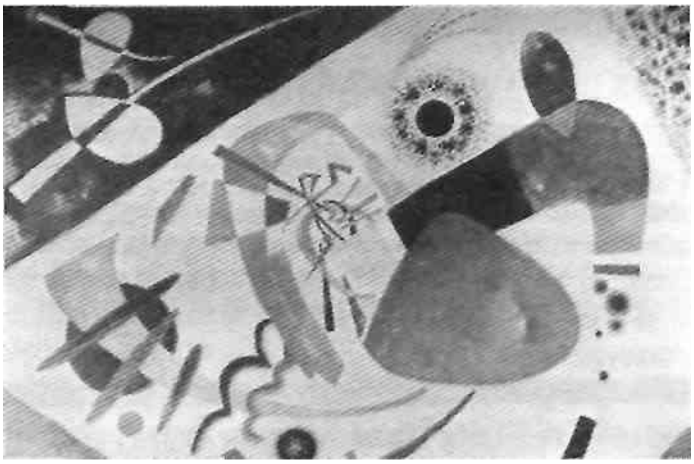

Kandinsky, *Mancha roja II*, Óleo sobre lienzo, 1921.

MATEMÁTICA EDUCATIVA: UNA VISIÓN DE SU EVOLUCIÓN

Ricardo Cantoral
Rosa María Farfán

Resumen Résumé Abstract Palabras Clave
REVISTA EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Resumen Résumé Abstract Palabras Clave

Resumen

MATEMÁTICA EDUCATIVA: UNA VISIÓN DE SU EVOLUCIÓN

La enseñanza en general y la de las matemáticas en particular son asuntos de la mayor importancia para la sociedad contemporánea. A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado instituciones con el objeto de incorporar a las matemáticas y ala ciencia en la cultura de la sociedad con la clara intención de favorecer entre la población una visión científica del mundo. Este intenso proceso social de culturización científica, nos ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares. Del estudio sistemático de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa y en este escrito nos hemos propuesto el ejercicio de describir cierta evolución de sus problemáticas.

Résumé

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES: UNE VISION DE SON EVOLUTION

L'enseignement en general, et celui des mathématiques en particulier, est une affaire de la plus grande importances pour la société contemporaine. A mesure que le temps passe, les sociétés ont formé des institutions ayant pour objectif d'incorporer les mathématiques et la sciences dans la culture de la société avec la claire intention de promouvoir entre la population une visión scientifique du monde. Cet intense procés social d'acculturation scientifique, nous a aidé reconnaítre le besoin d'apporter des modifications éducatives dans le domaine particulier des mathématiques, prenant en compte des méthodes meilleures adaptées aux pratique scolaires. La mathématique didactique se occupe de l'étude systématique des effets de tels procés et dans ce écrit nous nous sommes proposé comme exercice de d'écrire une certaine évolution de ees problématiques.

Abstract

MATHEMATICS EDUCATION: A VISION OF ITS EVOLUTION

The teaching in general and of the mathematics particularly are matters of the greater importance for the contemporary society. Through the years, socicties have conformed institutions with the purpose to incorpórate the mathematics and the science in the society culture to favor among the population a scientific visión of the world. This intense social process or scientific culturization, has helped us to recognize the educational need to implement modifications in thefield of the mathematics based on better designs adapted the scholastic practices. Of the systematic study of the effeds ofsuch processes the mathematics education is occupied and in this writing we have proposed us the exercise to describe certain évolution of its próblematic.

Palabras Clave

Matemática Educativa (evolución de)
Mathematics Education (évolution of)

MATEMÁTICA EDUCATIVA: UNA VISIÓN DE SU EVOLUCIÓN

Ricardo Cantoral* Rosa
María Farfan**

PRESENTACIÓN

La enseñanza en general y la de la matemática en particular son asuntos de la mayor importancia para la sociedad contemporánea. A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado instituciones con el objeto de incorporar a la matemática y a la ciencia en la cultura de la sociedad, con la clara intención de favorecer entre la población una visión científica del mundo. Este intenso proceso social de culturización científica nos ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares. Del estudio sistemático de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa.

Aunque las preocupaciones por la enseñanza de la matemática y por su mejora progresiva son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tan antigua como la vida en sociedad, el estudio sistemático para localizar los fenómenos que la caracterizan, tendrá apenas, si acaso, unas décadas de existencia entre nosotros. Baste como ejemplo el dato de la fecha de fundación de la Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) en México: 1975.

Sin duda, la actividad del matemático educativo profesional ha sido desarrollada en una atmósfera propicia para la investigación serena como la que normalmente prodiga el Cinvestav del IPN. Desde entonces, se han formado varias generaciones de matemáticos educativos y, en ese proceso, la disciplina se ha ido constituyendo como un campo de investigación autónomo que ha ganado para sí la legitimidad de una problemática de estudio. Quizá en un principio, por la misma juventud disciplinar, sólo unos cuantos confiscaban las oportunidades y el quehacer de todos; hoy, en cambio, no es difícil encontrar al interior de nuestra pequeña comunidad dis-

Doctor en Ciencias, con especialidad en Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). Posdoctorado en epistemología y didáctica de las matemáticas, Universidad de París VIL Actualmente se desempeña como Investigador Titular en el Área de Educación Superior del Cinvestav. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores de México. Dirección electrónica: rcantor@enigma.red.cinvestav.mx
Presidenta del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), Investigadora Titular del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados (Cinvestav).

tintas visiones que buscan cohabitar en pluralidad.

Adicionalmente, valdría la pena destacar otra perspectiva que testifica este proceso de conformación disciplinar: la gran diversidad de congresos, seminarios, instituciones, publicaciones y asociaciones profesionales en distintos sitios del orbe. En nuestra opinión, ello exhibe la profunda diversidad en la que se vive actualmente este intenso proceso de institucionalización disciplinar.

Desde esta perspectiva, la *matemática educativa* es entonces una disciplina del conocimiento cuyo origen se remonta a la segunda mitad del siglo XX y que, en términos generales, podríamos decir se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático. Aclaremos de antemano que en este escrito no pretendemos mostrar una panorámica de la investigación en nuestro campo, ni buscamos caracterizar sus métodos o sus temáticas de investigación; para ello, el lector podría acudir a diversas revisiones con esa intención (Farfán, 1997b; Filloy, 1981; Garnica, 1988; Hitt, 1998; Imaz, 1987; Waldegg, 1996), o en el ámbito internacional (Artigue, 1999; Bieleher y otros, 1994; D'Amore, 1999; Nesher y Kilpatrick, 1990). Por nuestra parte, sólo tenemos el objetivo de describir cierta evolución de las problemáticas.

Más específicamente, asumiremos como problemática aquella concerniente a la evolución del estudio de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema de enseñanza y ello les obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad, de manera que afectan también las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesores. Este proceso de incorporación de saberes altamente especializados al sistema didáctico plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados. El desarrollo de tales aproximaciones se lleva a cabo mediante estudios que nos permiten entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático y del saber científico a las prácticas tanto de los profesores como de sus estudiantes.

Nuestro enfoque ante esta problemática exige de una incesante interacción entre la elaboración teórica y la evidencia empírica, para lo cual nos auxiliamos permanentemente de investigaciones sobre la formación de profesores y sobre las condiciones de la enseñanza en las aulas escolares y los laboratorios. Nos interesa sobremanera esclarecer las condiciones del aprendizaje de ideas complejas en situación escolar, con la finalidad de usar dicho conocimiento en la mejora de los procesos educativos.

UNA VISIÓN DE LA EVOLUCIÓN DE NUESTRA PROBLEMÁTICA

Durante las últimas décadas hemos visto aparecer, en el seno de la comunidad de educadores matemáticos, didactas de la matemática o de los matemáticos educativos (según se trate de la tradición de escuela[1] que les cobije), sectores académicos universitarios que se ocupan del estudio de los procesos del pensamiento llamados *avanzados* en los temas

1. El nombre de *matemática educativa* da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de *Mathematics Education,* mientras que en la Europa continental le han llamado Didáctica de las matemáticas, *Didactique des mathématiques, Didaktik der Mathematik,* por citar algunas de las escuelas más dinámicas.

matemáticos de la educación superior. Las temáticas que abordan son posteriores al álgebra básica; digamos que suelen tratar con temas desde el cálculo en adelante.

Este vertiginoso crecimiento ha sido posible, en nuestra opinión, gracias a dos factores principales: el primero, debido al creciente interés de los matemáticos profesionales en los asuntos de la enseñanza y del aprendizaje, y el segundo, a causa de la estabilidad y madurez que han alcanzado comunidades de investigación que se organizan en torno de grupos académicos con paradigma propio, como es el caso del grupo International Commission for Mathematical Instruction **(ICMI),** del Psychology of Mathematics Education (PME) o de la comunidad de investigadores del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), grupos que citamos pues representan un punto de referencia obligada en la actualidad.

Este doble proceso de desarrollo que se nutre de la reflexión matemática en el seno de lo didáctico, por una parte, y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción -social e individual- del conocimiento, ha sido, en nuestra opinión, una de las principales y más recientes contribuciones de nuestra disciplina: la matemática educativa.

En lo que sigue, presentaremos una serie de ejemplos que den cuenta de la evolución de las problemáticas en diferentes momentos, que hemos llamado *una didáctica sin alumnos, una didáctica sin escuela, una didáctica sin escenarios y una didáctica en escenarios sociocul-turales.*

UNA DIDÁCTICA SIN ALUMNOS

La problemática clásica en matemática educativa se ocupó de diseñar presentaciones del contenido matemático escolar que se consideraban más accesibles para los alumnos y para los profesores que aquellas otras presentaciones llamadas *tradicionales.* Se asumía que una presentación mejor adaptada a la escuela y a sus agentes podría ser construida sólo con la reflexión del profesional de la matemática. Siguiendo esta línea, se produjeron libros de texto y materiales educativos sin tomar en consideración sistemáticamente otros factores como aquellos de naturaleza cognitiva o afectiva, o bien los relativos a las cuestiones socioculturales del conocimiento. Se buscaba producir aquello que la escuela habría de consumir, sin estudiar a profundidad la cultura escolar.

Un ejemplo clásico de este enfoque lo constituye la propuesta de aproximación del área de una figura plana mediante particiones cada vez más finas. Se proponían a los estudiantes diversas actividades de enseñanza para estimar el valor de un área dada, como, por ejemplo, el área de la elipse de la figura 1.

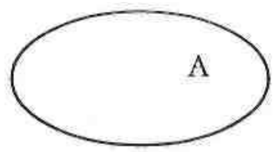

Figura 1. Elipse a la que se le buscará el área

Se proponía introducir una cubierta formada por elementos cuya área es conocida. Por ejemplo, un rectángulo de lados 3 y 6 cm (ver figura **2).**

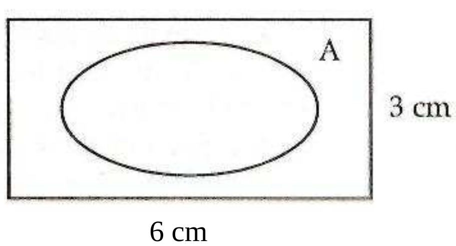

Figura 2. Procedimiento inicial para determinar el área de la figura elíptica

De este modo, el área buscada sería menor que 6x3 cm^2. Luego, si el área buscada se denota como A cm^2, se cumple entonces con la relación $0<A< 18$.

A continuación retinaban la aproximación y dividían, por ejemplo, en cuadrados unitarios (ver figura 3). Seis a lo largo y tres a lo alto, contando el número de cuadrados en los que quedaba la figura contenida y el número de los que quedaban completamente dentro de la figura. Se proponía por ejemplo $4 < A < 18$.
Se continuaba refinando la aproximación por

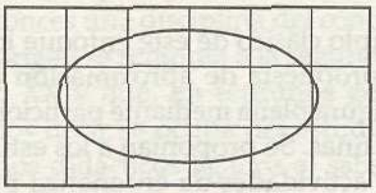

Figura 3. División en cuadrados para calcular el área de la figura elíptica

Se continuaba refinando la aproximación por iniciativa del docente, y se obtenía nuevas y mejores aproximaciones, de manera que la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y la $b_1, b_2, b_3, \ldots$ de aproximaciones sucesivas satisfacían las siguientes relaciones:

$$a_1 \leq A \leq b_1$$
$$a_1 \leq a_2 \leq A \leq b_2 \leq b_1$$
$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq A \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$
$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq A \leq b_4 \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

Aquí, el estudiante no quedaba a cargo de este proceso, si acaso sólo de su ejecución. Debido a la naturaleza de la construcción que hemos descrito, se sabe que, matemáticamente, el límite de las sucesiones a_n y b_n es, en ambos casos, A, de modo que el proceso de aproximación conduciría, por una especie de *sensualismo didáctico,* al convencimiento entre los estudiantes de que tal límite existe y de que las concepciones que ellos tengan sobre lo que es el área y sobre lo que significa representarla mediante aproximaciones, ya sea por exceso o ya por defecto, no producirían dificultades mayores para los profesores al momento de pretender desarrollar esto en sus clases.

Recientemente, a partir de estudios de naturaleza cognitiva, se reporta que los estudiantes tienen mayores dificultades para aproximar las figuras por exceso, que cuando lo hacen por defecto. Era necesario, entonces, modificar y ampliar la problemática de estudio en la matemática educativa, al incluir explícitamente al aprendizaje del alumno como factor central del diseño curricular y para el desarrollo de la instrucción en una clase habitual de matemáticas.

Del mismo modo, estas aproximaciones didácticas sin alumnos hicieron evidente la necesidad de atender aspectos, hasta entonces transparentes para los matemáticos educativos, como el papel que desempeñan las acciones del profesor en los actos de aprendizaje de sus alumnos, o la forma en que los diálogos intervienen en los procesos de desarrollo del pensamiento. De ahí que paulatinamente se hayan incorporado estudios sobre el pensamiento del profesor para dar cuenta de las formas en que el docente conducía un cierto proceso de negociación del significado con sus alumnos. La problemática, aunque había sido modificada, no había sido completamente estudiada.

UNA DIDÁCTICA SIN ESCUELA

Hacia la década del ochenta se presentó, en la cuarta International Conference of Mathema-tics Educatíon (ICME - 4), un programa de acción en torno del cual se desarrolló paulatinamente nuestra disciplina. Ello se expresó a partir de planteamientos como aquel del profesor Freudenthal, al someter a consideración preguntas como la siguiente: ¿cómo aprenden las personas? y ¿cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje? En nuestra opinión, ello dio pie a un nuevo paradigma de investigación que modificaba su objeto y su método de estudio. Ello ha derivado en una aproximación cognitiva a la investigación que realiza la observación y la descripción sistemática de los logros de los estudiantes y de las diversas experiencias de aprendizaje.

Por supuesto, una de las pretensiones de esta aproximación fue la de que estos estudios cognitivos, en tanto dieran explicación de cómo se aprende matemáticas, pudiesen dar pautas (o al menos aproximaciones) para la articulación de los principios que subyacen a los futuros diseños curriculares.

En esta perspectiva y para el caso de las matemáticas escolares del nivel universitario, uno de los primeros y muy representativos estudios fue el contenido en Tall y Vinner (1981). En él se introducen y desarrollan términos como *imagen del concepto y definición del concepto.* Se dice, entonces, que el estudiante, para definir si un objeto matemático dado es un ejemplo o el contraejemplo de un concepto, no decide necesariamente sobre la base de definiciones aprendidas, sino con relación a la imagen conceptual que ha sido forjada al filo de su experiencia y que representa «la total estructura cognitiva asociada con el concepto que incluye todas las imágenes mentales, propiedades asociadas y procesos». Así, los estudiantes pueden dar una definición conjuntista de la noción *defunción* (definición del concepto) y negarse a reconocer como una función a una relación funcional definida por dos expresiones algebraicas diferentes sobre dos intervalos: «una función dada por dos fórmulas». De la misma forma, pueden negarse a considerar como iguales a funciones matemáticamente equivalentes, pero definidas por procesos diferentes. Ello a causa, según se decía, de que su imagen conceptual de una función estaba ligada a su representación algebraica única.

Para dar una explicación del porqué los alumnos dan respuestas diferentes y contradictorias de un mismo problema, Tall y Vinner introdujeron la noción *conflicto cognitivo potencial.* El término *potencial* significa que dos concepciones contradictorias no son necesariamente activadas de manera simultánea; los conflictos cognitivos resultado de la incoherencia de la red pueden incluso no aparecer. Uno de los ejemplos clásicos en la literatura consistió en que dos ejercicios propuestos en una misma hoja a estudiantes que terminan el bachillerato o que inician la universidad, darán lugar a respuestas matemáticas contradictorias, sin que estas contradicciones sean percibidas por los alumnos:

- compare los números 0,999¼ y 1
- calcule la suma de la serie (9/10 + 9/100 + 9/1000 + ¼).

En el primero de los casos, la respuesta mayoritaria es: 0,999... < 1, y se acompaña de diversos tipos de justificación, producto de una visión de la escritura decimal ilimitada: «al escribir 0,999999 no se detiene jamás con la escritura, entonces debe ser inferior a uno»; asimismo, al tener una visión infinitesimalista se dice: «es infinitamente próximo a 1, pero no es igual al 1», «justo antes, debe ser el último número antes de 1». En el segundo caso, la respuesta mayoritaria: 1, se obtiene por activación del procedimiento de cálculo de la suma de una particular serie geométrica.

Este tipo de estudios proporcionaron una herramienta útil y eficaz para estudiar el comportamiento cognitivo de los estudiantes ante algún tipo de tareas matemáticas; empero, creemos que el desempeño de los alumnos no puede reducirse a la dimensión cognitiva, pues las relaciones que ellos mantienen con los objetos matemáticos están condicionadas por las representaciones que se forjan más globalmente sobre lo que es la actividad matemática, sus ideas de lo que es el aprendizaje de las matemáticas, su posición con relación a ellas y, más globalmente incluso, de su estatus como alumno.

De modo que la forma en la que un estudiante vive una situación de enseñanza y sus producciones matemáticas en ese contexto son condicionadas por las características de la costumbre didáctica. Su comportamiento cog-nitivo en el seno de la institución escolar puede ser entendido de una manera muy diferente a aquel que brinda su comportamiento cognitivo. La vida en las instituciones matiza los procesos del pensamiento. El término *institución* podemos tomarlo en un sentido amplio: la familia, la clase, la escuela, el sistema educativo, el ambiente social constituido también por otro tipo de organizaciones humanas. Las interpretaciones en términos de concepciones para hacer observaciones de alumnos no son necesariamente las únicas ni las más pertinentes. Se les debe concebir como las interpretaciones posibles, susceptibles de competir con otras dentro del análisis de fenómenos didácticos.

***UNA** DIDÁCTICA EN LA ESCUELA, PERO SIN ESCENARIOS*

Otras formas de abordar los problemas las constituyeron las aproximaciones sistémicas que han intentado analizar los fenómenos didácticos tomando en cuenta la complejidad del sistema en donde suelen considerarse distintos polos: el del saber, aquél de quién aprende y el de quién enseña en un medio determinado, tratando de esclarecer sus relaciones mutuas a fin de "explicar" los diversos fenómenos didácticos que se suceden en el hecho educativo.

Consideremos el ejemplo de los estudios de convergencia de series infinitas. En Farfán (1997a) se desarrolla un examen que busca dar significado al concepto *convergencia de series infinitas* con aproximaciones novedosas, con el fin de encontrar una veta en la asociación de la noción de *convergencia* con el estudio científico de la propagación del calor. El fenómeno de la propagación del calor fue una cuestión tratada tanto por la mecánica racional como por el análisis matemático durante el siglo XVIII y al cual no dieron en su momento una respuesta definitiva.

Para robustecer el aporte sistémico que no limitara las cuestiones del aprendizaje a los procesos mentales, se consideró pertinente hacer un estudio del tratamiento del cálculo algebraico en la época, enfatizando en los procedimientos heurísticos comúnmente utilizados. Al lado de este desarrollo, se buscaba localizar el surgimiento institucional de la ingeniería matemática sobre la práctica tradicional y desentrañar el papel sustantivo que esa institución de educación superior, la Ecole Po-lytechnique, tuvo para consolidar una tradición educativa, un paradigma del saber y una institucionalización de las prácticas sociales.

Así pues, el problema matemático que ocupó entonces las investigaciones en matemática educativa del nivel superior fue el de estudiar la noción *convergencia de seríes infinitas* en los ambientes fenomenológicos que le dieron origen, particularmente aquel referido a la *conducción del calor* en estrecha relación con la ingeniería. Todo ello arrojó información didáctica pertinente en virtud de la conjunción de diversas variables que rebasaba las cuestiones propiamente mentales y abría el camino al estudio sistemático de la formación del conocimiento desde una perspectiva social. El desarrollo del cálculo algebraico y el surgimiento de la ingeniería en el siglo XVIII resultaron, según este programa, una materia prima fundamental para el desarrollo de estrategias didácticas para los sistemas educativos contemporáneos.

Según se obtuvo del examen de la obra de Biot, se reconocía que antes de la formulación formal del conocimiento matemático, se precisaba de una experiencia que se dirigiera hacia la medida y la experimentación, para que con base en cálculos se desecharan las explicaciones del fenómeno mediante nociones como el *calórico.* Para ello había que hacer uso de las indicaciones suministradas por termómetros, obteniéndose así la primera ecuación diferencial que rige al fenómeno. Esto abrió la posibilidad de articular las clases de matemáticas con las de ciencia y pensar de nueva cuenta la cuestión del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes con base en aproximaciones sistémicas.

De paso, estas investigaciones permitieron la reconstrucción de conceptos del análisis matemático, como los de *función, expresión analítica, el continuo real,* así como la interpretación física de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, y se dio inicio al estudio de la *convergencia de series infinitas,* pilar fundamental del análisis matemático moderno. Como resultado de estos estudios se concluyó en una reformulación de las hipótesis de investigación; se decía entonces que,

> *[...] para la construcción de la noción de convergencia de series infinitas, se precisa de un ambiente fenomenológico estrechamente relacionado con la estabilidad de sistemas fluidos. De suerte tal, que determinar el estado estacionario del sistema conduce, necesariamente, a un estudio de la convergencia de una serie trigonométrica infinita [...]* (Farfán, 1997a).

Una vez determinada la *fenomenología intrínseca* del concepto convergencia en su génesis, se diseñaba un apropiado montaje experimental, a fin de estudiar los procesos imple-mentados por grupos de profesores de matemáticas del nivel universitario, involucrando, por un lado, problemas físicos, similares a los abordados por Fourier y, por otro, los planteados en un contexto matemático. Se retomaron experimentos a fin de analizar las ideas intuitivas que sobre la conducción del calor poseen los profesores, así como aspectos referidos a la representación matemática del fenómeno. Se realizaron exploraciones con diversos propósitos: sobre la definición de convergencia y acerca del límite de una serie de funciones, dada por Abel en 1826. Aquellos profesores universitarios participaron en una experiencia de investigación y enseñanza controlada a lo largo de períodos más amplios que aquellos usados en los primeros años de la investigación en matemática educativa. En el caso que ahora se reporta, se trabajó durante dos años y medio ininterrumpidamente buscando ambientar de mejor manera los acercamientos propuestos.

De los resultados de esa experiencia en el contexto físico, se observó que si bien la primera intuición sobre el fenómeno es perceptible, esto no ocurre con sus representaciones gráfica y analítica, pues se obtuvieron casi tantas representaciones como respuestas. En realidad, al pedir una representación gráfica estuvimos pidiendo un manejo versátil sobre una producción cultural que vincula los contextos físicos con los geométricos, cosa inusual en la enseñanza contemporánea. En el contexto físico, por ejemplo, ha de tenerse una clara referencia para distinguir *lo que varía* respecto a *qué* es lo que produce tal variación[2] para, enseguida, predecir cuándo la variación

2. Esto, sin ser precisamente lo mismo, se vincula a un obstáculo epistemológico reportado en Sierpinska (1992), referido a un esquema inconsciente de pensamiento donde «[...] se observan los cambios como fenómenos, enfocando la atención sobre cómo cambian los objetos, ignorando qué cambia [...]»(36). Sierpinska alude al trabajo de Aristóteles, en donde su atención se enfoca en cómo los objetos pasan de un estado a otro, y en encontrar una definición de cambio, así como en establecer las categorías de ellos: «[...] En su Física, libro III, capítulo i, Aristóteles define "movimiento de cambio" como una actualización de un estado potencial y dice que "existen tantas clases de movimiento de cambio como clases de ser". Sus ejemplos de movimiento de cambio son: cambio cualitativo, incremento y decrecimiento, rotación, maduración y envejecimiento. Estas denominaciones describen la naturaleza del cambio como una variable que pasa de un posible valor a otro. Sin embargo Aristóteles no se interesó en la variable misma, no centró su atención en métodos y medios para medir sus cambios [...]»(36).

que subsiste ha llegado a un estado estable. Esa predicción es la determinación del estado estacionario al que se aproximan los diversos estados en donde, para cada uno, se tiene determinada su evolución. Precisar la relación existente entre evolución del fenómeno para cada tiempo y predicción fue lo que se les requirió a los profesores; en realidad, estuvimos pidiendo que reconstruyeran la síntesis del intelecto de Fourier en esta tarea de representación.

El estudio de Fourier va precedido de un análisis cualitativo y empírico del fenómeno físico en cuestión, de la intuición acerca de la certeza sobre la convergencia de la solución, ligada a la naturaleza propia del fenómeno (la temperatura no es infinita). Y sobre ello hace descansar sus posteriores desarrollos analíticos anteponiendo, así, el contexto físico al geométrico y al algebraico, haciendo uso en este último de habilidades matemáticas propias de la época, ajenas a nuestras tradiciones educativas. No obstante, el estudio de problemas físicos actuales planteados por la ingeniería requiere del análisis cualitativo y de una representación adecuada. De ahí la importancia de estudiar el contexto físico, a fin de procurar un acercamiento fenomenológico que posibilite futuros diseños didácticos en contextos afines a la ingeniería en las diversas especialidades que lo propicien.

La hipótesis inicial de este trabajo sostiene que es indispensable, para la construcción de un concepto matemático, la significación que le dio origen; en este caso, es la determinación del estado estacionario lo que propició dicha construcción. Sin embargo, este concepto físico no es producto de la primera experiencia sensible; baste decir que la humanidad conoce, requiere y manipula el calor desde tiempos remotos, en tanto que su estudio científico se inicia en el siglo XFX, poco después de la publicación de la *Mecánica celeste* de Laplace. Es decir, se ha estudiado la naturaleza del espacio que circunda el globo terrestre antes de dar cuenta de un fenómeno vital para la vida humana.

Ello no es gratuito. La abstracción requerida para la adquisición del concepto físico involucrado representa una tarea cognitiva de las más complejas. Nadie se atrevería a levantar una olla que contiene agua en ebullición sosteniéndola por su base: esta decisión es producto de la intuición primitiva (casi instintiva). Pero, ¿podré admitir que, siendo el flujo de calor constante (no hay aumento de temperatura), las temperaturas en los puntos difieran?... Es tanto como admitir *variabilidad* dentro de lo estabilidad. Esto último no se deriva de la experiencia sensible, sino de una profunda reflexión del fenómeno, para lo cual se requiere de un amplio repertorio de habilidades no cultivadas en el ámbito escolar. De lo que se desprende la obligatoriedad de desarrollar la intuición más allá de lo sensible, como una etapa previa, antes de significar nuestro particular concepto matemático. En síntesis, el tipo de estudio epistemológico reportado proporcionó la explicación que niega, parcialmente, la hipótesis de partida, a saber, si bien es cierto que el concepto surgió en el ámbito de la determinación del estado estacionario, éste no resulta propicio para recrearse en el aula, pues resulta ser más complejo que aquél que se desea introducir. Esto último nos indujo al estudio socioepis-temológico en las diversas formaciones profesionales de nuestro sistema de educación superior.

UNA DIDÁCTICA EN ESCENARIOS SOCIOCULTURALES

Como lo reportan diversas revisiones recientes (Artigue, 1999; Cantoral, 2000), los estudios que tratan sobre la didáctica de la matemática en el nivel superior, por ejemplo, las de análisis matemático, han usado distintas metáforas del aprendizaje que conservan, en algún sentido, puntos comunes, como por ejemplo, el uso de la tesis central que proporciona la epistemología genética relativa al desarrollo del pensamiento. Apuntamos el hecho de que esas investigaciones se han centrado en problemáticas que se ocupan de la matemática relevante en la enseñanza superior, asumiendo que la matemática interviene en ese nivel casi exclusivamente como disciplina principal de enseñanza, olvidando un hecho fundamental que caracteriza al sistema didáctico de la educación superior: también y quizá con mayor fuerza, la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación.

La línea de investigación que se desarrolla en el grupo de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa considera, como necesidad básica, dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple, que en la jerga le nombramos *la cuarta dimensión,* le hemos llamado formalmente el *acercamiento socioepistemo-lógico.* En este sentido, el pensamiento y el lenguaje variacional es entendido como una línea de investigación que, ubicada en el seno del acercamiento socioepistemológico,[3] permite tratar con la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos.

Actualmente se desarrollan estudios sobre currículo, en los que se busca determinar cuáles deben ser los contenidos por enseñar, considerando la evolución de la matemática y las necesidades sociales que el sistema educativo espera cubrir con la escuela; y sobre la instrucción, es decir de las actividades que acompañan al aprendizaje, se busca la mejora de los métodos de enseñanza, los problemas que se enmarcan en torno a la transmisión oral del conocimiento, los procesos cognitivos, la motivación y creación de actitudes positivas. Se pone cierta atención sobre los recursos, específicamente sobre aquellos que refuerzan el proceso de enseñanza, los materiales educativos, las calculadoras y computadoras, y la manera en que los medios audiovisuales se habrían de introducir en las aulas. Así mismo, se realizan investigaciones que tratan de la vida del conocimiento en la escuela. Se busca determinar la influencia que el sistema escolar ejerce en los aprendizajes; se determinan las matemáticas que se aprende en y fuera de la escuela, y se trata del papel de los medios de comunicación, los entornos familiares o gregarios con los grupos de estudiantes. Se quiere también investigar sobre el sistema escolar para saber el rumbo y sentido de las decisiones políticas o sociales que modifican al funcionamiento del sistema educativo.

Veamos a continuación, en forma resumida, un ejemplo de los estudios que cumplen con este tipo de características. Se pretende comunicar los aspectos relevantes de un programa de investigación con que buscamos construir una base de significaciones para procesos y conceptos del análisis matemático del nivel universitario. Este acercamiento inicia con una serie de actividades que buscan la construcción, entre los estudiantes, de un universo de formas gráficas que sea, a la vez, amplio y estructurado, y se continúa con el desarrollo de la noción de predicción de los fenómenos de flujo apoyados en el binomio de Newton. La combinación de ambas tareas,

3. Este acercamiento fue presentado en el Seminario de Investigación en Matemática Educativa del Área de Educación Superior del Cinvestav en México y en una conferencia plenaria de la Conference on Research in Mathemaücs Education en Estados Unidos durante el mes de septiembre de 1997.

sostenemos esta hipótesis, favorece al desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacio-nal.

El desarrollo del pensamiento y el lenguaje varíacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados. Supone el dominio de la matemática básica y de los mecanismos del pensamiento asociados, pero exige diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional. Dichas rupturas no pueden sostenerse con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce de la construcción de los números reales, ni tampoco descansar en la idea de aproximación, sino que deben permitir la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio.

Al iniciar un curso de análisis, el estudiante debe concebir a la función como un objeto y, por ende, susceptible de las operaciones que otro procedimiento efectúe sobre ella. En nuestras experiencias hemos encontrado que en caso de tener un dominio del contexto gráfico/visual, será posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones. El problema didáctico estriba fundamentalmente en la dificultad para adquirir maestría en el contexto geométrico; por ejemplo, en el plano de la argumentación es más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que hacerlo geométricamente.

Nuestra primera hipótesis consiste en asumir que la introducción al análisis precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite la transferencia de campos conceptuales ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. Esta hipótesis ha sido desarrollada siguiendo dos directrices: en primer término, se presenta la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables, dando sentido a operaciones fundamentales. El segundo aspecto lo constituye la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de algunas primitivas.

Pasemos a la segunda tesis de nuestra aproximación. El binomio de Newton se escribe por vez primera como $(P+PQ)^{m/n}$ y no como $(a+b)^n$. Ello obedece a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología que difiere de la que hoy enseñamos en clase. Atiende a un programa en el dominio de la ciencia con el que se busca predecir el comportamiento de los fenómenos de cambio: un programa de matematización de los fenómenos modelables mediante la metáfora del flujo de agua aplicada por igual a la evolución de otras magnitudes.

Esa noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos, pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar, entonces, el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad, debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un comienzo, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente.

El objeto matemático, binomio de Newton, se presenta como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que requieren de la predicción, de donde transita hasta llegar a tomar la forma abstracta del concepto *función analítica.*

En nuestra opinión, estos hallazgos favorecen la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza que traten sobre el *qué enseñar y* no sólo, como ha sido habitual, sobre el *cómo enseñar*. En síntesis, nuestra línea de investigación toma como objeto de estudio a la socioepistemología de los saberes matemáticos e incluye las intuiciones primarias del alumno con el fin de rediseñar el discurso matemático escolar.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ARTIGUE, M. (1999). "L'évolution des problématiques en Didactique de l'Analyse". En: *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 18, No. 1. pp. 31-63.

BIELEHER, R. y otros. (1994). *Didactics of Mathematics as a scientific discipline.* Kluwer Academic Publishers.

CANTORAL, R. (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal: ICME 8, Sevilla, España.* México: Editorial Iberoamérica.

D'AMORE, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matemática.* Bologna - Italia: Pitagora Editrice.

FARFÁN R. (1997a). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* México: Editorial Iberoamérica.

________(1997b). "La investigación en ma temática educativa en la reunión centroame ricana y del Caribe referida al nivel superior". En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 1, No. 0. pp. 6-26.

________(1997c). "Problemática de la ense ñanza de las matemáticas en América Latina". En: Calderón, D. y León, O. (eds.). *La didácti ca de las disciplinas en la educación básica.* Bo gotá: Universidad Externado de Colombia, pp. 123-146.

FILLOY, E. (1981). "Investigación en matemática educativa en México. Un reporte". En: *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 2, No. 2. pp. 233-256.

GARNICA, I. (1988). *Elementos para un estudio introductorio a la actividad educación matemática.* Tesis de maestría. México: Cinvestav-IPN.

HTTT F. (1998). "Matemática Educativa: investigación y desarrollo, 1975 - 1997". En: HITT, F. (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II.* México: Editorial Iberoamérica, pp. 41-65.

IMAZ, C. (1987). "¿Qué es la matemática educativa?". En: BONILLA, E. FIGUERAS, O. y HITT, F. (eds.). *Publicaciones centroamericanas.* Vol. 1, No. 1. pp. 267-272.

NESHER, P. y KILPATRICK J. (eds.) (1990). *Mathematics and cognition: A Research Synthesis of the International Group for the PME.* Cambridge University Press.

TALL, D y. VINNER, S. (1981). "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity". In: *Educational Studies in Mathematics.* No. 12. pp. 151-169.

WALDEGG, G. (ed.). (1996). *Procesos de enseñanza y aprendizaje.* 3 vols. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa, AC.

BIBLIOGRAFÍA

ARTIGUE M. "Didactic Engineering". En: *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Selected Papers. 1992. pp. 41-66.

BROUSSEAU, G. "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques". En: *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 7, No. 2.1986. pp. 33-112.

CANTORAL, R. *An example of the Sociológica! Point of View in Math Education: The Case of Analytical Functions at the University Level.* Principal speaker, Conference on Research in Mathematics Education. Michigan State University, EUA, 1997.

CANTORAL, R. y FARFÁN, R. "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis". En: *Epsilon.* No. 42, 1998. pp. 353-369.

CORDERO, F. *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso matemático escolar).* Tesis doctoral Cinvestav - IPN, México, 1994.

DOUADY, R. "La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento". En: GÓMEZ, P (ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Colombia: Editorial Iberoamérica, 1995. pp. 61-96.

DUBINSKY, E. y HAREL, G. *The concept of fundían: Aspects on Epistemology and Pedagogy.* EUA: MAA, Notes 25,1992.

FARFÁN, R. "Ingeniería Didáctica". En: *Pedagogía.* Vol. 10, No. 5,1995. pp. 14-23.

_______"Problemi e sfide dell'insegnamento della Matemática nell'America Latina". En: D'AMORE, *B* (ed.). *Diversis Aspetti e Diversi Ámbiti della Didattica della Matemática. Incontri con la Matemática* 22. Italia: Pitagora Editrice, 1998. pp. 25-32.

SIERPINSKA, A. "On understanding the notion of function". En: DUBINSKY, E. y HAREL, G. (eds.). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy.* EUA: MAA, Notes 25,1992. pp. 23- 58.

TALL, D. (ed.). *Advanced Mathematícal Thinking.* Kluwer Academic Publisher, 1991.

REFERENCIA

CANTORAL, Ricardo y F ARFAN, Rosa María. "Matemática educativa: una visión de su evolución". En: *Revista Educación y Pedagogía.* Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero- abril), 2003. pp. 203-214.

Original recibido: abril 2002

Aceptado: mayo de 2002