnos dirigen sus acciones teniendo en mente esta nueva información sobre el problema, la regularidad. Así, sugiere Hosomizu que un profesor puede mejorar la habilidad de los alumnos para pensar, esto es, favoreciendo el desarrollo cognitivo y proveyéndole experiencias de razonamiento deductivo.

Para este propósito, el profesor Hosomizu propuso usar la multiplicación de números de dos cifras que coinciden en la decena y terminan en 5. La Figura 6.2 muestra dos regularidades que aparecen en este tipo de cálculos, las dos últimas cifras del producto es 25 y las anteriores se obtienen del producto del dígito de las decenas multiplicado por su sucesor. También mantuvo como objetivos de la lección que los alumnos aprendan la alegría de descubrir un patrón que facilita los cálculos, y la alegría de trabajar en conjunto para encontrar regularidades y pensar acerca de por qué ocurren.

1)	2)
2 5	9 5
X 2 5	x 9 5
1 2 5	4 7 5
5 0	8 5 5
6 2 5	9 0 2 5
| |	| |
2x3 5x5	9x10 5x5

Figura 6.2: Encontrando regularidades en la multiplicación

- Desarrollo de actividades matemáticas creativas

Hosomizu consideró importante crear el máximo de oportunidades posibles en las que los alumnos tomen la iniciativa en su aprendizaje, y en las que el profesor pueda observar el proceso. Para ello, ideó un plan de clase en el que emerjan actividades matemáticas de los siguientes tipos.

• Actividades matemáticas que hacen a los alumnos darse cuenta que podrían existir regularidades.

Actividad: El profesor presenta el cálculo vertical de tres multiplicaciones en la pizarra, como lo muestra la Figura 6.3, y pide a los alumnos que en conjunto resuelvan (examinen, pues ya están resueltos). Nota: Esto da la oportunidad para que los alumnos empiecen a percatarse de que podrían haber regularidades.

1)	2)	3)
2 5	3 5	4 5
X 2 5	x 3 5	x 4 5
1 2 5	1 7 5	2 2 5
5 0	1 0 5	1 8 0
6 2 5	1 2 2 5	2 0 2 5

Figura 6.3: Examinando regularidades en la multiplicación

Los alumnos comienzan simplemente revisando (resolviendo) los ejercicios que les fueron presentados. Por su lado, el profesor tiene que observar las reacciones de los alumnos mientras trabajan. Mientras hacen los cálculos empezarán a murmurar frases como: “El próximo cálculo tendrá que ser 55x55” e “Mmh, todos terminan en 25”. Ahora los niños están anticipando (planteando conjeturas) y tratando de avanzar en la comprensión de las regularidades observadas. Aquí, la tarea del profesor es alentar aquellos murmullos y comportamientos de búsqueda.

Una vez que captan las características de los números en las columnas, empiezan a notar las regularidades: "En todas las multiplicaciones los multiplicandos se repiten, tienen dos dígitos y la cifra de las unidades es 5".

• Actividades matemáticas para obtener información que les ayude a reconocer regularidades.

Actividad: Una vez que los alumnos resuelven 45x45, el profesor les pregunta "Ahora podrían rápidamente (sin hacer el cálculo) imaginar la solución de 95x95?" En ese momento los estudiantes comenzarán a trabajar por sí mismos para obtener información que les pueda ayudar a ver las regularidades. Los alumnos empezarán a recoger información desde distintas perspectivas. Algunos harán los problemas uno a uno: 55x55 = 3025, 65x65= 4225…. Otros, revisarán la información en los problemas llegando hasta 45x45; o bien, trataran de resolver el caso más simple, 15x15.

Después de calcular 95x95 = 9025, pensarán en varias direcciones tratando de encontrar las regularidades. El rol del profesor es poner atención a las reacciones de los alumnos y a los esfuerzos que hacen para tratar de encontrar esas regularidades y sus justificaciones. La tarea para el profesor no es simplemente esperar que los alumnos identifiquen las regularidades, sino que debe intentar captar los procesos de pensamiento de sus alumnos, debe poner atención en cómo los alumnos avanzan en el proceso. El profesor puede decir en voz alta lo que algunos alumnos están haciendo, dando pistas para que el resto del curso pueda avanzar y fortalecer la habilidad de emprender la acción. Algunos alumnos se darán cuenta que el número formado por los dígitos de las centenas a la izquierda se obtiene multiplicando el dígito de las decenas del multiplicando por su sucesor.

• Actividades matemáticas que desafían a pensar la razón por la cual funcionan las regularidades

El profesor Hosomizu destaca que en una lección en la que los alumnos descubren regularidades, siempre aspiramos a que piensen preguntas como ¿Por qué funciona esta regla? y ¿En qué condiciones se puede seguir aplicando?, de manera que se creen momentos en los que los alumnos piensen las razones por las cuales operan tales regularidades. Teniendo presente que esta lección es para tercer grado, para algunos alumnos podría ser difícil producir razonamientos. En este caso, el profesor debiera apoyar, animando a los alumnos a que "comprueben el funcionamiento de las regularidades en otras situaciones" y que "piensen en las regularidades haciendo uso de diagramas".

• Actividades matemáticas desde un enfoque desarrollista

Los alumnos probablemente pueden entender que las regularidades funcionan en todos los problemas de dos dígitos, hasta el producto de 95x95. Luego, se puede intentar planear actividades que contribuyan al desarrollo del pensamiento, como por ejemplo expandiendo la lección a números de tres dígitos o cambiando las condiciones como se muestra en la Figura 6.4. La Figura 6.5 muestra un plan para un desarrollo más profundo de la lección

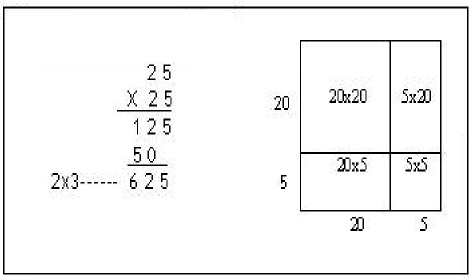

Figura 6.4: Identificando regularidades numéricas usando visualización

Números de tres dígitos	La suma en las unidades es 10	Los dígitos de las decenas son distintos
105	23	25
X 105	x 27	x 35
525	161	125
105	46	75
11025	621	875
(10x11)	(2x3)	No funciona

Figura 6.5: Refutando hipótesis acerca de regularidades

El Plan de la clase

Objetivo de la clase: Encontrar las regularidades y pensar sobre su funcionamiento y aplicación mediante cálculos verticales interesantes.

Tabla 6.1: Matriz del plan de la clase

Actividad de aprendizaje del alumno	Acerca de la enseñanza
1. Desarrollar los siguientes cálculos verticales: 1) 25 X 25 = 125 + 50 → 625 2) 35 x 35 = 175 + 105 → 1225 3) 45 x 45 = 225 + 180 → 2025 La multiplicación de DUxDU tiene la misma cifra en D y la cifra U es 5.	Escribir en la pizarra los cálculos verticales uno por uno en la pizarra y dar tiempo para que los alumnos los examinen. Identificar, desde los murmullos y las acciones de los alumnos, las regularidades identificadas en los factores. Anotarlas en la pizarra.
2. Buscar las regularidades en el producto. "Puede decir cuál es el resultado de 95x95 sin calcular?" Pedirles que obtengan la información necesaria para encontrar la regularidad. Los alumnos toman distintos caminos. Algunos multiplican 15x15, otros continúan con 55x55 y 65x65. Otros prueban directamente en 95x95. Hay producciones de los alumnos. Algunas regularidades o reglas: En el producto o resultado DU es 25. Las diferencias entre resultados consecutivos es 400, 600 y 800. Y la diferencia de las diferencias es 200 Las primeras dos cifras es Dx(D+1)	Los alumnos toman conciencia de que hay una regularidad en el resultado. Darles tiempo para que inspeccionen. Solicitar a los alumnos que registren las regularidades que encuentren.
3. Explicar las regularidades encontradas: "¿Qué tipo de regularidades encontraste?" Alumnos: 95x95= 9025. DU es 25 y UmC es 9x10 es decir Dx(D+1)	Presenten los pasos que siguieron para encontrar las regularidades, y confirmar que los alumnos entienden que no sólo interesan los resultados sino también el proceso.
4. Pensar por qué funciona la regla, de dónde viene la regularidad? "¿Se mantiene la regularidad en cualquier situación?" Se incluyen diagramas para 15x15 y 25x25. Ver Figura 6.4.	Explicar la estructura de las regularidades en términos simples para que entiendan los alumnos. Si para los alumnos es difícil entender el esquema bajo el cual se mantiene la regularidad, use diagramas.
5. Piense cómo seguir adelante con este problema "¿Funcionará para números más grandes?" "¿Funcionará si los números de las decenas son distintos?"	Hacer que los estudiantes piensen en cómo se puede extender la regularidad.

4. CLASES QUE CAUTIVAN A LOS NIÑOS

Los grupos de Estudio de Clases en Japón han sido muy productivos en identificar y desarrollar destrezas de enseñanza. De hecho se ha constatado un interés mundial en la última década por aprender de la educación matemática japonesa, y más específicamente de sus grupos de Estudio de Clases. El desarrollo de la educación matemática japonesa sin dudas se fortalece por el hecho de que los profesores en Japón continúan estudiando incluso después de llegar a ser profesores.

En los Estudios de Clases, el profesor practicante abre su aula a un gran número de profesores. Los profesores que participan se dan cuenta de que existen métodos de enseñanza que difieren de los propios y aprenden de que se pueden usar en las clases otros materiales diferentes a los textos. Los profesores participantes encuentran que lo que los alumnos dicen y lo que ellos piensan es de interés, y esta experiencia cambia su propia mirada sobre la enseñanza. Ellos entonces se proponen crear sus próximas propias clases más cautivadoras. Los grupos de Estudio de Clases generan tales actitudes proactivas en los profesores participantes.

El Estudio de Clases está recibiendo atención de profesores de muchas naciones avanzadas, como EE.UU., y en desarrollo, como el caso de Chile. ¿Por qué? Una razón es porque para muchos países éste es un método nuevo para implementar el currículo. El estudio de lecciones es conocido especialmente como método para desarrollar los contenidos de enseñanza. Otra razón para implementarlo es cubrir la necesidad de mejorar la capacidad de los profesores, para así mejorar la aptitud escolar de los estudiantes.

En el marco de la difusión internacional se destacan las clases del profesor Tsubota, vice director de la Escuela Anexa de la Universidad de Tsukuba.

Una clase centrada en el por qué

(Cómo pasar desde el enfoque de transmisión de conocimientos al de la clase centrada en la resolución de problemas).

Para el profesor Tsubota, en la actualidad el tipo de lecciones que evocan mayor interés, tanto a profesores como educadores, no son del tipo para transmitir conocimientos, sino del tipo creativo, donde los estudiantes son desafiados a hacer descubrimientos por ellos mismos. El profesor Tsubota aclara que en los inicios de la era Meiji, unos 130 años atrás, Japón era un país en desarrollo. En ese tiempo, el foco en educación fue impartir el máximo conocimiento posible a los niños y las clases fueron del tipo de transmisión de conocimientos. Los estudiantes de ese período deberían recordar lo que les era enseñado por aprendizaje por repetición. Ellos fueron evaluados en términos de la memoria y su capacidad para absorber información. Sin embargo, el profesor Tsubota advierte que en la sociedad basada en el conocimiento, es deseable diseñar clases en las cuales los niños aprendan por sí mismos cosas, como hacer descubrimientos trabajando en conjunto y consultándose con sus pares. Las clases deben incentivar la capacidad de los niños para adaptar y desarrollar conocimiento, compartir e influir en otros. Tales clases tienen un fuerte impacto en los niños y les da la capacidad de usar el conocimiento ya adquirido.

El profesor Tsubota muestra un ejemplo asociado a este tipo de clases en el contexto de la enseñanza de la tabla de multiplicar. Él comenta que es usual que con la llegada del otoño en Japón, en todos lados se vea a los alumnos de 2º grado prepararse para recitar la tabla de multiplicar en frente de sus profesores pues memorizar la tabla es parte de la tradición en Japón. ¿Qué tipo de ayudas dan los profesores para que los alumnos aprendan las tablas de multiplicar? La siguiente secuencia de pasos se usa a menudo cuando se enseña la tabla de multiplicar:

(1) se construye el significado de la multiplicación a partir de una situación conocida, formas de contar y múltiples sumas,

(2) se extiende la tabla de multiplicar hasta 9 veces 9 por medio de exploraciones,

(3) se le pide a los estudiantes que reciten la tabla y se les pide que la apliquen, y

(4) la tabla de multiplicar, como un todo es usada con el objeto de encontrar patrones o regularidades de la adición, sustracción y multiplicación.

En esas actividades, muchos profesores se concentran en (3). Sin embargo, los estudiantes no deben solamente memorizar las tablas como si fuera un tipo de canción. En (4), a ellos se les debiera dar actividades en las cuales puedan descubrir el alineamiento hermoso de los números en las varias filas de respuestas que aparecen en la tabla de multiplicar. Por ejemplo, la suma de los dígitos de las unidades y el de las decenas de cualquier producto en la tabla de multiplicar por 9 es siempre igual a 9, por ejemplo 9x7 =63, 6+3=9.

Más aún si se toma cualquier producto de la primera mitad de la fila en la tabla del 9, y se suma éste al correspondiente número del producto del extremo opuesto de la segunda mitad, el resultado será 90. Tome por ejemplo 9x1=9 y 9x9=81, y 9 +81=90 y similarmente 9x2=18 y 9x8=72, y 18+72=90.

Mientras los niños descubren tales reglas, no hay que limitarlos solicitándoles simplemente que reciten la tabla de multiplicar sin intentar que adquieran un rico sentido de los números. Pues, los niños aprenden muchas cosas como hacer descubrimientos, encontrar modelos o patrones numéricos o usar los patrones para extender la tabla. Pensando en la actividad, los niños aprenden a mirar los números y a desarrollar su sentido del número. El rol del profesor es encontrar las formas de promover tal aprendizaje, por lo que debe desarrollar las destrezas de enseñanza necesarias para ello.

Ejemplo de una clase de aritmética que cautiva a los niños

(1) El objetivo es que los niños lleguen a la etapa del "por qué".

Cuando los niños descubren aspectos problemáticos en las situaciones o problemas que se les presentan, desarrollan un sentimiento de "asombro". Idealmente las clases debieran diseñarse para que los niños alcancen este sentimiento y tengan interés por indagar el "por qué". Los materiales de enseñanza se desarrollaron para que los alumnos vieran en esta clase dos expresiones multiplicativas y se asombraran por el hecho de dar el mismo resultado. Ellos se preguntan ¿por qué?, y observando con cuidado estas expresiones encuentran relaciones entre los números, transforman la expresión y desarrollan una respuesta. Las expresiones se dan por escrito a los niños, específicamente, una multiplicación con doce veces el factor 4 y otra con ocho veces el factor 8:

(A) 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4

(B) 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8

Se les pregunta a los niños cuál de las expresiones lleva a un resultado mayor. Sin embargo, la respuesta no les es fácil de encontrar, incluso cuando hacen los cálculos en papel. Entonces a los niños se les permite usar calculadora para obtener la respuesta. En este nivel pueden usar la función constante presionando "4xx" y sucesivamente la tecla "=". Cuando lo hacen bien, la calculadora muestra en el visor en ambos casos el mismo resultado, 16 777 216.

En este momento aparece en la mente de los alumnos la pregunta ¿por qué las respuestas son iguales? El resto del tiempo de la clase gira en torno a esa pregunta. Los niños intentan responder a la pregunta, discutiendo el problema entre ellos. La tarea del profesor es dirigir la discusión hacia el pensamiento matemático. Por ejemplo, el profesor debiera tratar que los niños ganen una comprensión de las relaciones entre el número 4 y el 8, como por ejemplo notando que 4 x 4 x 4 = 64 y 8 x 8 = 64 son iguales, o que los números se pueden reducir como 4 = 2 x 2 y 8 = 2 x 2 x 2. La estructura de este problema usa el hecho de que $4^{12} = 8^{8}$, en otras palabras, $4^{12} = (2x2)^{12}$, $8^{8} = (2x3)^{8}$.

(2) Iniciando la clase

"Ahora escribiré dos expresiones matemáticas en la pizarra. Tan pronto termine, les preguntaré cuál de ellas tiene el resultado mayor. Espero que den una predicción intuitiva, entonces levanten la mano para la expresión que piensen que es mayor". El profesor entonces escribe las siguientes dos expresiones en silencio en la pizarra. Los alumnos miran atentamente a la pizarra mientras el profesor escribe las expresiones. Ellos están pensando en los dos problemas de adición.

(A) 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4+ 4 + 4 + 4 + 4

(B) 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8

Después de escribir las expresiones en la pizarra, el profesor dice: "Bien, entonces preguntaré. Primero, ¿quién piensa que el resultado de A es más grande?" Pocos alumnos levantan su mano. El profesor continúa con, ¿quién piensa que B lleva a una respuesta mayor? En este momento muchos alumnos levantan su mano. La mayoría piensa que B es más grande. El profesor, entonces pregunta ¿por qué piensa eso? Es probable que los alumnos den muchas respuestas diferentes. El profesor pregunta a uno de los alumnos que levantó su mano ¿por qué piensa eso?

A.: Calculé la respuesta. Pensé en una adición simplemente.

El profesor pregunta: "Bien, entonces, ¿cómo calculaste la respuesta?" A lo cual el alumno replica que usó la multiplicación. Cuando solicita que escriban la expresión, el alumno escribe:

(A) 4 x 12 = 48

(B) 8 x 8 = 64

La mayoría de los alumnos concuerda en que es correcto. El profesor pregunta entonces: "¿alguna otra razón?" Otro estudiante da otra razón. Va a la pizarra e intenta explicar dibujando líneas entre las expresiones.

(4 + 4) + (4 + 4) + (4 + 4) + (4 + 4) + (4 + 4) + (4 + 4)

| | | | | |

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8

Esto es una manera de verlo. Tras de dibujar las líneas y de agrupar y vincular los números, el profesor planea que otros alumnos lo expliquen. ¿Puede alguien explicar el significado de los agrupamientos?... Preguntando de esta manera, muchos alumnos entenderán y muchos levantarán sus manos.

Un tercer estudiante, N, da la explicación siguiente. "Puesto que 4 + 4 y 8 son iguales, apareando dos 4 con un 8, quedan dos 8 sobrando en la expresión B. Por lo tanto, B tiene la respuesta más grande y sabemos que es mayor en 16." Este enfoque también se basa en partes equivalentes. Y es un método ingenioso. El profesor halaga el enfoque. Todavía otros estudiantes ofrecen diversas razones. El alumno H hace una transformación de la expresión. "En el cálculo de B, 8 = 4 + 4. Así pues, transformando la expresión, conseguimos dieciséis 4. Porque A y B tienen doce y dieciséis 4 respectivamente, la expresión con dieciséis 4 es mayor."

Usando esta idea, M dice, "como 4 + 4 = 8, cambio cada dos 4 en la expresión escribo un 8. Así obtengo seis 8. Por lo tanto, la expresión A, teniendo seis 8 y tiene menos que B, que tiene ocho 8. Así. la expresión A tiene la respuesta más pequeña." Otra explicación. Escribamos las expresiones de una forma que es fácil de entender.

(a) (4+4) + (4+4) + (4+4) + (4+4) + (4+4) + (4+4) = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8

(b) 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = (4 + 4) + (4 + 4) + (4 + 4) + (4 + 4)

Esta forma es muy práctica para enfrentar el problema siguiente.

(3) Cambiando el signo "+" por el signo "x"

Ahora viene el problema central de la clase.

"Bien, ahora cambiaré un poco el cálculo. ¿Qué expresión matemática tiene la respuesta más grande esta vez?" Mientras lo dice, el profesor substituye todos los signos por el signo "x" usando tiza roja.

(a) 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4

(b) 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8

Ante esta pregunta los alumnos quedan paralizados, sin poder hacer cálculos rápidos. "Bien entonces, ¿qué expresión piensan que tiene resultado más grande? Atrévanse a dar conjeturas intuitivas, levanten sus manos, por favor. "Esta vez también, la expresión B consigue a la mayoría de manos levantadas. Sin embargo, la expresión A también es leída por algunos alumnos. ¿El profesor pregunta, "¿por qué piensa que B es más grande? También algunos de ustedes piensan que A es más grande. ¿Por qué?" No se proporciona ninguna respuestas clara. Entre las respuestas dadas se dijo lo siguiente:

"Bien, pensé que B daría un resultado más grande al agregar todos los números, el resultado debiera ser más grande porque ahora se está multiplicando." "Pensé que esta vez sería A porque la anterior fue B." El profesor entonces propone, "continuemos y calculemos realmente las respuestas."

(4) Cálculo de las respuestas

Los niños comienzan a realizar los cálculos en sus cuadernos, pero como son multiplicaciones, rápidamente se dan cuenta que los cálculos son realmente difíciles. "Ese cálculo es realmente difícil." "Se llega a números muy grandes, así que nos enredamos y cometemos equivocaciones." "Si pudiéramos usar calculadora…" Cuando tales comentarios comienzan a aparecer, el profesor entonces dice, "BIEN, pueden usar la calculadora". Si bien es correcto multiplicar simplemente, el profesor decide enseñarles a multiplicar usando una interesante forma de cálculo. Este método se llama cálculo constante. "Presionando la tecla '+' dos veces, como en el '10++', una serie de 10 puede adicionarse infinitamente. Presionando '10++5=' resulta 15", y entonces presionando '2=' se obtiene 12. Si presiona '100=', la pantalla mostrará 110. "Esto puede usarse para nuestro problema, primero presione 4, luego presione "x" dos veces, y luego presione "=" para multiplicar indefinidamente por 4.

¡Inténtenlo, 4xx==! "¡Ah, llegué a 64!" ¡"Bien! Puesto que la primera entrada es 4, presionando "=" dos veces, el 4 pasa a ser multiplicado tres veces. Es decir, 4x4x4=64". "Bien, ahora intenten el cálculo". Los alumnos lo toman en serio. Un poco después,

(a) 4 x x = =… = 16 777 216

(b) 8 x x = =… = 16 777 216

¡"Ah! Las respuestas son iguales!" "¿Por qué?" Murmullos y reacciones similares se escuchan en la sala.

(5) ¿Por qué son iguales las respuestas?

Como las dos expresiones dan la misma respuesta, la cuestión del por qué surge en la mente de cada niño. La clase se desarrolla alrededor de este descubrimiento. "Todos ustedes han descubierto por medio de sus cálculos que son las mismas respuestas". Sería ingenioso si pudiéramos decirlo sin tener que realizar esos cálculos". "Ah, el "64" que obtuvimos antes…" El profesor no pasa por alto tales murmuraciones. "Usted acaba de notar algo interesante!" Sobre la marcha, al escuchar esto, otro niño exclama, "¡lo tengo!". El profesor pide que ese niño exponga. El niño va al frente de la clase y encierra en paréntesis partes de las expresiones. Éstos son "4 x 4 x 4" y "8 x 8." ¿El profesor entonces pregunta a los alumnos, "miren esto, ¿saben lo que él está intentando hacer?" Muchos niños levantan sus manos. "Como 4 x 4 x 4 = 64 y 8 x 8 = 64, la expresión A se puede convertir: 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 = 64 x 64 x 64 x 64. La expresión B también se convierte 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 = 64 x 64 x 64 x 64 y podemos ver que los resultados son idénticos. Ésta es una respuesta muy buena, y todos concuerdan. El profesor entonces se anima a preguntar: "¿hay alguna otra explicación?" En ese momento, algunos niños hacen la conexión con el problema de la adición. "El hecho de que las respuestas para las dos expresiones sean las mismas significa que cambiando las expresiones podemos obtener la misma expresión". "Intentemos y cambiemos las expresiones para hacerlas idénticas". "¡8= 4x2!" "El cálculo para B se convierte en 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 =

= (4x2) x (2x4) x (4x2) x (2x4) x (4x2) x (2x4) x (4x2) x (2x4)

= (4 x 4 x 4) x (4 x 4 x 4) x (4 x 4 x 4) x (4 x 4 x 4) que coincide con A".

Un niño susurra, "qué pasa si se convierte todo en 2s?" después de ver la explicación antedicha. El profesor atiende este pensamiento, diciendo, "alguien recién ha propuesto cambiar todo en 2. ¿Qué piensan ustedes?" "Veamos, 4 = 2 x 2." "Se puede cambiar los 8 en 2s?" "8 es 2 x 2 x 2.""Bien, entonces, utilicemos esto para cambiar las expresiones". El profesor pide al niño que dio esta explicación que explique en la pizarra.

(A) 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4

= 2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2

(B) 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8

= 2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2

Consecuentemente, ambas expresiones tienen veinticuatro 2 y las respuestas son iguales. Otra alternativa sugerida por algunos niños es un apareamiento simple de números de una expresión a la otra. "Los números en ambas expresiones pueden agruparse hasta llegar a los ocho 4, en este punto el producto de la expresión B es 256 veces mayor que el producto de la expresión A. Cuatro 4s quedan sobrando en la expresión A, lo que es igual a 256. Por lo tanto, ambas expresiones son iguales si usted no multiplica por los 256 sobrantes." Esta es una explicación algo difícil, pero puede ser ilustrada por la expresión siguiente. La idea es crear un equilibrio:(8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8) ÷ (4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4) = 256… factor por el cual B es mayor que A. (4 x 4 x 4 x 4) = 256… sobran de A. 256 ÷ 256 = 1. Los niños pueden ver así que la respuesta se puede obtener por distintos caminos que implican muchas ideas diversas.

(6) Extensión

La extensión adicional de este problema permite que los niños incluso investiguen en profundidad en el tema y se debe intentar si hay tiempo. Esta puede hacerse presentando problemas adicionales, por ejemplo "¿si se continúa multiplicando, en qué punto las respuestas serán iguales?" o "¿podemos llegar a lo mismo con otros números?". Por ejemplo, en este problema, teníamos $4^{12} = 8^{8}$. Así pues, si cada número de cada figura es un múltiplo de 3 y 2, podemos saber que las respuestas son iguales para el caso de 415 = 810. Explorando profundamente en tales problemas, los niños se fascinarán de verdad.

Referencias

Isoda, Arcavi y Mena (2007). El Estudio de Clases en Matemáticas. Ediciones Universitarias de Valparaíso. Valparaíso.

Tsubota, K. (2008). The Future of Mathematics Teaching in Japan. Developing Lesson to Captivate Children. APEC Lecture Paper. Extraido de www.criced.tsukuba.ac.jp/.../apec/apec2008/.../2.Keynote(Dec.9)_KozoTsubota_E_Japan.pdf

Yoshida, M., & Fernández, C. (2005). Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.