## Estructura del sistema numérico

### Reflexiones adicionales

Desde el primer grado se han resuelto problemas de conteo como la estrategia para avanzar en la construcción de los números. Dicha estrategia también se relaciona con la representación de los números y la manera en que se les llama.

Todo esto forma parte de la construcción del **Sistema Numérico Decimal de Valor Posicional**, pieza fundamental en la formación matemática de los niños y vital para la vida en sociedad.

Debe notarse que en los problemas que hasta ahora se han abordado se cuentan cosas concretas: semillas y palomas. En una de las soluciones al problema de las palomas se usan agrupamientos y se ancla en lo específico del caso. Lo más relevante de la otra solución es que cada paloma se sustituye por un bloque y diez bloques por una tira verde y diez de estas tiras, es decir cien bloques, por un cuadro verde. Lo esencial del modelo es que un bloque puede representar cualquier objeto. Se trata de un modelo de aplicación general.

Se debe notar que en la página 12 no se habla de palomas, el número a que da lugar el último renglón de la tabla, 235, existe por sí mismo.

Volviendo al problema, la solución se expresa adjetivando el número:
**235 palomas.**


*Fig.1*

En las páginas 9 a 13 del Tomo II, Vol. 1, se analiza la estructura del sistema numérico. El problema que se presenta en la página 9 consiste en contar un grupo numeroso de semillas de girasol. Se contrastan varias formas de hacerlo: (i) formando grupos que ya han contado antes, es decir, dividir el todo en partes de tamaños ya conocidos; (ii) la que desarrolla el niño haciendo grupos de diferente tamaño; y (iii) la que muestra la

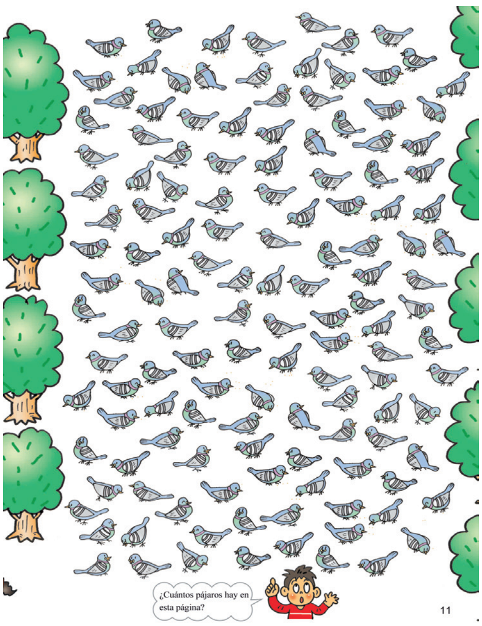



*Fig. 2*

niña haciendo grupos del mismo tamaño y colocándolos de manera ordenada. El pollito pregunta por la mejor forma de contar. Por la experiencia acumulada es evidente que la de la niña facilita más la operación de contar.

Hasta ahora la experiencia que se tiene es la de formar agrupamientos de diez unidades, esa es la estrategia que se usa para contar a las palomas. En la página 12 (*Fig. 3*) se muestran dos maneras para hacerlo; las estrategias son equivalentes pero con diferente nivel de abstracción.

El modelo que utiliza bloques es más general y abstracto: la barra está formada por diez bloques y se hace corresponder a diez palomas, la barra puede representar cualesquiera diez cosas. Ambos modelos permiten llenar los cuadros vacíos al final de la página.

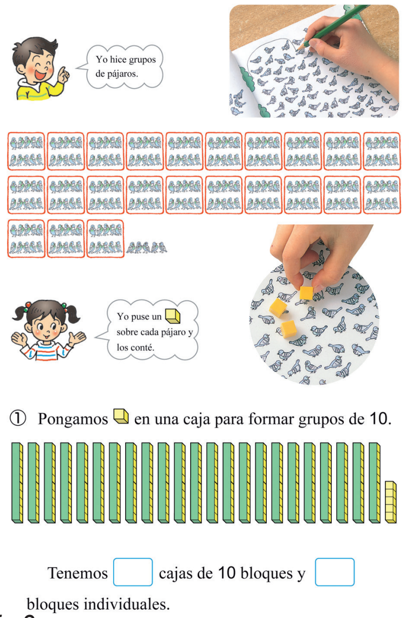



*Fig.3*

En la página 13 (*Fig.4*) se concluye el conteo y se avanza en el conocimiento y la expresión de nuevos números. Con el modelo de bloques y la tabla organizada en columnas, se introduce la noción de valor posicional y se destaca su potencial para apoyar la conceptualización del sistema numérico decimal. Ahora los alumnos están en condiciones de comprender la estructura de los números hasta el 999.

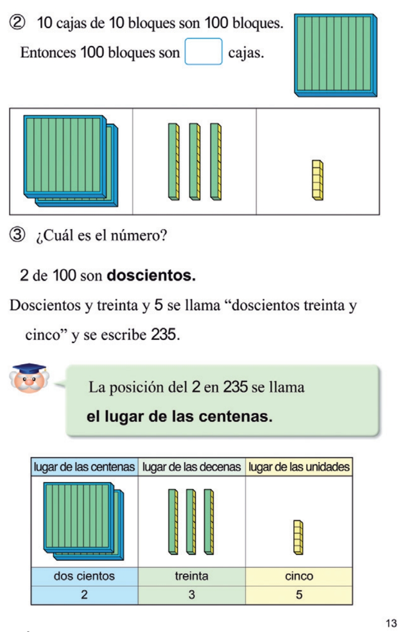



*Fig.4*

**Actividades que se sugieren para los futuros docentes**

**1.** Revisa el Tomo I y enlista los antecedentes que poseen los alumnos para iniciar el estudio de la construcción de los números en el marco del sistema de numeración decimal. ¿Qué relevancia tienen esos antecedentes para que los niños comprendan el nuevo tema? ¿Qué limitaciones podrían tener los alumnos al abordar el nuevo tema si no contaran con algunos de esos antecedentes?
**2.** Cuenta las palomas.
**3.** En la página 13 se indica que el número de palomas es 235. Suponiendo que la base del sistema es 5 y no 10, calcula la cantidad de palomas en base 5.
**4.** Suponiendo que la base es 8 y no 10, como en el libro, escribe las siguientes cantidades usando números arábigos.
**a)** La suma de cuatro grupos de 8 por 8 unidades, siete grupos de 8 unidades y dos grupos de 1 unidad.
**b)** La suma de seis grupos de 8 por 8 unidades, cero grupos de 8 unidades y cinco grupos de 1 unidad.
**c)** Expresa en el sistema posicional de base 10 las cantidades que corresponden a los números de los dos incisos anteriores.

## Enriqueciendo el concepto de número

### Reflexiones adicionales

Desde el primer grado se inicia la construcción del modelo de la recta numérica. Este es un recurso para la representación gráfica de los números.

Se debe tener claro que en esta etapa se están construyendo los números naturales, los cuales son una parte de los números reales.

Con respecto a los números reales:

**1.** A todo número real le corresponde un punto en la recta.

**2.** A cada punto en la recta le corresponde un número real.

El punto 2 no es cierto si sólo se consideran los números naturales.

Sabemos que si M y N son números reales, M>N si existe un número real a>0 tal que: M=N+a

**1.** El criterio aplicado por los alumnos de comparar colecciones es consistente con esta definición.

**2.** También el criterio del sucesor o antecesor es consistente con la definición, aun en el caso de que a>1.

**3.** El procedimiento de comparar números comparando los dígitos de las centenas, decenas y unidades, es también consistente con la definición formal de orden.

En las páginas 16 a 19 del Tomo II, Vol. 1, se propone realizar ejercicios para fortalecer el conocimiento de las cualidades de los números y su representación. En esta primera serie de ejercicios se avanza en la comprensión del sistema numérico decimal.

Para su solución se requiere evocar el modelo de bloques y la tabla que lo complementa, como lo muestra la figura 1.

Los primeros cuatro ejercicios se orientan en un sentido y los siguientes cuatro (*Fig. 2*) en sentido inverso (es didácticamente recomendable).

Los ejercicios 5 y 6 de la página 16 (*Fig. 3*) continúan con la representación de los números acudiendo al modelo de la recta numérica iniciado en el grado anterior. La actividad se plantea tanto en el sentido de leer los números que corresponden a los puntos señalados por las flechas, como en sentido inverso: dados los números, localizar el punto que les corresponde dentro de la recta. Lo anterior muestra una cualidad esencial del modelo de la recta numérica: *a todo número natural se le puede hacer corresponder un punto en la recta.*

Estos últimos ejercicios retoman la relación de orden con los nuevos números. El principio que se aplica es el siguiente: dado un número natural **N**, **N+a > N** y **N-a < N** para cualquier número natural a menor que **N**.

En el primer grado se comparaban las colecciones asociadas a los números; el criterio que se empleó fue que el número que *correspondía al grupo más numeroso* era el mayor. Después, las comparaciones se explican al aplicar el principio anterior, a=1 o 10 o 100, para ir más allá de la etapa sensorial de comparación de conjuntos (*Fig. 4*). En esta lección, con el propósito de superar operativamente la etapa anterior, se hace lo sugerido por el pollito en la página 17 (*Fig. 5*): comparar los dígitos que ocupan las mismas posiciones de izquierda a derecha (centenas, decenas, unidades), el número mayor es el que tiene el mayor dígito en la primera posición en que no ocurra la igualdad.

**3** Escribe las siguientes cantidades usando números arábigos.

① El número que tiene 7 en el lugar de las centenas, 0 en el lugar de las decenas y 2 en el lugar de las unidades.

② El número que es la suma de 3 grupos de 100 y 4 grupos de 10 y 5 grupos de 1.

③ El número que es la suma de 1 grupo de 100 y 7 grupos de 10.

④ El número que es la suma de 8 grupos de 100.

*Fig. 1*

Escribe los números correctos en el ☐.

① 560 es la suma de ☐ grupos de 100 y 6 grupos de 10.

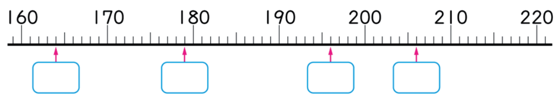
② 560 es la suma de ☐ grupos de 10.

③ 700 es la suma de ☐ grupos de 10 o ☐ grupos de 100.

④ El número que es la suma de 98 grupos de 10 es ☐.

*Fig. 2*

**5** Escribe en el ☐ el número que indica cada ↑.




**6** Dibuja una flecha bajo la línea para cada uno de los siguientes números.

① 576 ② 599 ③ 604 ④ 625

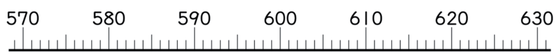



*Fig. 3*

**4** Escribe los números que faltan en el ☐.

① 117 – 118 – 119 – ☐ – 121 – ☐ – ☐

② 870 – 880 – ☐ – ☐ – 910 – ☐ – 930

③ 300 – ☐ – 500 – ☐ – 700 – 800 – ☐

④ 600 – ☐ – 598 – 597 – ☐ – ☐ – ☐

*Fig. 4*

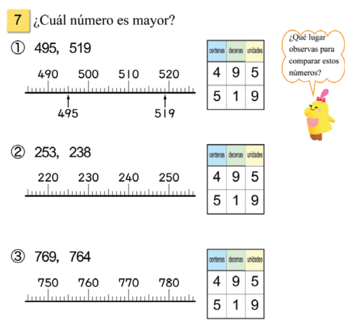



*Fig. 5*

**Actividades que se sugieren para los futuros docentes**

**1.** Haz y discute todos los ejercicios hasta la página 19.
**2.** En la sección “Reflexiones adicionales”, cuando se caracteriza el modelo de la recta numérica se afirma que: “El punto 2 no es cierto si sólo se considera a los números naturales”. Explica por qué, para los números naturales, el punto 1 es válido y el punto 2 no lo es.
**3.** Dibuja una recta numérica en la que se muestre un punto correspondiente al número 2658724. Comenta las características de su gráfica y las convenciones utilizadas.
**4.** En la página 17 se pide comparar las parejas de números 495, 519; 253, 238 y 769, 764 mediante el procedimiento de comparar los dígitos correspondientes al mismo valor posicional. En la sección “Reflexiones adicionales” se afirma que este procedimiento es consistente con la definición ahí dada. Calcula para cada caso el valor exacto de **a** requerido por la definición y comentar por qué en la práctica el referido procedimiento no requiere necesariamente el cálculo exacto de **a**.

## Hacia el algoritmo de la suma

En las páginas 24 a 26 del Tomo II, Vol. 1, se abordan los conceptos más relevantes para la construcción de la forma usual de cálculo vertical de la suma de dos números. Los problemas planteados en la página 24 (*Fig.1*) no son nuevos para los alumnos, se asume que ellos poseen los conocimientos necesarios para formular la expresión matemática que se pide y resolverla.

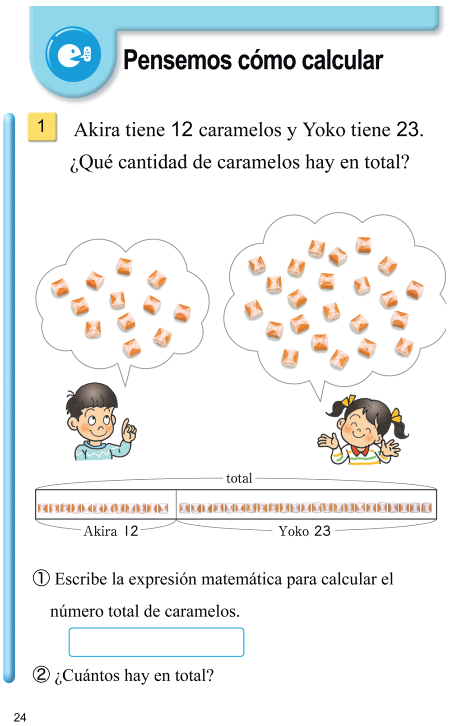



*Fig.1*

¿Cuál es la relevancia de estas actividades? Los alumnos saben contar grupos de objetos con menos de 10 centenas. Sin embargo, contar grupos numerosos puede no ser rápido ni fácil. En el caso que nos ocupa hay dos cantidades involucradas. La idea es cómo contar el total utilizando los dos números que lo forman y el conocimiento de su estructura.

En la línea de desarrollo de esta idea se encuentran las actividades de las siguientes dos páginas.

En la página 25 (*Fig. 2*), los tres casos muestran arreglos gráficos similares a los utilizados para contar, pero mantienen separadas las dos cantidades involucradas. Las representaciones difieren por su nivel de generalidad, al pasar de la ilustración de los caramelos a su representación por bloques. De hecho son distintas representaciones de la expresión matemática que permite resolver el problema. El planteamiento se orienta a enfatizar el potencial de la manipulación de la representación por bloques para calcular el total a partir de los números a sumar, esa es la tarea y se expresa en la última frase de esa página.

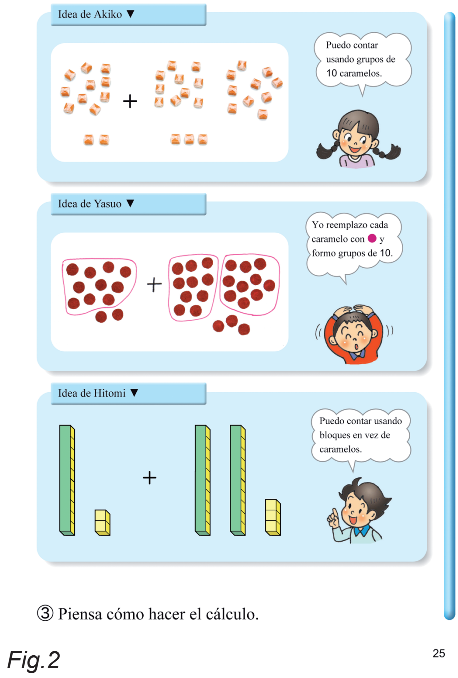



*Fig.2*

En la página 26 (*Fig. 3*) se muestran dos formas para realizar el conteo a partir de la manipulación de las representaciones –gráfica y simbólica– de los dos números. Ambas darán lugar a formas de realizar el cálculo para sumar dos números. Se dice cálculo y no conteo (aunque finalmente de esto último se trata) porque se aplican procedimientos que se sustentan en la estructura de los dos números (sistema numérico decimal). Su representación por bloques, y una forma particular de arreglarlos espacialmente, facilita la obtención de la suma de los dos números.

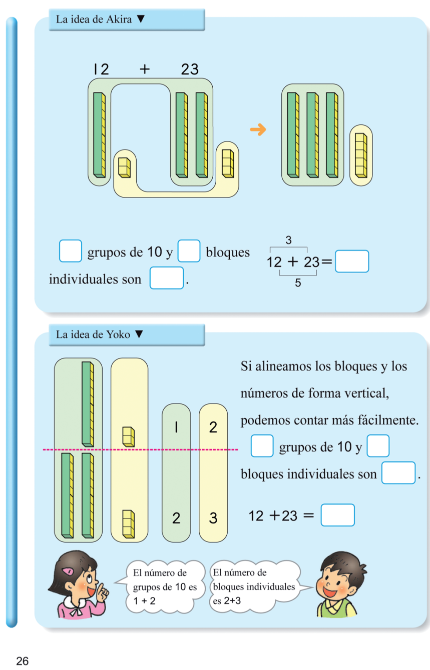



*Fig.3*

### Reflexiones adicionales

La teoría que se refiere al aprendizaje significativo postula que la experiencia y el conocimiento previo de los alumnos son elementos principales de la práctica educativa.

El planteamiento inicia con un problema muy sencillo. Contestar la pregunta: ¿cuántos hay en total? no representa para los alumnos dificultad alguna ya que saben contar grupos mucho más numerosos.

Los tres gráficos de la página 25 muestran representaciones de los sumandos que son similares a las utilizadas para contar, lo novedoso es que forman parte de una cadena unida por el signo +, signo que se introduce hasta esta lección para relacionar números. Es decir, se utilizan conceptos y representaciones conocidas en situaciones diferentes para expresar una idea que no es nueva: la construcción de una expresión matemática que permite plantear y resolver el problema. Eso se hace en la búsqueda de procedimientos más poderosos para sumar, que permitan superar las dificultades y limitaciones de solamente contar.

Las imágenes de la página 26 muestran la forma en que una de las representaciones anteriores se reestructura espacialmente de dos maneras, lo que genera reinterpretaciones de las situaciones que prácticamente dan solución a la búsqueda de procedimientos más inteligentes para sumar.

Estas páginas ilustran la forma en que se accede a un nivel de conocimiento superior a partir de un conocimiento previamente desarrollado.

**Actividades que se sugieren para los futuros docentes**

**1.** Enlista y discute los antecedentes derivados del Tomo I que poseen los alumnos al momento de iniciar el estudio del contenido de estas páginas respecto a la construcción de la suma.

**2.** En la página anterior se lee: "la idea es cómo contar el total utilizando los dos números que lo forman y nuestro conocimiento sobre su estructura" ¿A qué se refiere el concepto "estructura" en el caso de los números naturales? En particular, ¿cuál es la estructura de 738? ¿Cuál la de 207? ¿Y la de 25.07 (que no es un número natural sino un número decimal)?

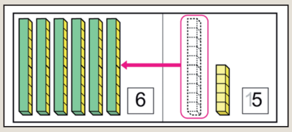
**3.** En la página 26 se muestran dos formas de realizar el conteo utilizando el modelo de bloques de Hitomi, pero igual hubieran servido cualquiera de los otros dos, el de Akiko o el de Yasuo. ¿Por qué se prefiere utilizar los bloques? En el texto se hace referencia al "mayor potencial de manipulación de la representación por bloques", ¿qué quiere decir esto?

**4.** Al final de la sección "Reflexiones adicionales" se enuncia: "Estas páginas ilustran cómo se accede a un nivel de conocimiento superior a partir de un conocimiento previamente desarrollado". ¿Qué piensas de esto? Intenta expresar el cambio al concluir estas lecciones con respecto a lo que enlistaste en el punto número 1 de estas actividades.

## El algoritmo de la suma

### Reflexiones adicionales

Un aspecto importante de estas lecciones es el relativo al tercer renglón de la tabla de bloques.




Es el punto en el que al sumar las unidades se obtienen 15, dando lugar a la formación de una decena, que se incorpora a la columna de las decenas; con esta acción se mantiene la consistencia de tener sólo un dígito en cada columna. Tal reagrupación es un paso esencial que los alumnos deben conocer y tener plena conciencia de él. Sobre este tipo de transformaciones se sustenta la generalización de la manera de realizar el cálculo aquí mostrado, el cual se denomina *algoritmo de la suma*.

**Noción de algoritmo**.
Se entiende por algoritmo a *la prescripción exacta sobre el cumplimiento de cierto sistema de operaciones, en un orden determinado, para la resolución de problemas de algún tipo dado*.
Justamente el tema que nos ocupa es la construcción de los algoritmos más sencillos: aquellos que corresponden a las operaciones aritméticas básicas en el sistema de numeración decimal. En estas páginas prácticamente se establecen los aspectos esenciales del algoritmo para la suma de números naturales, aunque limitado a la suma de dos números de dos dígitos y con resultado también de dos dígitos. En lecciones posteriores se generalizará la aplicación del algoritmo a números con más de dos dígitos.

En las páginas 29 a 32 del Tomo II, Vol. 1, se introduce el tema del algoritmo de la suma.

Puede observarse que en la página 29 (*Fig. 1*), se formaliza el conocimiento que se abordó en la página 26. Se parte del problema de cómo calcular la suma de dos números sin que ésta se resuelva al contar explícitamente.

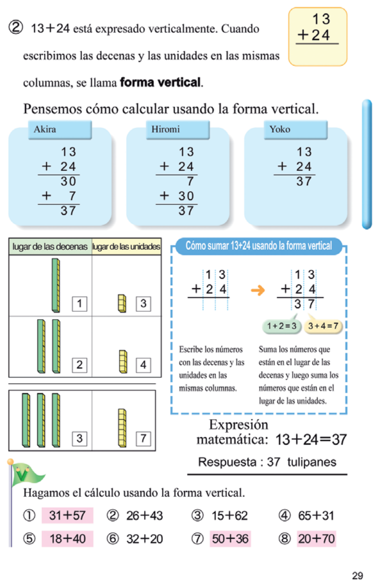



*Fig. 1*

Con base en la estructura decimal de valor posicional de los números, el procedimiento se ilustra para el caso particular de la suma 13+24. Éste requiere:

**1.** La colocación vertical en columna según el valor posicional de los dígitos que forman los números.
**2.** En la base de la ubicación de los sumandos trazar una línea horizontal.
**3.** Sumar los dígitos de las columnas y colocar los resultados en la columna correspondiente por debajo de la línea horizontal.
**4.** El número que resulta del punto anterior es la suma.

Este procedimiento funciona si las sumas de la sección 3 dan un resultado menor que 10.

En la página 31 (*Fig. 2*) se plantea un nuevo problema en el cual se debe sumar 38+27. En este caso, la suma de las unidades es mayor que 10, por lo que el procedimiento anterior de cuatro pasos no va a funcionar y tiene que cambiarse; aspecto que responde al sentido que se indica en el tercer renglón de la tabla de bloques de esta página.

La última imagen muestra inicialmente tres maneras de pensar el cálculo: se suman las unidades, se suman las decenas y estos resultados se colocan manteniendo el valor posicional de las columnas y se suman mediante el

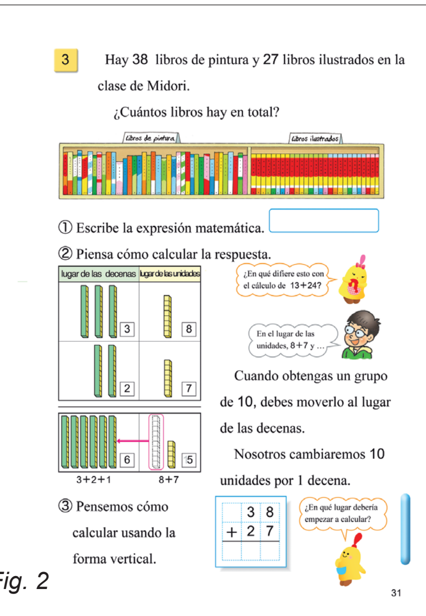



*Fig. 2*

procedimiento anterior que ahora funciona perfectamente. Hay entonces un paso más. Éste ocurre porque al sumar por primera vez las unidades se genera una decena y cinco unidades.

El cuadro “Cómo calcular 38+27” indica la manera que debe manejarse la decena que aparece y concluir el cálculo. Las formas de calcular de Akira y Hiromi muestran que se puede empezar indistintamente, sumando primero las unidades o las decenas. Sin embargo, el procedimiento definido en el cuadro indica claramente que hay que empezar sumando las unidades.

Debemos notar que para abordar el algoritmo de la suma se usan todos los conocimientos y habilidades que antes se promovieron, esto permite que, al llegar a este punto, los alumnos no asuman el algoritmo como “una receta a seguir”, sino como un procedimiento a partir del cual pueden entender todos los pasos y de qué manera este conocimiento les facilita el cálculo.

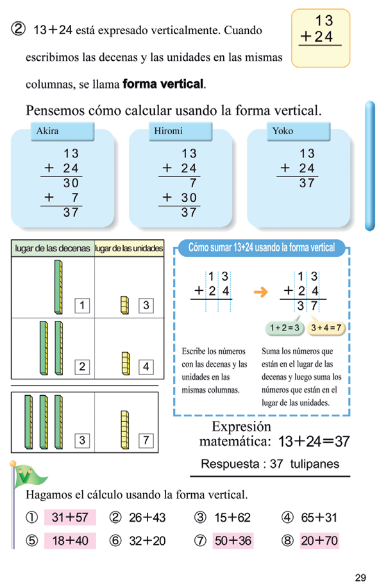



*Fig. 3*

**Actividades que se sugieren para los futuros docentes**

**1.** Investiga cuál es la definición de algoritmo y discútela con tus compañeros y tu profesor.

**2.** Indaga cuáles son los “números naturales”. Discute tu respuesta con tus compañeros y tu profesor.

**3.** Identifica en las páginas 1 a 28 los conocimientos y habilidades que son un antecedente relevante para abordar el algoritmo de la suma con números naturales. Argumenta por qué identificas esos conocimientos y habilidades como antecedentes del algoritmo de la suma y discute tu respuesta con tus compañeros.

**4.** Reemplaza cada una de las letras A y B por un mismo dígito respectivamente, de manera que la siguiente suma sea correcta. El símbolo 0 es cero.

$$\begin{array}{ccc} & A & A \\ + & A & B \\ \hline B & A & 0 \end{array}$$

**5.** Reemplaza las letras por los dígitos: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8 o 9; usa cada dígito una sola vez, de tal forma que el cálculo de la suma sea correcto.

$$\begin{array}{cccc} & & & A \\ + & & 3 & B \\ & C & D & 7 \\ \hline E & F & G & H \end{array}$$

**6.** Como se vio al efectuar la suma de dos números, mientras la suma de los dígitos correspondientes sea menor que diez no hay obstáculo para completar el cálculo. Los problemas aparecen cuando no ocurre así, cuando la suma de las unidades o de las decenas –o ambas– suman más de diez y entonces se debe hacer la conversión de unidades de un nivel posicional inmediato superior (como fue el caso para el problema de los libros). Este hecho muestra la potencia del sistema de numeración decimal de valor posicional.

Para el siguiente ejercicio, el sistema numérico será el de base 6 de valor posicional. Los únicos dígitos que puedes usar son: 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Calcula las siguientes sumas aplicando el algoritmo encontrado, con la consideración de que ahora no se trata de decenas (grupos de 10 elementos), sino de agrupaciones de 6.

$$\begin{array}{r} 22 \\ +\ 13 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ +\ 13 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ +\ 44 \\ \hline \end{array}$$

**7.** ¿Por qué en el sistema numérico de base 6 sólo puedes usar los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5?

# Propiedades de la suma

## Reflexiones adicionales

El conjunto de los números reales, de los cuales forman parte los números naturales, junto con las operaciones de suma y multiplicación constituyen un sistema numérico de fundamental importancia. Con las dos propiedades aquí conocidas se inicia a los alumnos para la construcción de tal sistema.

Si **a**, **b**, y **c** son números naturales, estas propiedades se enuncian como sigue:

- Conmutatividad de la suma: **a+b=b+a**
- Asociatividad de la suma: **(a+b)+c=a+(b+c)**

Si se suman dos números naturales el resultado será siempre otro número natural. Esto es verdadero y se enuncia como la **Propiedad de Cerradura de la Suma**:

- Para cualesquiera de los números naturales **a** y **b**, la suma: **a+b** es un número natural.

Estas propiedades son válidas para la operación de la suma, pero no para la resta: 12-36 no resulta un número natural, entonces los naturales no son cerrados bajo la resta; tampoco se cumple la conmutatividad: 5-2 no arroja el mismo resultado que 2-5.

Hemos recordado que la suma con números naturales tiene, entre otras, tres propiedades: cerradura, conmutatividad y asociatividad. Además, hemos visto que los números se pueden descomponer, ordenar y representar gráficamente.

Esto muestra la forma en que avanza la construcción del sistema numérico.

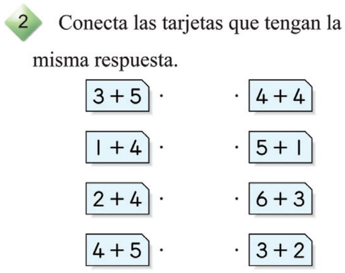



*Fig. 1*

La actividad con tarjetas que se muestra en la página 45 del Tomo I, y las actividades de las páginas 37, 38 y 40, del Tomo II, Vol. 1 refuerzan el hecho de que los números se pueden descomponer en términos de otros mediante la operación de la suma, tal es el caso del número 8, que resulta de sumar 3+5 o 4+4, pero también es la suma de 1+7 y 2+6. Esta cualidad de los números respecto a la suma es importante, pero no es la única. Los números y sus operaciones poseen propiedades que son el fundamento de la aritmética. Se trata ahora de introducir y construir estas propiedades.

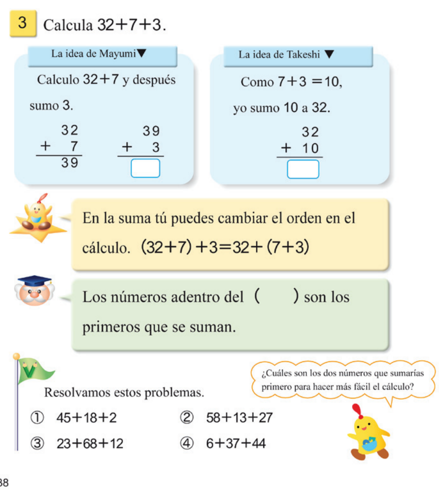



*Fig. 2*

Con la actividad de las fresas en la página 37 (*Fig. 3*) se introduce la *propiedad conmutativa de la suma*. La suma es una operación binaria, se realiza entre dos números. La propiedad dice que no importa el orden en que se sumen los números, el resultado será el mismo.

En la imagen de la página 38 (*Fig. 2*) se introduce la *propiedad asociativa de la suma*. Ésta se referiere a que para sumar tres números, no importa cuáles dos se sumen primero, el resultado final será el mismo (recuerda que la suma es una operación binaria). Hay más casos si se usa la propiedad conmutativa, por ejemplo: (7+32)+3, 7+(32+3), 32+(3+7), etc.

En cualquiera de estos la secuencia de realización de las sumas será diferente, sin embargo, el resultado final será el mismo. De esta manera se tiene que los números se descomponen mediante la suma y respecto a esta operación hay dos propiedades. Un aspecto muy relevante de la propiedad asociativa es que sienta las bases para que los alumnos trabajen con sumas que contienen más de dos sumandos y las expresen sin dificultad en forma horizontal, por ejemplo 27+29+23; en este caso pueden reescribirla como (27+29)+23=(27+23)+29=50+29=79.


*Fig. 3*

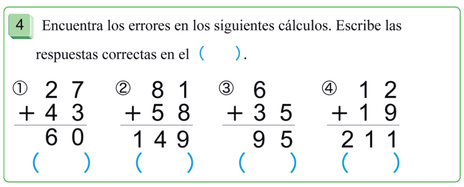



*Fig. 4*

Expresar operaciones de más de un paso es una habilidad trascendental para plantear y resolver problemas. Esto se aborda más adelante en este grado escolar y los siguientes.

El último ejercicio de la página 40 (*Fig. 4*) es relevante en tanto que pide a los alumnos reflexionar sobre los errores en la realización del algoritmo. Esta tarea es de primordial importancia porque enseña a los alumnos a aprender de los errores. Esta revisión se enfoca en el mejoramiento de la calidad del conocimiento aprendido.

**Actividades que se sugieren para los futuros docentes**

**1.** Indaga cuáles son los números reales y qué relación hay entre ellos y los números naturales. Presenta tu trabajo ante el resto de tu grupo.

**2.** Construye cinco ejemplos en los que se ilustre que la propiedades conmutativa y asociativa de la suma con números naturales puede ser útil para agilizar el cálculo. Compara tus ejemplos con los de tus compañeros y discute cuáles casos presentan mayor utilidad en términos didácticos.

**3.** Completa las siguientes oraciones:

- Los números dentro de los (        ) son los que __________________________
- (32+7)+3, es igual a: ____+3, que  es igual a: ____
- 32+(7+3), es igual a: 32+ ____, que  es igual a: ____

**4.** Tacha el  término que hace verdadera la oración. Puede ser necesario tachar los dos términos.

- 58+13+27, es igual a 58+27+13 por la(s) propiedad (es) conmutativa/asociativa.
- 58+13+27, es igual a (27+58)+13 por la(s) propiedad (es) conmutativa/asociativa.
- 58+13+27, es igual a 27+13+58 por la(s) propiedad (es) conmutativa/asociativa.

**5.** En el siguiente ejercicio el sistema numérico de valor posicional es el de base 7. Los únicos dígitos que puedes usar son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Encuentra los errores en las siguientes sumas y calcula las respuestas correctas. Recuerda que ahora no se trata de decenas (grupos de 10 unidades), sino de agrupaciones de 7 unidades.

$$\begin{array}{r} 24 \\ +\ 33 \\ \hline 55 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 51 \\ +\ 55 \\ \hline 146 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ +\ 23 \\ \hline 63 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ +\ 16 \\ \hline 211 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ +\ 35 \\ \hline 125 \end{array}$$

## Hacia el algoritmo de la resta

### Reflexiones adicionales

Estas páginas tienen una función similar a la de las páginas 24, 25, y 26 del mismo libro y las observaciones que se hacen son pertinentes respecto de las modificaciones a que debe dar lugar el hecho de que ahora se trata de la resta y no de la suma.

Los tres gráficos de la página 42 muestran representaciones del *minuendo*, similares a las que se utilizaron para contar (en las cuales se "separa" el sustraendo configurando la acción de quitar). Es interesante notar que en los dos casos, el sustraendo queda claramente representado (solamente falta incluir el signo de resta entre ellos para formular la expresión matemática correspondiente: 25-13).

De nuevo se acude a conceptos y representaciones conocidas en la búsqueda de nuevos procedimientos para calcular la sustracción de manera que se resuelvan las dificultades y limitaciones de *solamente contar*.

Las imágenes de la página 44 muestran cómo se reestructura espacialmente en dos formas distintas, una de las representaciones anteriores; esto da lugar a reinterpretaciones de las situaciones que prácticamente dan solución a la búsqueda de procedimientos más eficientes para calcular la resta.

Estas páginas ilustran el proceso de cómo acceder a un nivel superior de conocimiento, a partir de un conocimiento previamente desarrollado. Ese nuevo conocimiento se formaliza posteriormente en otras lecciones.

En las páginas 42 a 44 del Tomo II, Vol. 1, se introduce el algoritmo de la resta.

En esta ocasión también se aborda la resta a continuación de la suma; se incluye el carácter inverso de la resta respecto a la suma a partir de responder preguntas como: "¿cuántos quedan?", en lugar de "¿cuántos son?", que está asociada a la suma. Estas páginas son relevantes para la construcción de la forma vertical para calcular la resta de dos números. Como en el caso de la suma, se inicia la lección con un problema que no es nuevo para los alumnos, porque éstos poseen los conocimientos necesarios y la experiencia para plantear la operación y resolver el problema mediante el conteo; el cual se usa como elemento de verificación para el nuevo procedimiento.

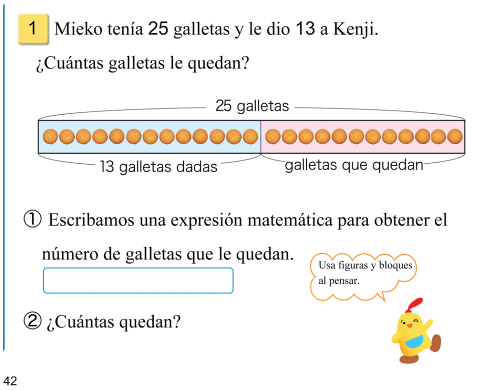



*Fig. 1*

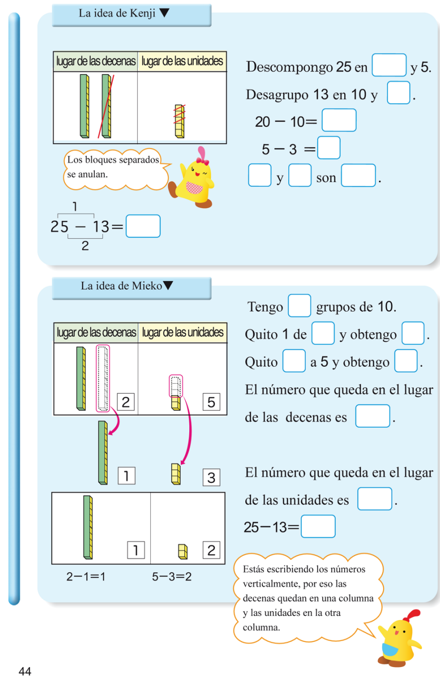



*Fig. 2*

La idea que orienta el avance en el conocimiento es cómo calcular la resta al entender la estructura de los números que la forman. En el desarrollo de esta idea, en la página 42 (*Fig. 1*) se muestra una evolución de la representación "real" de las galletas hacia aquella que usa bloques, los cuales aluden solamente a la cualidad numérica. Esta última es la modelación más eficaz para visualizar el algoritmo que se quiere abordar. Las formas de razonamiento de los alumnos sugieren esta evolución figurativa.

En la página 44 (*Fig. 2*) se muestran dos maneras para realizar el conteo a partir de la manipulación de las representaciones simbólica y gráfica de los números. Ambas dan lugar a formas de realizar el cálculo de la resta. En la primera, la operación se hace en forma horizontal y en la segunda vertical; esta última es la manera usual de hacer el cálculo sin acudir al conteo, el procedimiento se sustenta en la estructura decimal de los números, la representación por bloques y una forma particular de arreglarlos espacialmente.

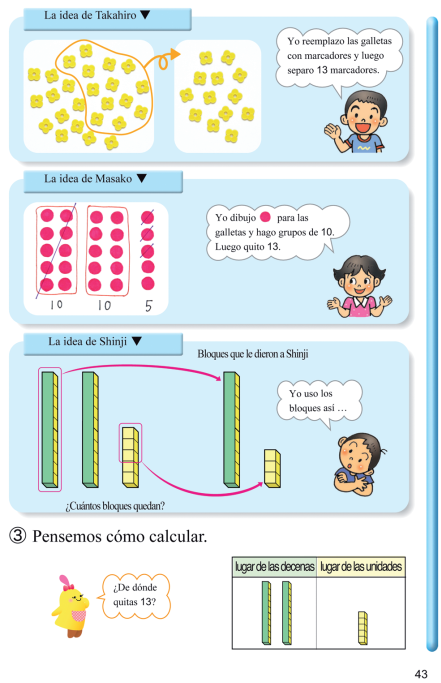



*Fig. 3*

**Actividades que se sugieren para los futuros docentes**

**1.** Enlista y discute los antecedentes que se desprenden de la construcción de la resta que poseen los alumnos antes de iniciar el estudio de estas páginas.

**2.** Analiza cómo los antecedentes que encontraste contribuyen a que los alumnos entiendan el algoritmo de la resta comprendiendo todos sus pasos.

**3.** Elabora un ensayo breve en el que discutas lo que ocurriría con el aprendizaje del algoritmo de la resta si los alumnos no contaran con los antecedentes que enlistaste en la pregunta 1.

**4.** Respecto de las representaciones de la página 43 se dice: "esta evolución figurativa se sugiere por las formas de razonamiento de los alumnos." Son imágenes que modelan niveles progresivos para estructurar una respuesta a la tarea dada.

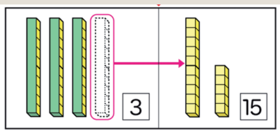
• Reflexiona y discute con tus compañeros y tu profesor sobre lo adecuado de esa interpretación.

• Discute cómo se articulan estas representaciones con el listado de antecedentes del punto anterior.

# El algoritmo de la resta

## Reflexiones adicionales

Un aspecto importante de estas lecciones es el relativo al segundo renglón de la tabla de bloques de la página 48.




Es el punto en el que, no siendo posible la resta 5-7, se hace necesario convertir una decena en diez unidades para tener 15-7. **Tal transformación es un paso esencial que los alumnos deben conocer y tener plena conciencia de él (aspecto que el maestro no debe subestimar).** Sobre esta clase de transformaciones se sustenta la generalización de la manera de realizar el cálculo de la resta así como su algoritmo.

Recordemos que se entiende por algoritmo: *a la correcta ejecución de un sistema de operaciones en un orden preciso para la realización de una tarea de cierto tipo o a la resolución de problemas también de cierto tipo*. Por ejemplo: para la realización de sumas o restas se utilizan los algoritmos correspondientes a cada una.

En estas páginas se avanza en la construcción de los algoritmos para las operaciones aritméticas básicas en el sistema de numeración decimal. También, se establecen, prácticamente, los aspectos esenciales del algoritmo para la resta de números naturales, aunque limitado a la resta con números de dos dígitos. En lecciones posteriores, se profundiza en la aplicación del algoritmo a números con más de dos dígitos.

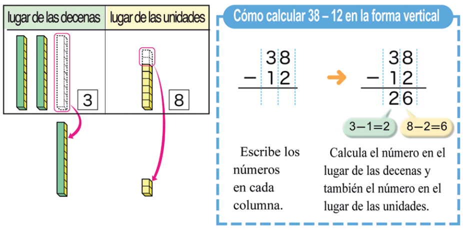



*Fig. 1*

En las páginas 47 a 49 del Tomo II, Vol. 1, se aborda el tratamiento del algoritmo de la resta.

La imagen de la página 47, (*Fig. 1*) muestra la solución al problema: “Satoshi y sus amigos recogieron 38 fresas. Se comieron 12. ¿Cuántas fresas quedan?”

En la imagen de los bloques, se ilustra la resta de doce de ellas y a la derecha se muestra el algoritmo que expresa esta operación. El algoritmo consiste de los siguientes pasos:

1. Colocar en columnas verticales los dígitos en razón de su valor posicional.

2. Trazar una línea horizontal como se muestra en la imagen.

3. Calcular la diferencia entre los dígitos de cada columna.

4. Escribir los resultados en la columna correspondiente por debajo de la línea. El número que resulta es el resultado de la resta.

El algoritmo funciona cuando los dígitos de las unidades y las decenas del minuendo son mayores o iguales que los correspondientes en el sustraendo.

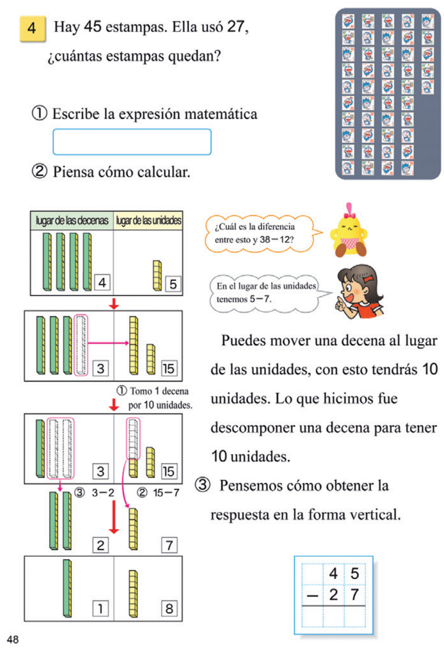



*Fig. 2*

En la página 48 (*Fig. 2*) se plantea un problema que no cumple con una de las especificaciones anteriores: el dígito de las unidades del minuendo es menor que aquel correspondiente al sustraendo. En este caso, el procedimiento anterior no sirve, debe modificarse. El punto clave de la modificación se puede apreciar en el segundo renglón de la ilustración con los bloques: se convierte una decena del minuendo en diez unidades, con lo cual la deficiencia anterior se resuelve (en lugar de 7>5, ahora se tienen 15>7), como lo indican las operaciones del tercer renglón de la ilustración con los bloques.

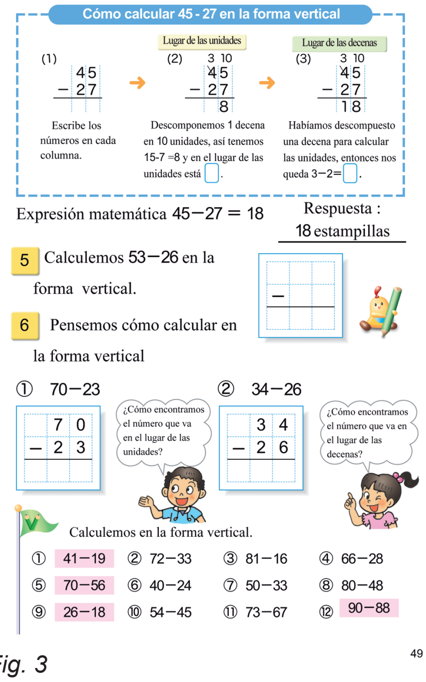



*Fig. 3*

Ahora las condiciones son las necesarias para aplicar el procedimiento anterior, el cual funciona perfectamente.

En el algoritmo se introduce un paso más: **la conversión de una decena en unidades**, que permite superar el problema. En la página 49 (*Fig. 3*), el cuadro “Cómo calcular 45-27...” indica cómo manejar la conversión que se realiza y la forma de hacer el cálculo.

Debe notarse que las últimas dos operaciones representan un reto para los niños al momento de aplicar el algoritmo anterior.

**Actividades que se sugieren para los futuros docentes**

**1.** Revisa cuidadosamente las lecciones que se han abordado al inicio del libro hasta la página 46. ¿Qué antecedente en esas lecciones resulta fundamental para poder abordar el algoritmo de la resta con los alumnos en las páginas 47, 48 y 49? Discute tu respuesta con tus compañeros y tu profesor.

**2.** En el desarrollo de la lección en las páginas 47 a 49 se habla de “convertir una decena en unidades”. ¿Qué diferencia haya entre usar esa expresión y “pedir prestada una decena” en términos de aprendizaje matemático? Discute tu respuesta ampliamente con tus compañeros y tu profesor.

**3.** En este ejercicio hay que remplazar las letras A y B, cada una por un dígito diferente, de tal forma que la resta sea correcta. El símbolo 0 es cero.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & 0 \\ - & & B & A \\ \hline & & B & B \end{array}$$

**4.** Para los siguientes ejercicios se usará el sistema numérico de valor posicional de base siete. Calcula las siguientes restas, con la consideración de que ahora no se trata de decenas sino de agrupamientos de siete y los dígitos a considerar son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

$$\begin{array}{r} 35 \\ -\ 21 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42 \\ -\ 25 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 60 \\ -\ 23 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34 \\ -\ 25 \\ \hline \end{array}$$

## Relación entre la suma y la resta

### Reflexiones adicionales

La representación de situaciones discretas (grupos de entidades u objetos separados entre sí temporal o espacialmente) por medio de un modelo continuo (en este caso una cinta), puede no parecer natural, pero no es el caso.

En el mundo real hay muchas situaciones de carácter continuo que se cuantifican de manera discreta para efectos prácticos, por mencionar algunos: la longitud expresada en metros, kilómetros, centímetros, micras, etc. Otro ejemplo más es el tiempo expresado en segundos, horas, microsegundos, años, etc.

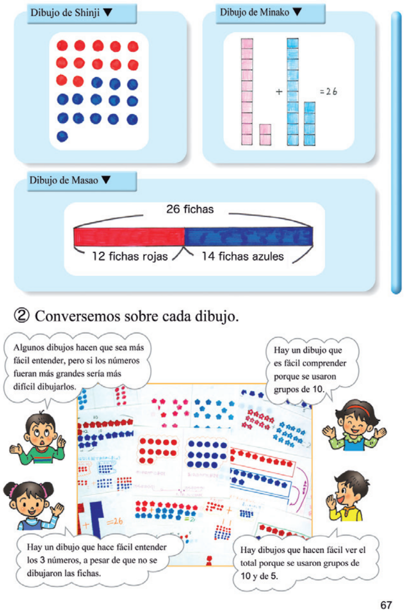



*Fig. 1*

En las páginas 54, 66 y 67 de Tomo II, Vol. 1, se aborda la relación que existe entre la suma y la resta.

En las páginas 66 y 67 (*Fig. 1*) se muestran distintas representaciones de los datos para la siguiente situación: "tenemos 12 marcadores rojos y 14 marcadores azules. Son 26 en total".

Esas representaciones tienen distintas características para presentar los datos y las relaciones que hay entre ellos. La mayoría son del tipo "discreto" y una es del tipo "continuo".

En el caso de las discretas, la cantidad de marcas coloreadas representa fielmente a los datos, sin embargo, con el tipo de representación continua no sucede: Masao recurre a una imprecisa proporcionalidad en la longitud de las cintas para sugerir la mayor o menor cantidad que se representa.

La utilización de un modelo *continuo* para la representación de los números naturales no es nueva, se usa en la recta numérica, y en ésta, la representación es totalmente precisa.

Tanto el modelo de Masao, como el que se muestra en la imagen de la página 54 (*Fig. 2*), sirven para expresar la situación problemática a resolver. Ambos tienen la cualidad de expresar los datos y la relación entre ellos: las tres cantidades están dispuestas de tal forma, que dos de ellas determinan a la tercera.

En el caso de Masao la cinta se forma al unir por uno de sus extremos las dos partes (la suma de las dos partes da el total). En el problema de los niños que se quedan en clase, a la cinta completa se le quita la parte correspondiente a los que salen a jugar y queda la que se debe calcular (al total se le quita la parte conocida y se obtiene el valor buscado).

Este modelo continuo tiene cualidades que lo hacen interesante:

- Con un trozo de cinta se puede representar la numerosidad de grupos discretos, aunque se pierde la precisión que poseen las representaciones discretas.
- Para diferenciar cantidades, es necesario distinguir a las cintas por sus longitudes, las cuales deberán ser aceptablemente proporcionales a la cantidad que representan.
- Esta forma de representación significa un paso hacia la abstracción, un modelo que elimina lo específico de la naturaleza discreta de los datos para resaltar solamente la extensión del conjunto de datos.
- Este es un modelo de representación más potente que el discreto, en el sentido de sus cualidades para representar adecuadamente cantidades correspondientes a colecciones con un número discreto de elementos.

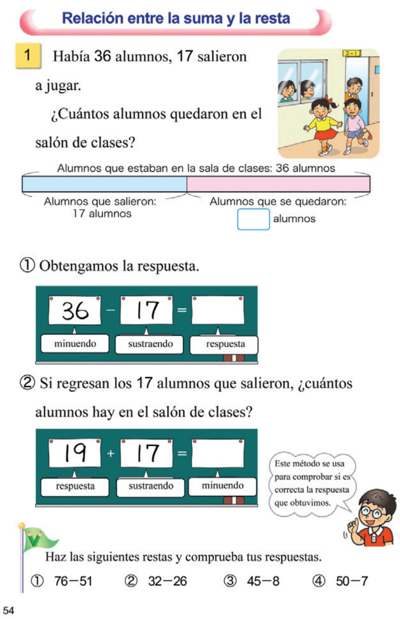



*Fig. 2*

**Actividades que se sugieren para los futuros docentes**

**1.** Indaga en las fuentes bibliográficas que consideres pertinentes cuál es la diferencia entre “representaciones discretas” y “representaciones continuas”. Después, discute lo que encontraste con tus compañeros y tu profesor.

**2.** Identifica tres situaciones en las que se use una representación discreta y compara tu respuesta con la de tus compañeros.

**3.** Identifica tres situaciones en las que se use una representación continua.

**4.** Discute con tus compañeros y tu profesor la pertinencia del uso didáctico de cada una de esas formas de representación en distintas situaciones.

**5.** Discute con tus compañeros y tu profesor cuáles serían las implicaciones de utilizar una representación discreta para abordar la relación entre la suma y la resta.

**6.** Discute con tus compañeros y tu profesor cuáles serían las implicaciones de utilizar una representación continua para abordar la relación entre la suma y la resta.