COLECCIÓN
DIDÁCTICA
INFANTIL

# Didáctica de las Matemáticas

Coordinadora:
Mª del Carmen Chamorro

PEARSON
Prentice Hall

# Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil

# Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil

Coordinadora y autora:

M.ª del Carmen Chamorro
Catedrática de E.U. de Didáctica de las Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Coautores (por orden alfabético):

Juan Miguel Belmonte Gómez
Profesor titular de E.U., Universidad Complutense de Madrid

M.ª Luisa Ruiz Higueras
Catedrática de E.U., Universidad de Jaén

Francisco Vecino Rubio
Profesor titular, Universidad Complutense de Madrid

PEARSON
Prentice Hall

Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima
Montevideo • San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

**M.ª del Carmen Chamorro (Coord.)**
*Didáctica de las Matemáticas para*
*Educación Infantil*
PEARSON EDUCACIÓN, Madrid, 2005

ISBN: 84-205-4807-3
Materia: Didáctica y metodología 37.02

Formato: 170 x 240 Páginas: 424

Todos los derechos reservados.
Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sgts. Código Penal).

DERECHOS RESERVADOS
© 2005 PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
C/Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)

PEARSON PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN

**M.ª del Carmen Chamorro**
*Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil*

**ISBN: 84-205-4807-3**
Depósito Legal: M-

**Editor:** Juan Luis Posadas
**Técnico editorial:** Elena Bazaco
**Equipo de producción:**
**Director:** José Antonio Clares
**Técnico:** Diego Marín
**Diseño de cubierta:** Equipo de Diseño de Pearson Educación
**Composición:** DiScript Preimpresión, S.L.
**Impreso por:**

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

# Tabla de contenidos

## CAPÍTULO 3. Desarrollo del pensamiento simbólico en el niño 63

# Prólogo

La mayoría de los padres, y parte de los enseñantes, creen que en Educación Infantil no es posible hacer un trabajo matemático de calidad, y que como mucho los niños pueden aprender a leer y escribir los primeros números. Prueba de ello son los aburridos manuales con sus repetitivas fichas que los niños de Educación Infantil deben ir rellenando a lo largo del curso y que dan fe de una concepción del aprendizaje muy alejada de lo que la investigación ha desvelado, no solo como conveniente, sino también posible.

Los propios editores de textos se apresuran a rechazar propuestas en las que el aprendizaje, por ejemplo de los números, no se ciñe a lo habitual (los números deben ser aprendidos en orden y no sobrepasar una determinada cantidad), o en el que las propuestas geométricas van más allá del mero reconocimiento de formas elementales (el círculo, el cuadrado y el triángulo), o donde el trabajo con magnitudes exige la manipulación y experimentación con materiales diversos: harina, agua, trozos se madera, recipientes, balanzas, etc., en lugar de limitarse a actividades más tranquilas como el aprendizaje de un vocabulario socialmente establecido (metro, litro, kilo). El argumento es simple: ese manual no se venderá porque no es eso lo que buscan los profesores de Educación Infantil. Nosotros creemos que se confunden y que los profesores esperan cosas diferentes.

Este libro es, por el contrario, una apuesta arriesgada. El profesional de Educación Infantil, que siempre ha sabido que sus alumnos son capaces de ir más allá, encontrará aquí respuesta a muchas de sus preguntas. Se propone sobre todo una línea de trabajo coherente, científicamente fundada, para trabajar el área lógico-matemática, que va más allá de un repertorio de actividades atractivas sueltas.

Los autores, aunque son matemáticos de formación y expertos en Didáctica de las Matemáticas, han pasado muchas horas en las aulas de la Escuela Infantil, por lo que han tenido ocasión de experimentar la mayoría de las propuestas que aquí se presentan; han hecho muchas observaciones que han reflejado en el texto, y han trabajado en colaboración con muchos maestros y maestras de Educación Infantil. Este libro es, por tanto, el resultado de su estudio y su experiencia que ahora quieren compartir con otros docentes o futuros docentes.

La médula espinal de la obra está constituida por varias ideas básicas:

I. Enseñar el área lógico-matemática en la Educación Infantil **requiere una cualificación profesional** nada desdeñable, y tiene la misma importancia que enseñar Matemáticas a un futuro ingeniero.

II. La enseñanza del área lógico-matemática en Educación Infantil no puede estar guiada por la mera intuición o la experiencia, que, aun siendo importantes, no se acomodan con frecuencia a lo que las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas han puesto de manifiesto.

III. Aprender Matemáticas en cualquier nivel debe suponer siempre un reto atractivo y asumir este reto debe ser placentero o debe producir placer; no es una pesada carga en la que la búsqueda de las respuestas no pretende otra cosa que dar satisfacción a los que nos rodean.

IV. En la actualidad, la Didáctica de las Matemáticas está en condiciones de proporcionar propuestas didácticas realistas, adaptadas a la Escuela Infantil, que proporcionen una enseñanza matemática de calidad ya desde los primeros niveles.

V. Las capacidades de los niños exceden con frecuencia la estimación que hacemos de ellas, por lo que hay que ponerlas continuamente a prueba.

VI. Un concepto solo adquirirá un estatuto generalizable si está integrado en una red de conceptos; es de vital importancia que el futuro profesor comprenda que un conocimiento solo puede adquirir un carácter general si, previamente, los elementos que definen dicho concepto han sido abordados en contextos particulares muy variados, de ahí que las actividades sueltas, por muy atractivas que puedan parecer, estén condenadas al fracaso a medio plazo.

El futuro maestro de Educación Infantil encontrará en este libro la fundamentación de muchas acciones didácticas que ha visto practicar a otros, así como la crítica de conductas estereotipadas que llevan practicándose demasiado tiempo en Educación Infantil. Encontrará, también, numerosas sugerencias para trabajar en el aula con garantía de éxito, y con la seguridad de que se está haciendo un trabajo matemático fundamentado y de calidad.

En consecuencia, con la cualificación específica que entendemos debe tener todo profesor de Educación Infantil para impartir el área lógico-matemática, no hemos escatimado profundizar en la teoría, ya sea esta de carácter matemático, psicológico o didáctico, pues paradójicamente, y en contra de lo que la sociedad piensa, es más difícil hacer una enseñanza de las Matemáticas en este nivel que en otros superiores, y se requiere que el profesor tenga una formación matemática y didáctica amplia y bien fundamentada.

El combate contra el fracaso escolar en Matemáticas debe empezar, de forma preventiva, en estos niveles, y no desaprovechar el inmenso regalo que supone la curiosidad infantil, cualidad indispensable, que, junto con la perseverancia y la disciplina, son imprescindibles para avanzar en los aprendizajes matemáticos a los que el niño, ahora preescolar, tendrá que enfrentarse a lo largo de una dilatada escolaridad.

CAPÍTULO 1

# Aprendizaje y matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil

LUISA RUIZ HIGUERAS

## Contenidos

*No hay placer en aprender sin el placer del sentido.*

NICOLAS ROUCHE[1]

## 1.1. Introducción

Los profesores de cualquier ámbito educativo, desde los que trabajan en la Escuela Infantil hasta aquellos que lo hacen en cursos superiores, ponen en funcionamiento, casi sin pretenderlo de modo implícito, una serie compleja de ideas sobre qué significa aprender matemáticas y cómo pueden ayudar a sus alumnos en este proceso. Estas ideas, construidas a lo largo de su actividad docente gracias a la experiencia y a la reflexión, constituyen su concepción personal del aprendizaje y de la enseñanza. En la mayoría de las ocasiones, su propia «teoría» actúa como único referente para la toma de decisiones.

En la Escuela Infantil, por ejemplo, un profesor puede creer que si lleva a cabo explicaciones de modo detallado y exhaustivo, sus alumnos, al escucharlo atentamente, interiorizarán su explicación y asimilarán los contenidos matemáticos de su discurso: existe un saber objetivo que posee el maestro y aprender es apropiarse de él para poder reproducirlo con fidelidad. La repetida tarea de «cumplimentar fichas», llevada a cabo por muchos niños de Educación Infantil, es una muestra de esta opción docente. Esta es la forma tradicional de enseñar, basada en la transmisión de saberes ya establecidos, como forma de perpetuar la cultura matemática. Otro profesor, por el contrario, puede introducir directamente a sus alumnos en una serie de situaciones que generen verdaderos problemas matemáticos, esperará sus reacciones y observará sus estrategias de resolución, interviniendo de modo puntual y esporádico, no facilitará las soluciones a los problemas propuestos, sino que hará solamente sugerencias para que los alumnos trabajen por su cuenta. Estos modelos no son mutuamente excluyentes, aunque poseen características diferenciadas, de hecho coexisten y se complementan en la mayoría de los contextos escolares.

No obstante, como afirma Margolinas[2] (1993, p. 100), «para una amplia mayoría de personas, existe frecuentemente una confusión entre aprendizaje y enseñanza, el paso entre lo que el profesor dice y lo que comprende el alumno está considerado como despreciable».

---

[1] Rouche, N., en Bkouche, R. y col.: *Faire Mathématiques: le plaisir du sens*, Armad Colin, Paris, 1991, p. 244.

[2] Margolinas, C.: *De l'importance du vrai et de faux dans la classe de mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1993.

Antes de seguir adelante estudiaremos detenidamente dos ejemplos en los que se presentan dos secuencias de enseñanza diferentes para la Escuela Infantil. Su análisis persigue un objetivo inmediato: observar dos concepciones muy distintas de lo que significa para una profesora que sus alumnos «aprendan matemáticas» en este nivel educativo. Podremos observar cómo, en la primera secuencia de cada ejemplo, la profesora interviene como poseedora del saber matemático y los alumnos aplican los conocimientos y consignas que ella les da. Por el contrario, en la segunda, la maestra no menciona el «saber» en ningún momento, sino que pone a los alumnos ante una situación que les permitirá construir con sentido y funcionalidad un determinado conocimiento matemático.

### Ejemplo 1: Análisis de dos secuencias de enseñanza en la Escuela Infantil

**Objeto de enseñanza:** Relaciones espaciales: «Situación de los objetos en el espacio en relación con el propio cuerpo, de un mismo objeto con otros, de un objeto con otro» (DCB Nivel 4 años).

**1.ª Secuencia de enseñanza:**

La maestra muestra a los niños ostensivamente el significado de los términos: «delante de», «detrás de», «encima de», «debajo de», «sobre», «dentro de», «fuera de», «a la derecha de», «a la izquierda de», «hacia delante», «hacia atrás», etc.

Después, trata de poner en práctica lo que ha introducido previamente; para ello, formula a los niños/as frases, tales como:

– «El cuaderno está debajo de...».

– «La maceta está detrás de...»...

O bien, les indica:

– «Coloca esta cajita sobre la mesa de María».

– «Quiero que pongas este libro dentro del cajón que hay delante de la ventana»...

Una vez que los niños/as ejecutan estas tareas, el control de su validez se halla bajo la responsabilidad de la profesora. Debe indicarles si han *aplicado* correctamente los conocimientos que ella presentó previamente y, en caso de error, debe corregir las respuestas y dar a los niños la solución correcta.

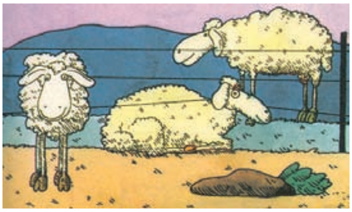
Posteriormente, les facilita unas fichas escolares como las que se presentan a continuación, indicándoles verbalmente las tareas que deben llevar a cabo en cada una de ellas:

*Tacha la niña que está arriba.*

*Tacha la niña que está abajo.*

*Continúa*

*Continuación*



*Tacha la oveja que está debajo de la cerca.*

*Pinta una flor a la derecha del pino y otra a la izquierda del manzano.*

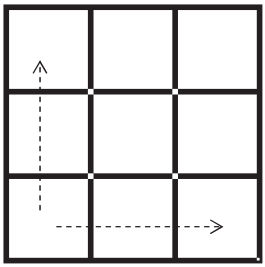
*Tacha el gatito que tiene la pata encima del balón.*

*Colorea los edificios que hay a la derecha de la calle. Dibuja un niño a la izquierda de la calle.*

**Objeto de enseñanza:** Relaciones espaciales: «Situación de los objetos en el espacio en relación con el propio cuerpo, de un mismo objeto con otros, de un objeto con otro» (DCB Nivel 4 años).

**2.ª Secuencia de enseñanza: «Recorridos sobre una malla»**

*1.ª fase: Desplazarse sobre una malla cuadriculada*



Se construye una malla cuadriculada (3 x 3) adhiriendo fixo negro al suelo de la clase. Sus dimensiones deben ser apropiadas para que los niños puedan desplazarse de un cuadrado a otro con un solo paso.

**Consigna para recorrer la malla:** Solo son válidos los desplazamientos que permiten pasar de un cuadrado a otro atravesando los lados sin pasar por las esquinas.

La maestra invita, inicialmente, a los niños a desplazarse sobre la malla llevando a cabo recorridos diferentes, pero respetando la consigna.

Coloca en la casilla 1-1 un muñeco y en la casilla 3-3 una flor. Pide a los niños: *«Debéis indicar al muñeco el camino para que pueda coger la flor»*.

Los niños, uno a uno, responden a la tarea propuesta, ejecutando personalmente el recorrido sobre la malla.

La maestra comienza un debate con los niños para descubrir diversos caminos, los adaptados a la consigna, los no adaptados, etc.

*Continúa*

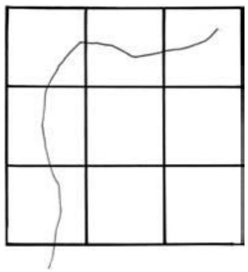
*Continuación*

*2.ª fase: Formular un mensaje*

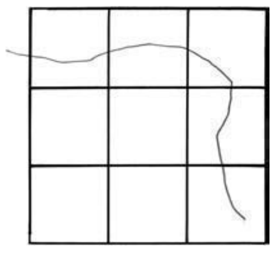
La maestra da a los niños una ficha en la que ha fotocopiado una malla (3x3) de tamaño (15 cm x 15 cm). Divide la clase en varios grupos para jugar entre ellos. Elige un niño/a de un grupo y le pide que haga un recorrido sobre la malla. Solo pueden visualizar este recorrido los niños de un mismo grupo. El resto de los grupos deben estar ubicados en un lugar de la clase, desde donde no puedan ver los desplazamientos sobre la malla (o simplemente la maestra les pide que se vuelvan de espalda).

**Consigna:** «Jesús va a hacer un recorrido sobre la malla. Los niños de su grupo debéis ayudarle a "dibujar" este recorrido sobre la malla fotocopiada para que un niño de otro grupo (que no ha visto el camino recorrido por Jesús) pueda hacer el mismo trayecto interpretando vuestro dibujo».

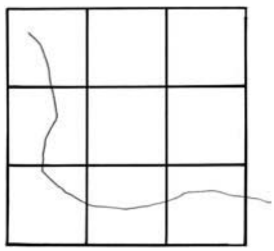
**Producciones de los niños:** Jesús produjo una «representación» correcta de su recorrido. Se la dio a otros niños para que, interpretándola, pudiesen hacer su mismo recorrido. Estos la manipularon y modificaron su posición, girando de modo inconsciente el papel que contenía el dibujo de la malla.



**A:** Producción de Jesús.



**B:** Producción de Jesús girada por los niños.



**C:** Producción de Jesús girada por los niños.

**Debate entre los niños:** Un grupo elige la representación B y su recorrido no coincide con el de Jesús. Otro grupo elige C y tampoco es válido. La posibilidad de seguir diferentes «caminos» provoca en los niños un fuerte desequilibrio, ya que no saben cómo seleccionar la posición correcta.

**Intervención de la profesora:** Debemos exigir a Jesús que nos dé más información para que podamos interpretar con toda seguridad su dibujo «a la primera».

Tras numerosos debates con la profesora y entre los propios niños, Jesús enriquece su dibujo:

**Nuevas producciones de los niños:**

Como podemos ver, Jesús ha necesitado incluir en la representación de su recorrido, además de la malla, la imagen de varios objetos de la clase: «arriba» la mesa de la profesora, «abajo» los archivadores, a un lado las perchas y al otro, la puerta.

Los niños que interpreten su «mensaje», ya saben que deben iniciar el recorrido colocándose «delante» de los archivadores y caminar dos pasos por los cuadraditos que están justo al lado de las perchas, luego deben dar dos pasos hacia la puerta de la clase.

Estas referencias han sido *necesarias* para resolver el problema de desplazamiento sobre la malla:

Tuvo que emplearlas Jesús para que el dibujo de su recorrido estuviese perfectamente determinado. Su interpretación ahora no ofrece dudas, por muchos giros que den los niños a su dibujo.

*Continúa*

*Continuación*

Otros niños realizaron diversos recorridos y los representaron «enriquecidos» con sistemas de referencia:


**Breve conclusión:**

Ante un mismo contenido del currículo de Educación Infantil:

«Situación de los objetos en el espacio en relación con el propio cuerpo, de un mismo objeto con otros, de un objeto con otro», hemos descrito dos secuencias de enseñanza muy diferentes.

En la primera, la profesora presenta previamente los conocimientos a los niños, para que estos, una vez que los han conocido e identificado, los **apliquen** en la resolución de diferentes tareas.

En la segunda, la profesora propone un problema donde los conocimientos son los medios, los útiles imprescindibles y necesarios para dar solución al problema: los niños *necesitan* construir sistemas de referencia para comunicarse, para desplazarse y llevar a cabo el «recorrido» correctamente.

La situación «Recorridos sobre una malla» provoca *adaptaciones* en los niños y permite la construcción de nuevos conocimientos mediante la modificación de la estrategia inicial. Estas adaptaciones del niño no son fruto de conocimientos adquiridos formalmente, sino *acomodaciones* que lleva a cabo el propio niño, verdaderas reorganizaciones internas de orden estructural y *asimilaciones*.

## Ejemplo 2: Análisis de dos secuencias de enseñanza en la Escuela Infantil

**1.ª Secuencia de enseñanza: Composición y descomposición de los primeros números**

*1.ª fase: La maestra facilita a los niños unas fichas impresas sobre las que van a llevar a cabo su tarea:*


Pide a los niños que cuenten los puntitos que aparecen dibujados en la ficha y ayúdales precisando:

«Tres más uno es igual a cuatro, ¿lo veis? Contad: uno, dos, tres y cuatro. Ahora, esto que hemos hecho lo vamos a escribir así:

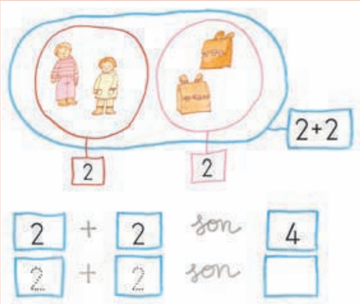
$3 + 1 = 4$.

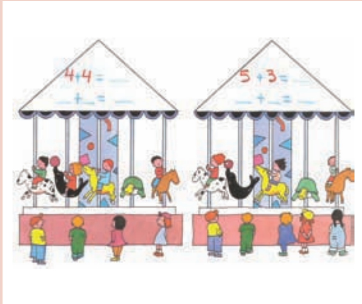
Rellenad los huecos que quedan así...».

*Continúa*

*Continuación*

Repite el proceso con otras fichas, tales como:




*2.ª fase:*

Se trata de poner en práctica lo que se ha introducido anteriormente; para ello, los niños han de completar igualdades como las propuestas en las fichas anteriores.

3 + 1 =
2 + 2 =
4 + 4 =
5 + 3 =

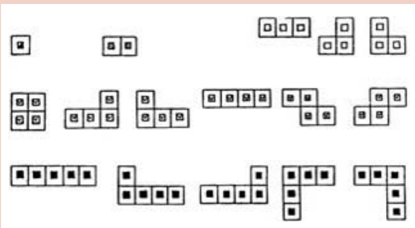
**Conocimientos que ponen en funcionamiento los niños:**

– Conteo de las colecciones de objetos dibujados en las fichas.
– Cardinación de colecciones.
– Escritura de los numerales en los «huecos» que aparecen en la ficha.
– Copiado «caligráfico» de las igualdades expresadas en la ficha.

**2.ª Secuencia de enseñanza: Composición, descomposición de los primeros números**

*1.ª fase: «Tantos como»*

La maestra pone a disposición de los niños un dado y una colección de numerosas piezas análogas a las que siguen:



Pide a los niños que, por turnos, tiren el dado y tomen una pieza de la colección que tenga «tantos cuadraditos como puntos indica el dado».

**Conocimientos y estrategias que ponen en funcionamiento los niños:**

– Coordinación de dos colecciones.
– Conservación de la cantidad de elementos de una colección, independientemente de su disposición espacial.
– Conteo de elementos de una colección.
– Cardinación de colecciones.

Cuando llevan varias jugadas, los niños comienzan a tener dificultades para encajar las piezas de mayor tamaño (4 o 5 cuadraditos). En este momento se produce un desequilibrio en el procedimiento «de base» empleado y surgen preguntas entre ellos: «¿Podemos cambiarlas por otras piezas?». La maestra les indica que pueden cambiar una pieza por varias, siempre que las que tomen tengan «tantos cuadraditos como la inicial», o bien «tantos cuadraditos como puntos obtenidos en el dado».

*Continúa*

*Continuación*

*2.ª fase: «Construcción de la gran ciudad»*

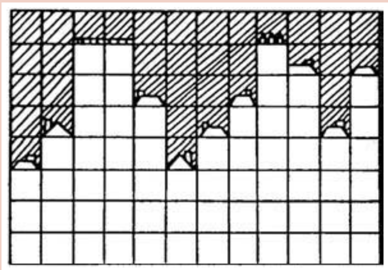
«Con todas las piezas que tenemos vamos a construir los edificios de una gran ciudad». En primer lugar, la maestra invita a los niños a colocar diferentes piezas sobre el panel para que comprueben cómo se van «construyendo» los edificios.

Divide la clase en grupos de 4 alumnos, anota sus nombres en una tabla:

| | | | |
|---|---|---|---|
| María | Pedro | Marta | Ana |

Ahora vamos a jugar:

«Tirad el dado y tomad una pieza que tenga tantos cuadraditos como el puntitos tenga dado, colocadla sobre un edificio de la ciudad. Cada vez que consigáis colocar correctamente una pieza, obtendréis un punto, que anotaremos en la tabla. Quien obtenga más puntos, cuando la ciudad esté totalmente construida, habrá ganado».

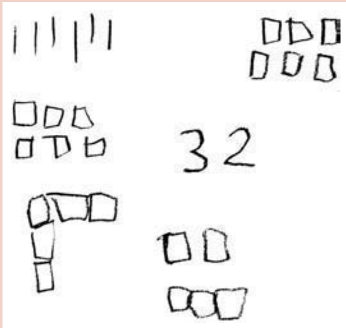


*3.ª fase: Elaboración de mensajes escritos*

La profesora hará de vendedora de las piezas y, una vez tirado el dado, según los puntos obtenidos, para poder «comprar» la pieza correspondiente, los niños deben escribir un *mensaje* en el que indiquen el número de cuadraditos de dicha pieza.

Los niños proceden generalmente del siguiente modo: Si obtienen 5 puntos en el dado, eligen una pieza de 5 cuadraditos. Si no la pueden encajar en un edificio de la ciudad, sobre ella van colocando otras piezas de dimensión 2, 2 y 1; o bien, 2 y 3, etc. Si al tratar de encajarlas en el edificio de la ciudad, vuelven a tener dificultades, las van cambiando hasta llegar a descomposiciones del tipo: 1, 1, 1, 1 y 1.

Los mensajes escritos por los niños son del tipo:




Los niños construyen mensajes perfectamente adaptados a la situación, aunque sin referencia a la escritura convencional, y mensajes próximos a la escritura convencional (con ausencia de los signos + e =, que deberán ser, posteriormente, institucionalizados por la profesora).

La profesora ha propuesto aquí un problema donde los conocimientos que se van a aprender son los medios, los útiles imprescindibles y necesarios para dar solución al problema: los niños *necesitan* descomponer las piezas para pavimentar los edificios.

Como en la 2.ª secuencia del ejemplo 1, esta situación también provoca *adaptaciones* en los niños y permite la construcción de nuevos conocimientos mediante la modificación de la estrategia inicial. Las adaptaciones que sufren los niños no son fruto de conocimientos adquiridos formalmente, sino *acomodaciones*, verdaderas reorganizaciones internas de orden estructural y *asimilaciones*.

El objetivo que nos proponemos conseguir en este tema es estudiar el aprendizaje matemático de los alumnos de Educación Infantil en situación escolar; para ello nos aproximaremos a modelos teóricos que nos facilitarán su comprensión, a la vez que nos suministrarán herramientas de análisis didáctico esenciales para identificar y explicar fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje en este nivel educativo.

Nos ayudaremos con ejemplos y actividades propias de la Escuela Infantil para entender la modelización teórica introducida. Debemos señalar que también propondremos algunas actividades que provoquen un verdadero «problema matemático» en el lector. Solo así comprenderá la significación del marco teórico que justifica las propuestas didácticas que presentamos.

## 1.2. Objetivos

– Estudiar y analizar el proceso de aprendizaje matemático de los alumnos en situación escolar.

– Analizar la especificidad y significación del «saber» matemático en el proceso de aprendizaje.

– Estudiar modelos teóricos de aprendizaje con objeto de utilizarlos como un conjunto de principios que explican el fenómeno del aprendizaje matemático.

– Estudiar la especificidad del modelo de aprendizaje matemático «por adaptación al medio».

– Determinar y gestionar las variables didácticas en una situación de enseñanza-aprendizaje, con objeto de provocar desequilibrios y nuevos aprendizajes en los alumnos.

– Analizar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, investigar sus causas, determinar los posibles obstáculos y reconocer su origen: epistemológico, didáctico, ontogenético.

– Realizar análisis didácticos a partir de ejemplos y actividades escolares propias de Educación Infantil para comprender y apreciar la pertinencia de los contenidos teóricos de este capítulo en la formación de profesorado de este nivel.

## 1.3. La especificidad y la significación del saber matemático en el aprendizaje

En este capítulo nos interesaremos de modo especial por el alumno[3] como sujeto cognitivo que ha de aprender significativamente el saber matemático en una institución determinada de enseñanza: la Escuela Infantil.

Esto nos conducirá a tratar de dar respuesta a cuestiones tales como:

• ¿En qué modelos de aprendizaje se sustenta la enseñanza de la matemática escolar?

[3] A lo largo del tema, emplearemos también la reducción del término alumno al término *sujeto* como proyección de la persona en su dimensión cognitiva.

- ¿Cuáles son las características de estos modelos?
- ¿Qué modelo de aprendizaje permite a los alumnos construir con sentido y funcionalidad los conocimientos matemáticos?

Dado que nos ubicamos explícitamente en la institución escolar, debemos señalar dos importantes restricciones que la distinguen de entrada de otros contextos designados como de aprendizaje natural (como la familia o la sociedad):

- Una restricción *temporal*: el aprendizaje debe llevarse a cabo en un tiempo determinado fijado por la institución y aprobado legalmente.
- Una restricción *epistemológica*: el conocimiento adquirido por medio del aprendizaje escolar debe ajustarse a un saber de referencia: el saber matemático (Balacheff, 1996, p. 215)[4].

Por ello, no podemos considerar que el proceso de aprendizaje en matemáticas sea supuesto análogo al que se podría llevar a cabo en otros ámbitos de la Escuela Infantil (ámbito de expresión oral o escrita, expresión plástica, expresión musical, expresión corporal…), sino que depende del propio saber puesto en juego: la matemática. *La matemática es la esencia de todos los fenómenos didácticos.*

Antes de dar respuesta a las preguntas que hemos formulado anteriormente, debemos abordar una cuestión fundamental para la enseñanza de las matemáticas y, en consecuencia, para el aprendizaje matemático de los alumnos: ¿Qué es «saber matemáticas»?

Según Brousseau (1998)[5]: «Saber matemáticas» no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, es «ocuparse de problemas» que, en un sentido amplio, incluye tanto encontrar buenas preguntas como encontrar soluciones. Una buena reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática exige que este intervenga en dicha actividad, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están construidos conforme a la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad.

**Actividad 1:** A partir de las dos secuencias de enseñanza presentadas en el ejemplo 1, determine, dando razones que lo justifiquen, cuál de ellas se adapta mejor al modelo de «actividad matemática» descrito por Brousseau (1998).

[4] Balacheff, N.: «Conception, propieté su système sujet/milieu», en Noirfalise, R. (ed.): *Actes de l'Ecole d'ETE*, DIDIREM, Paris VII, 1996.

[5] Brousseau, G.: *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1998.

**Actividad 2:** A partir de las dos secuencias de enseñanza presentadas en el ejemplo 2, establezca las diferencias más significativas, en relación con el aprendizaje matemático que llevan a cabo los alumnos/as en cada una de ellas, justificando su respuesta.

Una vez esbozado muy brevemente qué es «saber matemáticas», es decir, en qué consiste la actividad matemática, podemos abordar los modelos de aprendizaje, con objeto de determinar el que mejor se adapta al aprendizaje de un saber específico: las matemáticas.

## 1.4. El aprendizaje de las Matemáticas: modelos

La gran mayoría de los trabajos de investigación que se llevan a cabo en el área de Didáctica de las Matemáticas versan sobre el aprendizaje matemático de los alumnos, esto muestra su enorme relevancia para este dominio de conocimiento científico.

Los modelos teóricos que presentaremos no tienen más objeto que servirnos como un conjunto de principios que explican el fenómeno del aprendizaje matemático, nos ofrecerán marcos de referencia para interpretar los comportamientos de los alumnos, así como las intervenciones y decisiones del profesor/a, permitiéndonos dar respuesta a la pregunta básica: ¿Cómo ocurre el aprendizaje matemático?

Para facilitar el estudio de los aspectos relacionados con el aprendizaje de los alumnos, se establece una relación de complementariedad entre la Didáctica de las Matemáticas y el dominio de la psicología, ya que «la aproximación psicológica es un instrumento indispensable para esclarecer el modelo del funcionamiento cognitivo del sujeto en relación con el saber y para poner así en entredicho las tesis empiristas que sustentan las prácticas de los enseñantes» (Ricco[6], 1995, p. 159).

Con el riesgo de simplificar los modelos teóricos de las diversas concepciones que existen sobre el aprendizaje matemático de los alumnos, nos centraremos en los dos modelos más relevantes: *empirismo* y *constructivismo*.

### 1.4.1. Empirismo

Esta concepción de aprendizaje se fundamenta en una concepción espontánea que está presente en la mayoría del profesorado: «El alumno aprende lo que

[6] Ricco, G.: «Psychologie cognitive et didactique des mathématiques», en Noirfalise, R. (Ed.): *Actes VIII Ecole d'ETE*, DIDIREM, Paris VII, 1995, p.159-174.

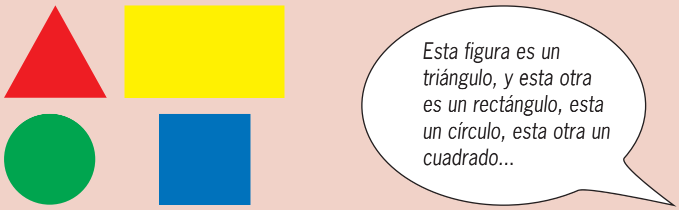
el profesor explica en clase y no aprende nada de aquello que no explica». Es una concepción que apenas se hace explícita, pero que está muy extendida entre los miembros de toda la comunidad educativa. Piaget la denominó «*empirista*»[7], basándose en la concepción filosófica del mismo nombre que sostiene que la experiencia es la única forma de conocimiento.

Bajo esta concepción, el discurso del maestro se *registra* en el alumno, a quien no se considera capaz de crear conocimientos. Su aprendizaje es considerado como un «transvase» de los saberes que le proporciona el maestro, se limita a recibir bien los contenidos. Así, el saber matemático, enunciado y explicado por el profesor, se *imprime* de un modo directo e inmediato en el alumno y, si existiese alguna intervención distinta de la palabra del profesor, los objetos matemáticos los «*verá*» o los «*tocará*». Como consecuencia, en este modelo existe un gran abuso de las presentaciones ostensivas en la enseñanza. «La ostensión es el procedimiento privilegiado para la introducción precoz de las nociones matemáticas» (Brousseau, 1994, p.112)[8]. Así, por ejemplo, en la Escuela Infantil las figuras geométricas tales como el triángulo, el círculo, el cuadrado, el rectángulo, etc., o bien las posiciones relativas de los objetos en el espacio, se presentan a los alumnos de forma ostensiva. Veamos los ejemplos 3 y 4.

**Ejemplo 3: Presentación ostensiva**

El profesor presenta todos los elementos constitutivos de estos objetos geométricos en un solo «golpe de imagen». Suele ser una práctica muy económica y útil en el trabajo docente, ya que los niños rápidamente las reconocen y aprenden a nombrarlas.

Ahora bien, en cursos posteriores, cuando sea necesario utilizar triángulos o rectángulos, si los alumnos solo conocen estas figuras por medio de estas imágenes ostensivas, únicamente habrán alcanzado un éxito ilusorio, ya que este modo de presentación impide la generalización y la abstracción.




[7] «Llamamos empirismo epistemológico a la doctrina según la cual todo conocimiento proviene de la experiencia externa o interna, experiencia concebida como una lectura o un registro de propiedades totalmente organizadas, bien sea en los objetos, bien en el sujeto» (Piaget, 1967, p. 37). Las dos corrientes filosóficas: empirismo y racionalismo y las teorías del aprendizaje (conductismo y cognitivismo) no coinciden exactamente; de cualquier forma, las teorías conductuales suelen ser en general empiristas, mientras que las teorías cognoscitivas incorporan posturas más racionalistas.

[8] Brousseau, G.: «La mémoire du système éducatif et la mémoire de l'enseignant», en *Documents pour la formation des professeurs d'école en Didactique des Mathématiques*, tomo III, COPIREM, Paris VII, 1994, pp. 101-115.

**Ejemplo 4**

Esta ficha de Educación Infantil tiene como objetivo que los niños aprendan nociones relativas a la posición espacial de los objetos:

*Atended bien: estos monos están* ***encima de*** *la barra y estos otros están* ***debajo de*** *la barra. En vuestra ficha, debéis tachar los monos que están encima de la barra.*

La imagen es el soporte que el profesor emplea para presentar ostensivamente las nociones de ***encima de*** y ***debajo de***.

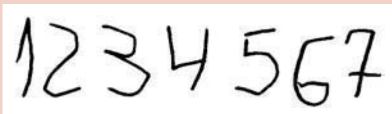


**Actividad 3:** Observe la presentación ostensiva que se hace de los numerales en estas fichas de Educación Infantil. Revise varios manuales escolares de este nivel educativo y determine otros objetos matemáticos que se presenten de forma ostensiva. Describa algunas características de estas presentaciones.

**Actividad 4:** A pesar de que el modelo empirista supone que «el alumno aprende lo que el profesor explica en clase y no aprende nada de aquello que no explica», los alumnos de Educación Infantil realizan múltiples aprendizajes *invisibles* que, en muchas ocasiones, les provocan errores persistentes. Veamos el ejemplo que sigue:

*Escribe en esta ficha el número de lápices que hay en tu mesa.*

Ante esta petición de la profesora, el niño/a contó correctamente los lápices, constató que había siete y escribió:




Indique algunas causas de este error.

**Actividad 5:** En la escolaridad obligatoria los alumnos también realizan múltiples aprendizajes *invisibles*, que en muchas ocasiones les provocan errores persistentes, tales como:

- Si $8 \cdot x = 0$, entonces $x = -8$.
- $(-4)(-6) = -10$
- Si divido un número **a** entre otro **b**, el cociente siempre será menor que **a**.
- El cuadrado de un número es siempre mayor que este número.

¿Puede citar algunas causas de estos errores?

En el ideal empirista, profesor y alumno no deben equivocarse: el error está relacionado con el fracaso, le impide llegar al éxito en su tarea. Por ello, los errores pueden crear malos hábitos en los alumnos, pueden ocupar el lugar de la respuesta correcta. Las causas del error las suelen plantear los maestros en términos de lagunas, faltas, nociones parcialmente asimiladas. Conviene, pues, que el alumno tenga pocas ocasiones de encontrase con el error. «Se intenta hacer una especie de barrera al error. Aceptar los errores para canalizarlos y posteriormente evacuarlos pondría en duda de forma profunda el sistema de enseñanza» (Margolinas, 1993, p. 179)[9].

En esta hipótesis, la enseñanza ideal consistirá en un «curso» donde el maestro no cometa ningún error, seguido de preguntas o tareas donde el alumno tenga la ocasión de responder correctamente, constatando, de este modo, que ha comprendido perfectamente. Sin embargo, si aceptamos que para «hacer matemáticas», el alumno debe resolver problemas, debemos considerar normal que conviva con la incertidumbre: el desconcierto, la duda y los tanteos están en el corazón mismo del aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos deben superar muchas dificultades, pero sobre todo muchos errores. El profesorado tiene que entenderlos como algo necesario porque solo si los detectan y son conscientes de su origen pondrán medios para superarlos. «Quien practica la ciencia sabe bien que su fuerza no proviene de ninguna infalibilidad intrínseca, sino bien al contrario de su capacidad de autocorrección incesante» (Levy, citado en Margolinas, 1993, p. 170)[10].

## 1.4.2. Constructivismo

Todos sabemos que muchos conocimientos pueden transmitirse de una generación a otra sin mucho esfuerzo, sin apenas ser conscientes de su adquisición, co-

[9] Margolinas, C.: *Ibidem*, 1993.
[10] Margolinas, C.: *Ibidem*, 1993.

mo si nos impregnáramos de ellos, por simple imitación, mientras que para otros hemos necesitado una verdadera construcción y una determinada y decidida intención de aprender. Considerar que el aprendizaje de ciertos conocimientos supone una actividad propia del sujeto es aproximarse a la corriente constructivista.

En los últimos años hemos estado inmersos en el desarrollo y aplicación de la teoría constructivista. En todo su desarrollo existe una idea fundamental que la preside: *Aprender matemáticas significa construir matemáticas*. Las hipótesis fundamentales sobre las que se apoya esta teoría, extraídas de la psicología genética y de la psicología social, las podemos resumir así:

**1.ª Hipótesis:** *El aprendizaje se apoya en la acción*. Idea fundamental en la obra de Piaget: «Es de la acción de la que procede el pensamiento en su mecanismo esencial, constituido por el sistema de operaciones lógicas y matemáticas» (Piaget, 1973, p. 26)[11].

Conviene señalar que el término «acción» se utiliza con mucha frecuencia en dominios pedagógicos y didácticos, asignándole el significado de «llevar a cabo manipulaciones» sobre determinados materiales. Sin embargo, el término «acción» en matemáticas va más allá, se trata de *anticipar* la acción concreta, es decir, de construir una solución que nos puede dispensar incluso del manejo de los objetos reales, bien sea porque los objetos no están disponibles, bien porque son demasiado numerosos y sería costosísima su manipulación. Las «acciones» a las que nos referimos en esta primera hipótesis, si bien pueden tener su origen en manipulaciones reales previas, que podría evocar mentalmente o incluso verbalmente el sujeto, no tienen necesidad de identificarse siempre con manipulaciones efectivas. En cualquier caso, la solución matemática (la acción matemática) se opone a la solución práctica (la acción sobre lo real): la acción sobre los objetos reales conduce frecuentemente a llevar a cabo una constatación, mientras que la acción matemática, incluso si no utiliza un procedimiento experto, se sitúa al nivel de una *anticipación.*

En la Escuela Infantil, necesariamente, los niños iniciarán la construcción del conocimiento matemático a través de *acciones* concretas y efectivas sobre objetos reales y probarán la validez o invalidez de sus procedimientos manipulando dichos objetos. Estas acciones le ayudarán a apropiarse de los problemas, a comprender la naturaleza de las cuestiones formuladas, a configurar una representación de la situación propuesta. Será también en este nivel donde comenzarán a *anticipar* resultados matemáticos relativos a situaciones ausentes o incluso no realizadas (simplemente evocadas), pero de las que disponen de ciertas informaciones. Constatarán que el conocimiento matemático les dispensará de llevar a cabo la acción concreta sobre los objetos reales.

[11] Piaget, J.: *Introduction à l'épistemologie genetique*, PUF, París, 1973.

Para comprender la significación de la noción de *anticipación* en la actividad matemática, presentamos la actividad 6 y los ejemplos[12] 3 y 4 sobre situaciones matemáticas propias de la Escuela Infantil.

**Actividad 6:**

Escriba los primeros números configurando una tabla del siguiente modo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | ... | |

Haga una pausa, en el número 25 por ejemplo, y, mientras observa la tabla, responda a las siguientes cuestiones:

- ¿En qué fila está el número 10?
- ¿En qué columna está el número 17?
- ¿En qué fila está el número 21?
- ¿En qué fila y en qué columna está el número 16?

Ahora, trata de responder a las cuestiones que siguen:

- ¿En qué fila y en qué columna estará el número 35?, ¿y el 40?, ¿y el 47?...
- Determina la fila y columna de los números: 473, 517, 2 358...

**Se pide:**

- ¿Es necesario llevar a cabo la construcción de la tabla anterior hasta el número 2 358 para determinar su ubicación correcta?
- ¿Puede, mediante operaciones matemáticas, anticipar el lugar que ocupa el número 847 357 sin necesidad de ubicar todos los números anteriores en la tabla?

Como podemos comprobar en la actividad anterior, cuando la estrategia de base se hace costosísima, nos vemos obligados a buscar otra más económica y mejor adaptada. Esta estrategia constituye el conocimiento matemático –objetivo de aprendizaje– de la situación de enseñanza. Cuando el alumno pasa de la estrategia de base a la nueva decimos que ha *construido* un nuevo conocimiento: ha llevado a cabo un aprendizaje. «El conocimiento debe manifestarse como instrumento de decisión anticipada» (Brousseau, 2000, p. 8)[13].

[12] Los ejemplos propuestos están basados en ERMEL (1991, pp. 137-140).

[13] Brousseau, G.: *Les grandeurs dans l'escolarité obligatoire*, Cour pour la XI Ecole d'Etè, Université Bordeaux 2, 2000.

**Ejemplo 5: Los números para «anticipar» (Nivel: Educación Infantil 5 años)**

**Situación: Pistas coloreadas**

**Objetivos:**

– Sumar números.

– Medir distancias entre los números en una pista numérica.

– Capacitar a los niños/as para que elaboren procedimientos expertos más económicos que les permitan «anticipar» por medio de cálculos numéricos, de memorización de resultados...

– Favorecer el abandono del procedimiento de «recuento» a favor del «sobreconteo» y de procedimientos de iniciación al cálculo.

**Material para cada alumno:** una pista numérica (numerada de 1 a 10), dos lápices de diferente color, un dado.

**Desarrollo:** cada niño lanza su dado y colorea sobre la pista el número de casillas indicado por el dado. Debe alternar los colores para delimitar los puntos obtenidos en cada jugada y evitar el procedimiento de «recuento». Gana el primero que supera los puntos necesarios para llegar a la casilla 10.




**Propuesta de cuestiones que puede formular el profesor en relación con:**

– **La descomposición de números:**

«María, tú has hecho tres jugadas, has llegado hasta el 9: ¿qué puntos obtuviste en el dado en cada jugada?».

– **La medida de una distancia:**

«Si has llegado a la casilla 6, ¿cuántos puntos deben salirte en el dado para que llegues a la casilla 10?».

– **La búsqueda de la casilla de partida:**

«Acabas de obtener un 4 en el dado y has coloreado en verde hasta la casilla 8, ¿cuál es el número de la última casilla que has coloreado de azul?».

*Continúa*

*Continuación*

**Anticipación:** Una vez que los alumnos han llevado a cabo con éxito las tareas anteriores con el soporte de la pista, el profesor les propondrá cuestiones sin este soporte, con el fin de favorecer la anticipación. El recurso a la pista permitirá a los alumnos validar sus respuestas.

**Cuestiones:**

– «Pedro, si hubieses llegado a la casilla 7 de la pista y en el dado obtuvieses un 2, ¿hasta dónde avanzarías?».

– «Ana ha llegado hasta la casilla 7 y Pedro hasta la casilla 3. ¿Cuántas casillas ha avanzado Ana más que Pedro?».

**Ejemplo 6: Los números para «anticipar» (Nivel: Educación Infantil 5 años)**

**Situación: Números-DIANA**[14]

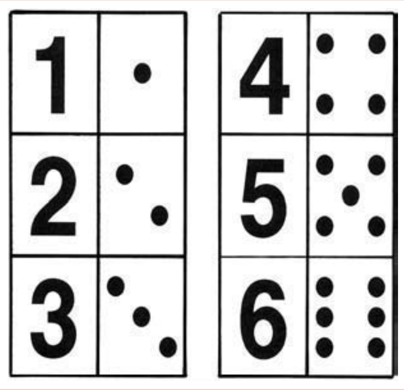
**Objetivos:**

– Concienciar a los alumnos de que es posible y útil prever los resultados de una acción sin necesidad de realizarla.

– Conseguir que los alumnos construyan estrategias de anticipación.

– Utilizar y mejorar los procedimientos de iniciación al cálculo mental (sobrecontar, descontar, memorizar la composición y descomposición de pequeños números, etc.).

– Hacer hipótesis, generar ensayos, ajustar estrategias, etc.




**Material:** baraja de cartas (del 1 al 6). Cada carta tiene por una cara una cifra y por la otra puntos (el modelo adjunto presenta las dos caras de cada carta). Son necesarios muchos ejemplares de cada una de las cartas.

**Desarrollo:** se propone un número determinado a los jugadores, por ejemplo, el 10. Este será el número-diana. Hay que conseguir llegar a formarlo pidiendo una carta en varios turnos (por ejemplo, tres).

El profesor hace grupos de cuatro niños y coloca las cartas delante de ellos de modo que solo se vean las cifras.

Cada niño del grupo juega, por turnos, tres veces. En cada turno elige una carta, de tal manera que, entre las tres sumen 10 (número-diana propuesto). Gana el niño que compone el número-diana con tres cartas. Los niños pueden validar autónomamente su elección, les basta con volver las cartas y contar los puntos.

*Continúa*

[14] Adaptación de la situación propuesta en Ermel (1991, p. 143).

*Continuación*

**Procedimientos de los alumnos:**

– Elegir las cartas al azar, sin ningún tipo de control.

– Hacer grupos con los dedos de la mano:

«Yo puse 10 con mis dedos, primero dije 4, luego 2 y después 4».

– Anticipar cálculos:

«Yo sabía que 5 y 5 son 10, pero como había que jugar tres vueltas, primero dije 5, y luego 4 y después 1».

«Yo sabía que 5 y 5 son 10, pero como había que jugar tres vueltas, primero dije 5, y luego 3 y después 2».

– Elegir las cartas de tal manera que solo en dos vueltas haya conseguido formar el número-diana propuesto: «Yo sabía que 5 y 5 son 10» (no es correcto, según la consigna establecida, es necesario conseguir tres sumandos).

– Otros.

Margolinas (1993)[15] asegura que una de las funciones de las matemáticas es la de permitir la *anticipación* de los resultados de una acción. El término «anticipación» comporta un doble sentido: la predicción y la garantía de validez de esta predicción. Basta revisar la actividad 6 para constatar que los conocimientos matemáticos nos dan la capacidad de construir una solución de tipo intelectual que excluye la acción efectiva sobre los objetos (en este caso, excluye la configuración total de la tabla).

El que se entienda la *acción* en el sentido de una verdadera *anticipación*, no quiere decir que, en la Escuela Infantil, se excluyan las manipulaciones, muy al contrario. Permiten a los alumnos, de entrada, *apropiarse del problema*, comprender la naturaleza de la cuestión, facilitan la construcción de representaciones que, posteriormente, en situaciones análogas, podrán formularse o evocarse mentalmente y permitirán llevar a cabo «acciones» en el sentido matemático del término: construcción de esquemas, cálculos, etc. Además, la manipulación es un medio con el cual los niños de este nivel pueden validar sus soluciones, confirmar sus anticipaciones sobre un determinado problema, verificar la pertinencia de una respuesta; aunque con el tiempo, en cursos superiores, sus conocimientos matemáticos le facilitarán llegar a constataciones que no precisarán hacerlas efectivas sobre los objetos reales.

**2.ª Hipótesis:** *La adquisición, organización e integración de los conocimientos del alumno pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, en el curso de los cuales los conocimientos anteriores se ponen en duda.*

[15] Margolinas, C.: *Ibidem*, 1993.

Si este desequilibrio es superado, esto implica que hay una reorganización de los conocimientos: los nuevos conocimientos se van integrando con los anteriores, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación. Se trata de aplicar el modelo facilitado por la teoría de la equilibración de Piaget.

> En el curso de la acción sobre un determinado medio, las contradicciones aparecen en el sujeto como producto de los desequilibrios, y debe modificar sus representaciones, se produce lo que Piaget ha denominado acomodación, que supone, básicamente, una modificación en el sujeto causada por el medio (perturbación). De manera recíproca, las transformaciones realizadas por el sujeto para dar respuesta a las perturbaciones modifican su organización del medio, produciéndose entonces un proceso de asimilación. El doble juego acomodación/asimilación está en el centro de los mecanismos de los procesos de equilibración.[16]

El aprendizaje, pues, no se reduce a una simple memorización, a una yuxtaposición de «saber-hacer» o a un condicionamiento, aprendemos raramente de una sola vez; aprender supone volver a empezar, extrañarse, repetir, pero repetir comprendiendo lo que se hace y por qué se hace.

Analizando detalladamente el ejemplo 7 observamos que, cuando los niños comparan sus producciones con el modelo y confirman que no coinciden, que han cometido errores, sufren un fuerte desequilibrio. Ahora bien, de esta constatación surgen las preguntas, las incertidumbres, la formulación de nuevas hipótesis, los debates entre los propios niños, y va emergiendo el conocimiento matemático. El error es, pues, necesario para producir desequilibrios. Si no hacemos emerger las estrategias de base erróneas y comprobamos su invalidez funcionalmente, no las rechazaremos nunca y volverán a manifestarse sistemáticamente.

En la situación de «*La casita*», los alumnos no hubiesen cometido errores si la consigna dada por la maestra hubiese sido: «Debéis decorar una casita como esta que aparece en el cartel. Lo pegaré en la pizarra para que todos lo veáis. Podéis usar las pegatinas de colores que hay en vuestras mesas». Los alumnos hubiesen «reproducido» el modelo y el éxito estaría asegurado. Ahora bien, no habrían puesto en funcionamiento significativamente ni el número ni la numeración.

El aprendizaje, bajo esta hipótesis, es un proceso de reconstrucción de un equilibrio entre el sujeto y el *medio* (situación-problema), por ello, la Didáctica de las Matemáticas se interesa en las perturbaciones provocadas deliberadamente en un determinado *medio* con intención de suscitar un aprendizaje.

---

[16] Chamorro, C.: *El aprendizaje significativo en el área de matemáticas*, Alhambra-Logman, Madrid, 1991, p. 58.

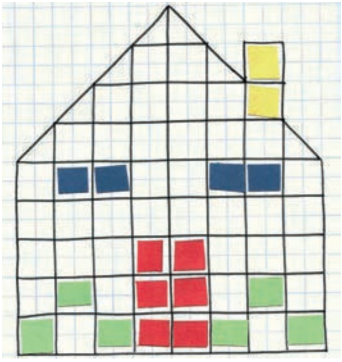
## Ejemplo 7: Desequilibrios cognitivos

Análisis de un situación de aprendizaje matemático en la Escuela Infantil (5 años)

**Objetivo:** Dotar de funcionalidad y sentido al número y a su designación (la numeración). Construir los aspectos relativos al número y la numeración como:

– «Memoria de la cantidad»: permite evocar una cantidad sin que esté presente (aspecto cardinal).

– «Memoria de la posición»: permite evocar el lugar de un objeto en una sucesión ordenada (aspecto ordinal).



**Material:**

– Un cartel con una casita decorada, según el modelo adjunto.

– Una ficha para cada niño/a con una casita, cuya cuadrícula estará sin decorar.

– Cajas que contienen pegatinas de colores.

**Consigna:** «Voy a poner en vuestra mesa una ficha que tiene una casita, cada niño/a debe decorarla de modo que quede exactamente igual que el modelo. En la mesa del profesor tenéis cajas que contienen pegatinas de colores. Debéis pedirme por escrito en un papel las pegatinas que necesitéis para completar vuestra casita, repito, justo las precisas, ni más ni menos».

Los niños necesariamente deben desplazarse para ver el cartel-modelo de la casita y poder construir sus mensajes, pero una vez que están en su mesa, no le es accesible a la vista.

**Producciones de los niños:**

**A. Mensajes** formulados para pedir las pegatinas:

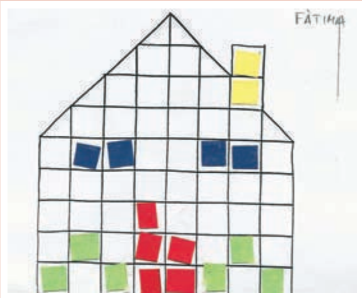
Los niños/as observan el cartel de la casita, formulan su mensaje, lo muestran a la maestra, esta lo lee y les da las pegatinas que piden.

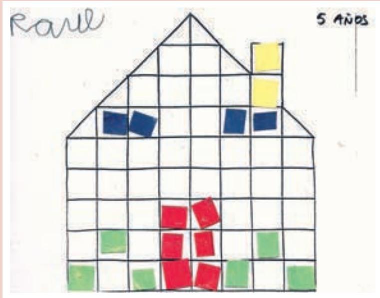


*Continúa*

*Continuación*

**B. Casitas construidas:**




**C. Validación** que llevan a cabo los niños de sus producciones:

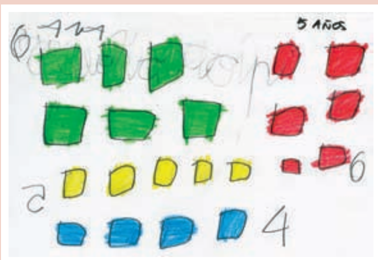
Cuando termina cada niño su casita, la maestra los invita a que comparen cada una de sus producciones con el cartel original. En el proceso de comparación van a obtener una «respuesta» del cartel-modelo. No necesitarán la reprobación del maestro, es la propia situación la que les responde sobre su acción: se trata de una situación que es *criterio* y *fuente* de aprendizaje.

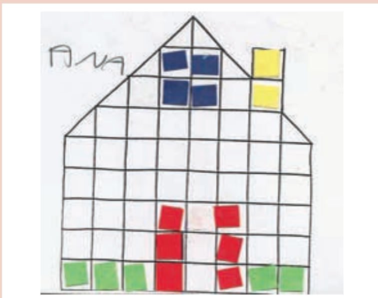
Tanto Fátima como Raquel sufrirán un desequilibrio cognitivo: no han construido sus casitas de acuerdo con el modelo. ¿En qué se han equivocado? ¿Deben modificar sus «mensajes»? ¿Deben modificar la posición de las pegatinas?

**Actividad 7:**

En la situación anterior, «La casita», Ana realizó las siguientes producciones:

– Formuló un mensaje para pedir sus pegatinas.
– Construyó su casita.




Determine las respuestas que puede obtener Ana del *medio* y los *desequilibrios* que le provocarán.

¿Qué conocimientos relativos al número y a su designación debe modificar?

Aspecto cardinal («memoria de la cantidad»).
Aspecto ordinal («memoria de la posición»).

**Actividad 8:** Determine los posibles desequilibrios que los alumnos pueden encontrar en la resolución del problema de «construcción de la gran ciudad» (ejemplo 2, 2.ª secuencia). ¿Qué respuestas obtienen del *medio*?

**3.ª Hipótesis:** *Se conoce en contra de los conocimientos anteriores.* Se trata de una idea fundamental de la epistemología de Bachelard[17] (1983) sobre el conocimiento científico, tomada por Brousseau para explicar la formación de **obstáculos** en el aprendizaje de las matemáticas: «La utilización y la destrucción de los conocimientos precedentes forman parte del acto de aprender» (Brousseau, 1998, p. 120)[18].

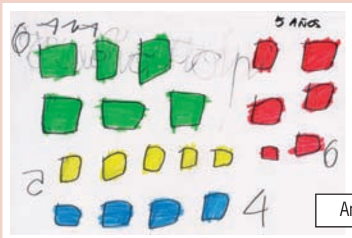
Los aprendizajes previos de los alumnos se deben tener en cuenta para construir nuevos conocimientos, ya que estos no se producen a partir de la nada, su elaboración está sometida a adaptaciones, rupturas y a reestructuraciones, a veces radicales, de los conocimientos anteriores. Aprendemos a partir de y también en contra de lo que ya sabemos. Los nuevos conocimientos no pueden hacerse más que modificando los precedentes y no por la simple acumulación de los últimos sobre los ya existentes.

En la Escuela Infantil, dado que los niños están comenzando su escolaridad, no han podido construir más que un dominio muy limitado de conocimientos matemáticos, no obstante, como veremos en el ejemplo que sigue, tienen conocimientos previos que se constituyen en verdaderos obstáculos.

**Ejemplo 8: La reproducción icónica analógica de los objetos como obstáculo a la numeración posicional decimal**

Recordamos la consigna que da la profesora a los niños en la situación de «La casita»: «Debéis pedirme por escrito en un papel las pegatinas que necesitéis para completar vuestra casita, repito, justo las precisas, ni más ni menos». Analizamos los mensajes que formularon los niños:


Raquel


Ana

*Continúa*

[17] Bachelard, G.: *La formación del espíritu científico*, Siglo XXI, Buenos Aires, 1983.
[18] Brousseau, G.: *Ibidem*, 1998.

*Continuación*

María

En estas producciones escritas observamos que:

– Raquel reproduce analógicamente las pegatinas.

– Ana reproduce analógicamente las pegatinas y añade el cardinal de cada una de las colecciones usando, además, las cifras de nuestro sistema de numeración.

– María expresa el cardinal de cada una de las colecciones de pegatinas usando las cifras de nuestro sistema de numeración, indicando, además, con toda precisión la propiedad característica de cada colección (su color).

Tanto para Raquel como para Ana la representación analógica de la colección se constituye en un obstáculo epistemológico para la numeración posicional.

**Ejemplo 9:**

Los errores cometidos por los alumnos en primaria, tales como:

– El siguiente de 1,78 es 1,79 porque 79 es el siguiente de 78.

– 2,6 es menor 2,358 porque $6 < 358$.

– $0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}6$ porque $0 \times 0 = 0$ y $2 \times 3 = 6$.

Son consecuencia de sus conocimientos previos sobre los números naturales. Los alumnos aplican al dominio de los números decimales propiedades válidas solo en N. Esto es debido a que consideran un número decimal como una pareja de números naturales separados por una coma.

Dado que la noción de obstáculo es de suma importancia para el aprendizaje de las matemáticas, más adelante, en este capítulo dedicaremos un apartado específico a su estudio.

**4.ª Hipótesis:** *Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición de conocimientos*. Idea básica de la psicología social apoyada en la obra de Vygotsky[19], quien consideraba preciso tener en cuenta lo que un individuo puede hacer con la ayuda de otros, ya que el aprendizaje se produce en un medio social en el que abundan las interacciones, tanto horizontales (niño-niño) como verticales (niño-adulto).

[19] Zona de Desarrollo Próxima (ZDP) es la distancia entre el nivel de desarrollo actual, que podemos determinar a través de la forma en que un niño resuelve sus problemas él solo, y el nivel de desarrollo potencial, tal como lo podemos determinar a través de la forma en la que un niño resuelve sus problemas cuando está asistido por un adulto o en colaboración con otros niños más avanzados (Vigotsky, 1978, p. 86, CIRADE, p. 153).

La eficacia de los conflictos sociocognitivos se justifica, según Blaye[20] (1994), puesto que:

– Permiten al alumno tomar conciencia de otras respuestas diferentes a la suya, lo que le obliga a descentrar su respuesta inicial.
– La necesidad de llevar a cabo regulaciones sociales, para llegar a un consenso, implica que el alumno sea más activo cognitivamente.
– La respuesta diferente de *los otros* es portadora de información y llama la atención del sujeto sobre aspectos de la tarea que no había considerado.

Así, los conflictos sociocognitivos provocan un doble desequilibrio: «desequilibrio interindividual, debido a las diferentes respuestas de los sujetos; desequilibrio intraindividual, debido a la toma de conciencia de respuestas diferentes, lo que invita al sujeto a dudar de su propia respuesta» (Guilly, 1994)[21].

La situación «Recorridos sobre una malla» (Ejemplo 1) pone en evidencia un conflicto sociocognitivo entre los niños que representan el recorrido y los que deben interpretarlo. Esto provoca que entre ellos surjan debates, se rechacen propuestas, se argumenten nuevas soluciones, etc.

Cabe señalar la función de mediador que, en los conflictos sociocognitivos, lleva a cabo el maestro mediante la gestión de las *puestas en común* de los alumnos. Si la situación propuesta en clase ha sido una situación abierta, de interacción con un medio, se espera que los alumnos se comprometan en procedimientos muy variados, será el momento de organizar el intercambio, el debate, la argumentación, la confrontación, la validación, etc.

Esta fase es primordial para el aprendizaje matemático, «poner en común es hacer público», y en ella el lenguaje, como medio de comunicación social, es primordial. El lenguaje permitirá a los alumnos estructurar la acción, apropiarse de significaciones nuevas, identificar nociones y procedimientos, y les abrirá vías para la prueba: la prueba es un acto social, se dirige a un individuo (eventualmente a uno mismo), al que es preciso convencer y requiere una expresión verbal (o escrita o, incluso, representativa). El lenguaje jugará una función determinante para la elucidación de sus conocimientos: es al tratar de responder a los «porqués» y a los «cómo» de los otros alumnos y del maestro cuando cada uno es capaz de volver sobre sus propias acciones, a describirlas,

[20] Blaye, A.: «Interacctions sociales et constructions cognitives», en Bernanz, N. y Garnier, C.: *Construction des savoirs*, CIRADE, Quebec, 1994, pp. 183-195.

[21] Guilly, M.: «À propos de la théorie du conflit socio-cognitif et des mecánismes psycho-socieux», en Bernanz, N. y Garnier, C.: *Construction des savoirs*, CIRADE, Quebec, 1994, pp. 162-183.

a defenderlas a tomar conciencia de su pertinencia y validez. Y, recíprocamente, es al interrogar sobre las soluciones aportadas por los otros cuando cada uno puede conocer un nuevo procedimiento, medir el grado de dominio adquirido, reconocer lo que no logra hacer solo, en suma, ampliar su campo de conocimientos.

## 1.5. Un modelo de aprendizaje constructivista en Matemáticas: el aprendizaje por adaptación al medio

Desde que se abandona el campo del empirismo, investigar los problemas del aprendizaje como resultado de la enseñanza resulta bastante difícil, ya que se trata de relacionar un *aprendiz*, un *profesor* y un *saber específico*, por lo tanto, hay que investigar en el interior de una teoría didáctica y no de una teoría psicológica.

Brousseau[22] entiende el aprendizaje por adaptación del siguiente modo: «El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, *fruto de la adaptación del alumno*, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje».

Esta concepción del aprendizaje[23] está en muchos aspectos muy próxima a la de Piaget: el alumno *construye* su propio conocimiento y *actúa* en un *medio* fuente de *desequilibrios*. Considera de singular relevancia la elaboración y el estudio del *medio*, de las situaciones que debemos proponer a los alumnos, que ellos puedan «*vivir*» y en las cuales los conocimientos matemáticos deben aparecer como la solución óptima a los problemas propuestos. Serán situaciones donde el alumno desarrolle un trabajo intelectual comparable, en algunos momentos, a la actividad científica, es decir, donde actúe, formule, pruebe y construya modelos de lenguaje, conceptos y teorías que intercambie con los demás, donde reconozca aquellos que están de acuerdo con la cultura y donde recoja aquellos que le son útiles y pertinentes. Son situaciones de *creación* y no de *redescubrimiento.*

---

22 Brousseau, G.: *Ibidem*, 1998, p. 59.

23 La teoría de situaciones de Brousseau (1986, 1998) trata de aproximarse, bajo un modelo teórico, al problema del aprendizaje de las matemáticas a través de un proceso de adaptación al medio. Por ello, proporciona herramientas muy potentes para interpretar los fenómenos específicos que se producen en la construcción de los conocimientos matemáticos.

**Actividad 9:** Situación: «La carrera del 20»:

Para vivir personalmente el proceso de aprendizaje por «adaptación al medio», proponemos la realización del siguiente juego con un compañero/a de clase:

Se lleva a cabo entre dos jugadores. El jugador que comienza debe decir el número 1 o bien el 2 y el contrincante debe decir un número 1 o 2 unidades mayor. Gana el jugador que dice 20 por primera vez.

Determine la estrategia ganadora.

¿Qué conocimiento matemático sustenta a la estrategia que permite ganar?

Bajo esta perspectiva, según Brousseau (1994)[24], *enseñar un conocimiento matemático* concreto es, en una primera aproximación, hacer posible que los alumnos desarrollen con dicho conocimiento una actividad de *creación* matemática en el sentido anterior. El profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los propios alumnos. La gestión de una enseñanza de las matemáticas que dé respuesta a este modelo de actividad matemática queda bajo la responsabilidad del profesor, y no es nada nuevo el afirmar que constituye uno de los más importantes problemas a los que se enfrenta la Didáctica de las Matemáticas.

En consecuencia, «el aprendizaje se considera como una modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el maestro solo debe provocar» (Brousseau, 1994, p. 66). Esta consideración del aprendizaje nos lleva a los siguientes razonamientos: para hacer funcionar un conocimiento en el alumno, el docente ha de buscar una situación apropiada. Para que sea una situación de aprendizaje es necesario que la respuesta inicial que el alumno dé a la pregunta planteada no sea la que queremos enseñarle: si ya fuese necesario poseer el conocimiento que se va a enseñar para poder responder, no se trataría de una situación de aprendizaje, sería de aplicación de conocimientos ya aprendidos, o de refuerzo de conocimientos anteriores. La «respuesta inicial» solo debe permitir al alumno utilizar una estrategia de base con la ayuda de sus conocimientos anteriores; pero muy pronto esta estrategia debe mostrarse lo suficientemente ineficaz como para que el alumno se vea obligado a realizar acomodaciones –es decir, modificaciones en su sistema de conocimientos– para

[24] Brousseau, G.: «Los diferentes roles del maestro», en Parra, C. y Saiz, I. (eds.): *Didáctica de las matemáticas*, Paidós, Buenos Aires, 1994, pp. 65-95.

responder a la situación propuesta. Esto lo hemos podido constatar por medio de los ejemplos que hemos analizado anteriormente.

El trabajo del docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio (situación-problema) y no a un deseo del maestro. Hay una gran diferencia entre adaptarse a un problema que plantea el medio, insoslayable, y adaptarse al deseo del docente. La significación del conocimiento es completamente diferente. Una situación de aprendizaje es una situación donde lo que se hace tiene carácter de necesidad, independientemente de la voluntad del maestro. La resolución del problema se vuelve entonces responsabilidad del alumno, que debe encargarse de obtener un resultado.

Desde esta perspectiva, el alumno aprenderá matemáticas, si:

– Entra en el problema haciéndolo suyo.

– Pone en funcionamiento una estrategia de «base» (que puede ser pesada y antieconómica, defectuosa...).

– Cuando la estrategia de base se hace insuficiente, trata de superar el desequilibrio y *anticipa* y emite hipótesis que le permitan:

- Elaborar procedimientos, ponerlos en funcionamiento, y según los efectos producidos, adoptarlos o modificarlos.
- Automatizar aquellos que sean solicitados con más frecuencia.
- Ejercer un control sobre los resultados.
- Construir con sentido un conocimiento matemático.

## 1.6. Aprendizaje y gestión de variables didácticas

Según acabamos de ver, se considera que el alumno «aprende» cuando modifica él mismo su relación con el conocimiento, adaptándose a las situaciones-problema que le presenta el profesor. Entre las elecciones que el profesor lleva a cabo en las situaciones de enseñanza, algunas de ellas van a ser fundamentales por la significación de los conocimientos matemáticos que espera que el alumno aprenda. Estas elecciones fundamentales se denominan *variables didácticas.*

> Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.)[25].

[25] Briand, J. y Chevalier, M. C.: *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Hatier, París, 1995, p. 68.

No podemos considerar que «todo» sea variable didáctica en una situación. Una variable didáctica es un elemento de la situación tal que, si actuamos sobre él, podemos provocar adaptaciones y aprendizajes. Veamos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 10: Determinación de variables didácticas. Enumeración[26] de colecciones**

**Situación: «Las cajitas de cerillas» (Nivel 3-4 años)**

Disponemos de una colección de cajas de cerillas en las que hemos hecho una ranura en un lateral. Pedimos a los niños que tomen cerillas de una cestita e introduzcan una y solo una en todas y cada una de las cajas.

**Objetivo:**

Desarrollar estrategias de enumeración de colecciones en los alumnos.

**Variables didácticas:**

La gestión adecuada de las variables didácticas permitirá al profesor provocar cambios en las estrategias de resolución que pondrán en funcionamiento los alumnos.

En esta situación podemos determinar las que siguen:

**$V_1$:** Posibilidad de que el niño pueda marcar o no con una señal las cajitas donde haya introducido una cerilla.

**$V_2$:** Posibilidad de desplazar o no las cajitas donde haya introducido una cerilla.

**$V_3$:** Tipo de configuración espacial que presentan las cajitas: alineadas, formando una tabla (3 x 4, 5 x 6, etc.), colocación arbitraria...

**$V_4$:** Número de cajitas de la colección (10, 15, 20, o más).

**$V_5$:** Naturaleza del espacio en el que se desarrolla la actividad: microespacio, mesoespacio o macroespacio.

**$V_6$:** Restricciones temporales: interrumpir la tarea en un momento determinado y volver a continuarla.

**Actividad 10:** Una profesora propone la situación de «Las cajitas de cerillas» a sus alumnos (4 años) y fija:

– El número de cajitas: 12.
– La posición espacial: colocación totalmente arbitraria (no alineadas, ni formando tabla).
– El tamaño del espacio: microespacio.
– La posibilidad de desplazamiento: los niños no pueden mover las cajitas de su lugar.

*Continúa*

[26] La enumeración de colecciones se estudia ampliamente en el capítulo 4 de este libro.

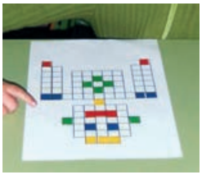
*Continuación*

Un niño, Mario, comienza a introducir una cerilla en cada cajita. Cuando aún no ha terminado su tarea, la profesora le dice: «Vas a interumpir tu trabajo, ahora seguirá Lola. Le debes comunicar por escrito a ella el estado de tu tarea: lo que ya has hecho y lo que te falta por hacer».

Determine posibles estrategias que Mario puede desarrollar para resolver el problema que le ha propuesto la profesora.

¿Cuál es la intencionalidad didáctica de la profesora al hacer esa petición a Mario?

## Ejemplo 11: Determinación de variables didácticas



**Situación: «El robot»**

**Material:**

– Un cartel con un robot según el modelo adjunto.

– Una ficha para cada alumno con un robot, cuya cuadrícula estará totalmente en blanco.

– Cajas que contienen pegatinas de colores.

**Consigna:** «Voy a poner en vuestra mesa una ficha que tiene un robot, cada niño debe terminarlo de modo que quede exactamente igual que el modelo. En la mesa del profesor tenéis cajas que contienen pegatinas de colores. Debéis pedirme por escrito, en un papel, las pegatinas que necesitéis para completarlo, repito, justo las precisas, ni más ni menos». El cartel del robot lo ubica sobre una mesa en un extremo de la clase. Los niños necesariamente deben desplazarse para verlo y poder construir sus mensajes, pero una vez que están en su mesa, no le es accesible a la vista.

**Objetivos:**

– Utilizar el número para medir una cantidad y producir una cantidad.

– Utilizar los números como instrumentos eficaces para memorizar una cantidad y una posición.

– Construir diferentes procedimientos de «cardinación» de colecciones.

– Construir el conteo como el procedimiento más eficaz y económico para la cardinación de colecciones.

– Construir «mensajes» para designar los números en una actividad de comunicación.

**Variables didácticas:**

– Número de cuadrados rellenos en el robot elegido en función de las competencias numéricas de los niños.

– Disposición espacial de los cuadrados rellenos.

– Número de viajes que pueden hacer los niños para pedir las pegatinas (varios viajes o solo uno).

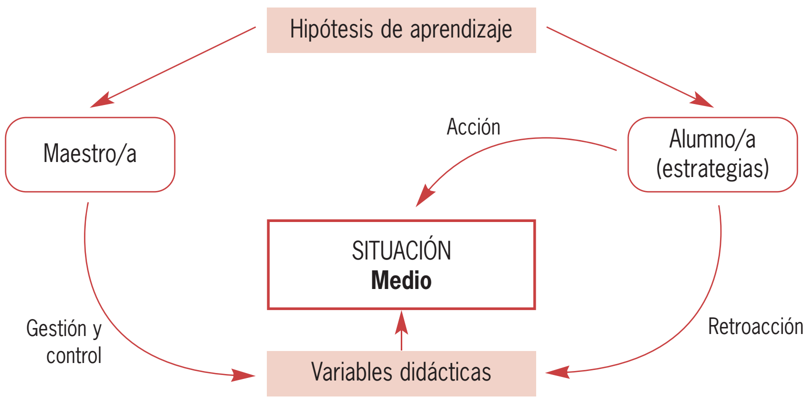
– Exigencia o no de escribir un mensaje para pedir las pegatinas a la profesora (se podrían pedir oralmente).

*Escribe un mensaje.*

*La maestra lee el mensaje y entrega las pegatinas.*

*Decora el robot con las pegatinas.*

El esquema siguiente muestra la conexión que debe existir entre las hipótesis de aprendizaje adoptadas por el maestro y la gestión que ha de ejercer sobre las variables didácticas de una situación de enseñanza.




**Ejemplo 12: Determinación de variables didácticas**

En el ejemplo 2, 2.ª secuencia de enseñanza, la maestra puede gestionar las siguientes *variables didácticas:*

– Elección y diseño de las piezas para la construcción de la gran ciudad.
– Posibilidad de tirar, a la vez, uno o más dados.
– Los puntos marcados en cada cara de los dados.
– La necesidad de escribir un mensaje para «comprar» las piezas, etc.

Una gestión adecuada de estas variables permitirá que los alumnos pasen de una estrategia de base: encontrar una pieza que tenga «tantos cuadraditos como puntos tiene el dado», a una nueva estrategia: «descomponer una colección dada en varias subcolecciones cuya unión sea coordinable con la inicial y, posteriormente, construir un mensaje en el que deban formular estas acciones».

Cuando el alumno pasa de la estrategia de base a la nueva, decimos que ha *construido* un nuevo conocimiento: ha llevado a cabo un aprendizaje. A diferencia de la 1.ª secuencia de enseñanza presentada en este ejemplo, en la segunda, la descomposición de los primeros números se construye en un contexto funcional: es necesario descomponerlos porque esto permite resolver un problema.

De todo lo anterior podemos deducir que la construcción de situaciones de enseñanza-aprendizaje en las que se determinen variables didácticas que, controladas por el profesor, permitan a los alumnos realizar elecciones y anticipaciones, tomar decisiones, llevar a cabo acciones, comunicaciones, etc., que, posteriormente, puedan probar y validar, es una tarea compleja, fruto de un serio análisis didáctico y de una elaborada *ingeniería didáctica*[27].

[27] Esta noción se estudia en el capítulo 2 de este libro.

**Actividad 11:** Determine las variables didácticas que puede gestionar el profesor en la situación descrita en:

**a.** Ejemplo 1 (secuencia 2.ª).
**b.** Ejemplo 2 (secuencia 2.ª).
**c.** Ejemplo 3.
**d.** Ejemplo 4.

Para cada una de ellas, establezca la dependencia que existe entre las elecciones del profesor y las estrategias de solución que pueden llevar a cabo los alumnos.

## 1.7. Errores y obstáculos en el aprendizaje matemático

Aunque la teoría sobre los obstáculos epistemológicos tiene sus raíces en la obra del filósofo y epistemólogo de la ciencia Bachelard (1983), la introducción de la noción de obstáculo en Didáctica de las Matemáticas se debe a Brousseau: «El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo»[28].

Se establece, pues, una estrecha conexión entre cierto tipo de errores y la constitución de obstáculos. Para comprender mejor la noción de obstáculo[29], sumamente importante en Didáctica de las Matemáticas, nos aproximaremos, en primer lugar, a los que son propios de los alumnos de la escuela primaria y, en segundo lugar, estudiaremos los que manifiestan los niños en la Escuela Infantil.

Veamos una serie de conocimientos que tienen los alumnos de primaria, basados en aprendizajes escolares, generalmente implícitos, que ponen en funcionamiento en sus tareas escolares:

– Todo número es siempre mayor que su mitad: la mitad de 24 es 12.

– Sumar dos números significa ir añadiendo al primero, una a una, todas la unidades que tiene el segundo: 35 más 7 es igual a 42 (36, 37, 38, 39, 40, 41 y 42).

[28] Brousseau, G.: *Ibidem*, 1998, p. 120.
[29] Dada su significación y pertinencia para la didáctica de las matemáticas, en el capítulo 2 de este libro, apartado 2.6, también se volverá a tratar esta noción como herramienta de análisis didáctico.

– El siguiente de un número es siempre una unidad mayor que él: el siguiente de 3453 es 3454.

– Para multiplicar a x b es necesario sumar **a** consigo mismo tantas veces como indica **b:** $7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$.

Estos conocimientos tienen un dominio de validez limitado: el conjunto de los números naturales; en este dominio, su empleo conduce a respuestas correctas, pero cuando los alumnos los aplican a otros dominios numéricos, como el de los números decimales o los números enteros, les provocan errores persistentes o inadaptaciones locales que conllevan fuertes pérdidas de sentido:

– «$\frac{1}{2}(-8) < (-8)$» ➔ error

– Sumar $2347 + 0{,}567 + \frac{2}{7}$ ➔ inadaptación

– «El siguiente de 1,6 es 1,7» ➔ error

– Multiplicar $2{,}75 \times 14{,}348$ ➔ inadaptación

Los caracteres esenciales que nos permiten identificar un obstáculo en los comportamientos de los alumnos son:

– Siempre se trata de un conocimiento, no de una ausencia de conocimiento.

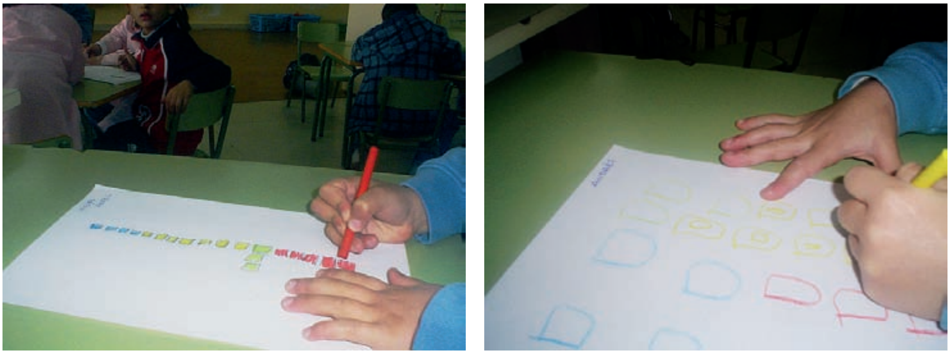
– Este conocimiento permite al alumno producir respuestas correctas en determinados dominios de problemas.

– Este mismo conocimiento engendra respuestas erróneas para ciertos campos de problemas.

– Los errores producidos no son esporádicos sino muy persistentes y resistentes a la corrección.

En el nivel de Educación Infantil, si bien el repertorio matemático de los alumnos aún es muy limitado, ya que disponen de pocos conocimientos matemáticos, también podemos identificar errores sistemáticos y persistentes cuyo origen está en un conocimiento anterior que se constituye en un obstáculo para otros conocimientos.

En el ejemplo 6, hemos podido observar cómo, en este nivel, muchos niños no suelen emplear, aun conociéndolos, los códigos de nuestro sistema de numeración para expresar la *medida* de colecciones. En sus mensajes, la gran mayoría se aferra a la representación icónica analógica de los objetos reales: dibujan *tantos* cuadraditos *como* pegatinas necesitan.



*Niños elaborando un mensaje para pedir las pegatinas necesarias para decorar la casita.*

Para ellos ofrece más garantía, más seguridad, esta representación, ya que existe una correspondencia biunívoca entre los objetos dibujados y los objetos reales, mientras que, en nuestro sistema de numeración, un solo código, por ejemplo, el 7, es la medida de una colección de siete objetos («representa» el cardinal de siete objetos a la vez). La representación icónica analógica, empleada como «medida» de colecciones, se constituirá en un obstáculo epistemológico para el uso de la numeración, ya que en este nivel es muy persistente su utilización y los niños se resisten a modificarla.

El origen de los obstáculos puede ser epistemológico, ontogenético y didáctico.

**Los *obstáculos de origen epistemológico*** están estrechamente ligados al saber matemático. La construcción del conocimiento matemático se enfrenta con ellos y se apoya en ellos. El proceso de aprendizaje que llevan a cabo los alumnos pasa por situaciones en las que, inevitablemente, se han de encontrar con ellos.

**Actividad 12:** A lo largo de la enseñanza obligatoria es muy frecuente que los alumnos cometan errores resistentes a la corrección, tales como:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8} \qquad (a+b)^2 = a^2 + b^2 \qquad 2^3 + 2^5 = 2^8$$

Identifique, para cada uno de ellos, el obstáculo epistemológico que los provoca.

**Los *obstáculos de origen ontogenético*** están ligados al desarrollo neurofisiológico de los sujetos. Los errores que cometen los alumnos de la Escuela Infantil, en torno a la conservación de las colecciones de objetos, son de este tipo.

**Colección A**

● ● ● ● ● ● ● ●

**Colección B**

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

**Colección A**

● ● ● ● ● ● ● ●

**Colección B**

○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○

Así, dadas las dos situaciones siguientes, alumnos de una determinada edad admiten perfectamente que, en la primera situación, las dos colecciones A y B tienen la misma cantidad de elementos, mientras que en la segunda, solo por tener la colección B sus elementos más expandidos, les conduce a afirmar que la cantidad de elementos de B es mayor que la de A. En este caso, la percepción espacial de la colección se impone a la lógica numérica. Se trata de errores cometidos por alumnos que están en un estadio del desarrollo cognitivo caracterizado por la falta de conservación de las cantidades.

**Ejemplo 13: Análisis didáctico de producciones de alumnos**

Un niño de Educación Infantil (5 años) produjo el siguiente mensaje para dar solución al problema presentado en la situación de «El robot»:


Si bien este niño no reprodujo analógicamente las pegatinas del robot, si utilizó una cifra como representante de cada una de ellas. Él no pedía 1 + 2 + 3 + 4 + 5 pegatinas rojas , quería recibir solo 5 pegatinas rojas. Este tipo de «mensajes» es muy frecuente encontrarlos en la Escuela Infantil. El conocimiento verbal y escrito de la *secuencia numérica* se constituyen en un obstáculo epistemológico para la cardinación correcta de colecciones por medio del conteo de sus elementos. Cuando el niño cardina una colección contando, va señalando sus objetos y, a la vez, diciendo: «uno, dos tres, cuatro y cinco»; y, en este momento, debe *pasar* de «el cinco» a «los cinco»: el tener cinco elementos es una propiedad de toda la colección, no del último elemento señalado. Una sola palabra, «cinco», un solo signo, «5», representa a toda la colección. En esta producción se muestra cómo este niño necesita cinco signos para representar cinco objetos, siete signos para representar siete objetos... uno para cada elemento de la colección.

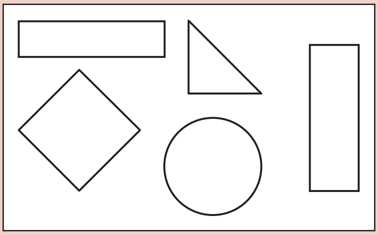
La producción de este niño también nos muestra la existencia de un obstáculo ontogenético: falta de maduración en la «inclusión jerárquica de clases».

Los ***obstáculos de origen didáctico*** son debidos a las decisiones que toma el profesor o el propio sistema educativo en relación con algunos conocimientos matemáticos. Por ejemplo, la presentación ostensiva que llevan a cabo los profesores de las figuras geométricas, desde la Escuela Infantil, a la que anteriormente nos hemos referido, constituye un verdadero obstáculo didáctico para los procesos de prueba y demostración en geometría que se han de llevar a cabo en cursos superiores. Los alumnos mantienen durante mucho tiempo una profunda confusión entre el simple dibujo que «muestra», que basta con mirar, y la construcción geométrica fundada en propiedades, proposiciones y teoremas geométricos.

**Actividad 13:** Dadas las siguientes tareas escolares (de diferentes niveles educativos), determine su diferencia, desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos que el alumno necesita movilizar para resolverlas:

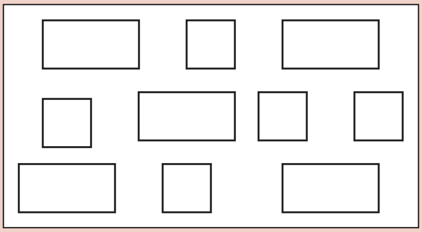
**Nivel Educación Infantil:**

**1.** Colorea los rectángulos:



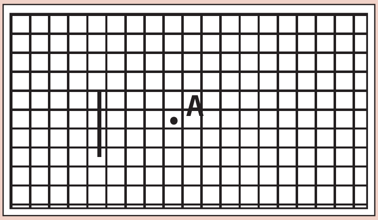
**Nivel Educación Infantil:**

**2.** Colorea los rectángulos de azul y los cuadrados de rojo:



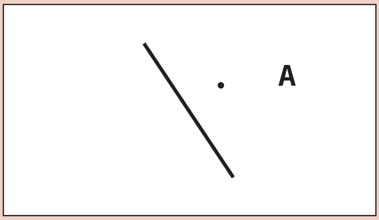
**Nivel Educación Primaria:**

**3.** Dado el lado **a** dibuja un rectángulo con centro en A:




**Nivel Educación Secundaria:**

**4.** Dado el lado **a** construye un rectángulo con centro en A:




– ¿Qué posibles estrategias podrán emplear los alumnos para resolverlas?

– ¿Qué conocimientos utilizados por los alumnos para resolver las tareas 1, 2 y 3 pueden constituirse en obstáculo para llevar a cabo correctamente la tarea 4?

**Ejemplo 14: La preponderancia de la representación microespacial como obstáculo didáctico**

En la Escuela Infantil, las representaciones de figuras geométricas, los dibujos, las producciones que implican tareas de codificación y escritura, las manipulaciones de objetos, etc., se organizan, normalmente, en el microespacio[30].

El microespacio es el espacio próximo al niño, contiene los objetos que le son muy accesibles, lo que le permite una alta densidad de información y la posibilidad de controlar empíricamente todas sus relaciones espaciales. Pero en el microespacio el niño no tiene necesidad de conceptualización, ya que lo real le es totalmente accesible con un golpe de vista. Esto le provocará que, en cursos superiores, tenga muchas dificultades y bloqueos en el aprendizaje de la geometría.

Por ello, debemos proponer a los niños, desde la Escuela Infantil, tareas que impliquen la representación y el control de relaciones espaciales en el mesoespacio o en el macroespacio. La situación presentada en el ejemplo 1, 2.ª secuencia de enseñanza: «Recorridos sobre una malla», muestra cómo proponer problemas que deban resolver los niños de la Escuela Infantil (4 años) en el mesoespacio.

**Ejemplo 15: Situación en el mesoespacio: Construcción de un rectángulo en el patio del colegio**

Para comprender mejor la significación del obstáculo didáctico anterior, proponemos una situación que se desarrolla en el mesoespacio. El trabajo escolar con este tipo de situaciones supone una «ruptura» con la preponderancia de las relaciones microespaciales en la Escuela Infantil y favorece la superación de este obstáculo didáctico.

*1.ª fase: Se desarrolla en el interior de la clase:*

Hoy vamos a trabajar con este banco alargado que tenemos en la clase. ¿Cuántas patas tiene? Los niños cuentan las patas y responden: «Cuatro». Vamos a señalar en el suelo con una tiza el punto que ocupa cada pata. Ahora, levantamos el banco y, con fixo negro, unimos los cuatro puntos, de modo que obtenemos una figura. Los niños constatan que es un rectángulo muy grande. La profesora formula cuestiones para que los niños debatan sobre las propiedades de un rectángulo.

Identifican otros objetos del aula que tienen forma rectangular y son de «gran tamaño»: la puerta, las ventanas, el tablero de la mesa de la profesora, la pizarra, etc.

*2.ª fase: Se desarrolla en el patio del colegio:*

Voy a señalar un punto en el pavimento del patio. Quiero que, tomando este punto como uno de sus vértices, construyáis un rectángulo exactamente igual al que hemos construido con fixo en la clase. De tal manera que, si trasladamos el banco de la clase y lo colocamos sobre él, sus patas deben quedar perfectamente ubicadas en cada uno de sus cuatro vértices.

*Continúa*

[30] Gálvez (1985) denomina *microespacio* al espacio de las interacciones ligadas a la manipulación de los objetos pequeños; *mesoespacio* al espacio de los desplazamientos del sujeto, es el espacio que contiene un inmueble, que puede ser recorrido por un sujeto, tanto en el interior como en el exterior; *macroespacio* al espacio para el que no puede el sujeto, con los medios normales, obtener una visión global simultánea (en él se consideran tres categorías: urbano, rural y marítimo). Gálvez, G.: *Aprendizaje de la orientación espacial en el espacio urbano. Una propuesta para la enseñanza de la geometría en la enseñanza primaria*, Tesis Doctoral, CINVESTAD, México, 1985.

*Continuación*

La profesora da a los niños un rollo de cuerda para que lo puedan usar en la resolución del problema.

Para poder construir este rectángulo en el pavimento del patio, los niños *necesitan* poner en funcionamiento, de forma *implícita*, conocimientos matemáticos que le permitan controlar, en el mesoespacio, las propiedades de esta figura: equivalencia entre las cantidades de longitud de sus lados, equivalencia entre la amplitud de sus ángulos, perpendicularidad, paralelismo, etc.

Estos conocimientos, posteriormente, en cursos superiores, podrán ser institucionalizados, pero en la resolución de esta situación, deben comenzar a emerger como soportes de las estrategias de base que emplean los niños.

En general, podemos afirmar que los obstáculos entran normalmente en el proceso de construcción del conocimiento matemático, es ilusorio querer evitar a toda costa los errores debidos a los obstáculos. Bien al contrario, los alumnos deben enfrentarse a ellos, superarlos y tomar conciencia de sus limitaciones. Para que esto sea posible el profesor debe necesariamente ponerlos ante situaciones donde interactúen con un medio que les provoque desequilibrios y retroacciones. En la Escuela Infantil, este *medio* está constituido por situaciones que permitan a los niños «jugar y trabajar para aprender». El diseño de estas situaciones no es una tarea trivial ni espontánea, sino que implica un serio trabajo de *ingeniería didáctica* ajustado a modelos teóricos que controlan su validez y pertinencia para el aprendizaje de las matemáticas.

## 1.8. Bibliografía

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. y GASCÓN, J.: *Estudiar Matemáticas*, ICE-Horsori, Barcelona, 1997.

BRIAND, J. y CHEVALIER, M. C.: *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Hatier, París, 1995.

ERMEL: *Apprentissages numériques*, Hatier, París, 1991.

MARTÍN, F.: *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle*, Scérén, CRDP Aquitaine, Bordeaux, 2003.

RUIZ HIGUERAS, L.: «Aprendizaje y Matemáticas», en Chamorro, C. (coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson. Prentice-Hall, Madrid, 2003, pp. 31-69.

CAPÍTULO 2

# Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas

M.ª del Carmen Chamorro

## Contenidos

## 2.1. Introducción

La escuela constituye una realidad compleja, en ella intervienen muchos elementos: algunos bajo el control de la propia institución escolar, otros del maestro, aunque muchos aspectos escapan a su control (programas, horarios, organización, etc.). Dentro de esa realidad compleja, afrontar la enseñanza de las Matemáticas en el nivel de la Educación Infantil es una tarea a la que el maestro no puede, ni debe, enfrentarse sin otras herramientas que la mera intuición o el recurso a sus experiencias y vivencias escolares, confiando en su *arte personal* para enseñar.

El elevado fracaso que se constata en el aprendizaje de las Matemáticas tiene raíces muy profundas y una pluralidad de causas de diferente naturaleza; raíces ligadas tanto a la dificultad y abstracción de algunos conceptos matemáticos como a la a menudo deficiente enseñanza en la escuela, que tiene mucho que ver con el frecuente desconocimiento de los procesos de aprendizaje de las Matemáticas y de sus técnicas específicas de enseñanza.

La mayoría de los conceptos que se enseñan en la escuela elemental, en particular los de la Escuela Infantil, son conocidos y dominados por cualquier ciudadano con una cultura media, de ahí la falsa idea de que toda persona, sin una formación específica, siempre que domine los conocimientos matemáticos correspondientes puede enseñar Matemáticas en la Escuela Infantil. Los que así piensan tienen una concepción sobre el aprendizaje de las Matemáticas que no se corresponden con lo que las investigaciones han probado sobradamente. Y así sabemos que los conceptos no se copian, se construyen en interacción con el medio, que todos los individuos no usan las mismas estrategias para aprender, que los errores no se corrigen simplemente porque el maestro los señale, que la repetición no lleva necesariamente a la comprensión, que los conceptos matemáticos no son independientes los unos de los otros, y que se encuentran formando campos conceptuales, etc.

Por otra parte, sabemos también que en la enseñanza de las Matemáticas se producen hechos y fenómenos que tienen una cierta regularidad y que son específicos de un conocimiento dado, por lo que deben ser conocidos por el futuro profesor, que ha de saber interpretar, reconocer y valorar dentro de su grupo específico de clase.

Si lo anterior es cierto, es necesario que el futuro profesor disponga, en tanto que profesional de la enseñanza, de herramientas y técnicas profesionales que le permitan abordar la enseñanza de las Matemáticas con cierta garantía, alejándole de la visión ingenua que muchos sectores de nuestra sociedad tienen de su enseñanza.

Todo profesional debe conocer el utillaje y la práctica de su oficio. Nadie en su sano juicio practicaría hoy una medicina intuitiva que no usara las técnicas y aparatos de diagnóstico disponibles, sería inmediatamente excluido de la profesión. ¿Puede un profesor desconocer los resultados más relevantes relativos al oficio de enseñar Matemáticas?

Tampoco se aprende a ser profesor imitando o copiando un modelo, no basta con observar a un buen profesor para aprender a ser profesor. Incluso para observar con provecho se necesita disponer de herramientas conceptuales, hay que saber qué observar y cómo, para superar visiones naturalistas del comportamiento del profesor y de los alumnos. El ojo del radiólogo ve lo que otros no ven en una radiografía, es un ojo entrenado que sabe lo que debe buscar. El maestro encuentra la interpretación de lo que pasa en el aula, por ejemplo, de los errores cometidos por los alumnos al resolver un problema, a partir de muchos conocimientos de los que dispone: el tipo de problema, la redacción y legibilidad del enunciado, los datos ausentes o sobrantes, el momento del curso, las operaciones que intervienen, los conceptos subyacentes, la historia de la clase y del alumno en particular, y con todo ello elabora un diagnóstico que va mucho más allá de un bien o un mal en un problema.

La Didáctica de las Matemáticas es, hoy en día, una disciplina científica que dispone de resultados sólidamente probados, de conceptos y herramientas de diagnóstico, análisis y tratamiento de los problemas que se presentan en el aprendizaje de las Matemáticas en el contexto escolar. El objetivo de este capítulo es proporcionar al futuro maestro algunos de estos conceptos, haciéndole ver su pertinencia y utilidad en relación con el trabajo que habrá de realizar en la escuela.

## 2.2. Objetivos

- Proporcionar al futuro profesor un marco teórico que le ayude a interpretar los hechos didácticos.
- Conocer las herramientas didácticas que ayudan a modelizar la realidad del aula.
- Identificar los fenómenos didácticos que son propios de la enseñanza de las Matemáticas.
- Aprender a diseñar situaciones a-didácticas, distinguiendo las de acción, formulación y validación.
- Comprender la importancia de la gestión de las variables didácticas en el diseño de las situaciones.
- Identificar el contrato didáctico imperante en las distintas actividades del área lógico-matemática.
- Conocer e identificar los distintos tipos de obstáculos.

## 2.3. La relación didáctica

No es posible concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje sin sus actores:

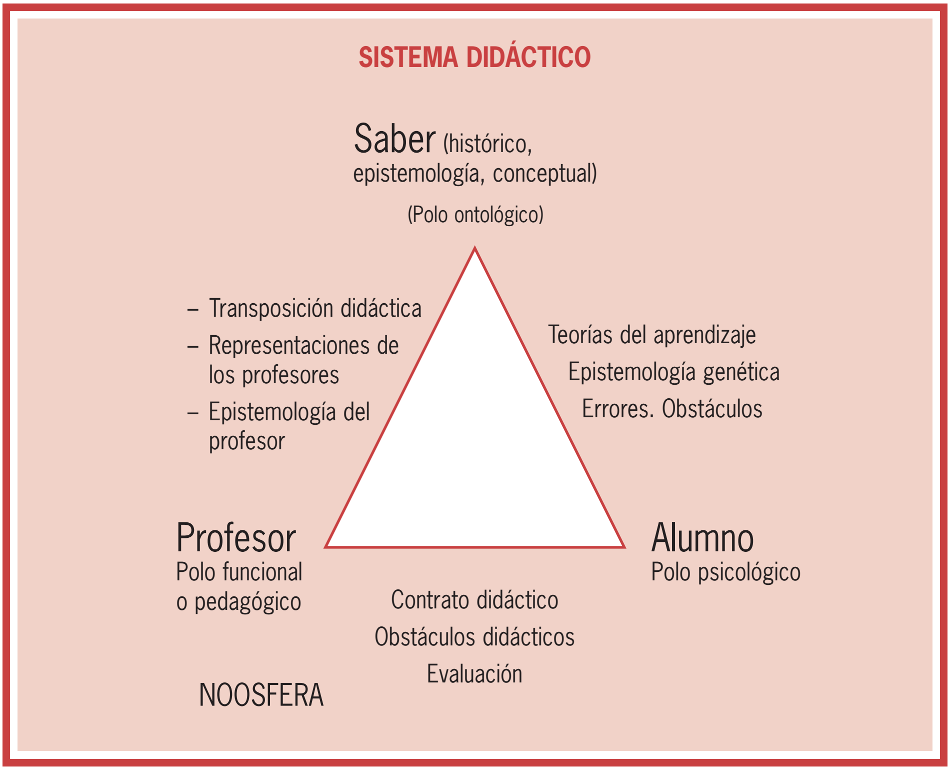
– *El alumno*, que debe aprender aquello que previamente ha sido establecido socialmente, según su edad, nivel y tipo de estudios, y que la institución escolar toma como proyecto que va a desarrollar.

– *El saber*, en este caso las matemáticas, que deben ser transmitidas como patrimonio a las nuevas generaciones, el objeto de aprendizaje.

– *El profesor*, encargado por la sociedad y la institución de llevar a cabo el proyecto de enseñanza, de hacer funcionar todo el sistema.

En el proceso de enseñanza se producen múltiples interacciones en el sistema didáctico entre estos tres polos. La Didáctica de las Matemáticas va a modelizar y estudiar las interacciones en los tres subsistemas: profesor-alumno, alumno-saber, profesor-saber.

A continuación se detallan algunos de los objetos de estudio de cada uno de esos subsistemas:



## 2.4. El aprendizaje a través de las situaciones didácticas. La ingeniería didáctica

En al capítulo anterior se ha indagado en los procesos propios de aprendizaje de las Matemáticas, caracterizando la construcción de los conceptos matemáticos. En particular, se ha visto que un concepto no puede ser aprendido a partir de una sola clase de situaciones, y que se requiere tratar todas aquellas situaciones en las que el concepto interviene, que son las que le dan sentido. El aprendizaje se produce por adaptación al medio y la situación juega el papel de medio con el que el alumno interactúa, de ahí la importancia de caracterizar y modelizar qué es y cómo funciona una situación didáctica.

La noción de situación didáctica va más allá de la idea de mera actividad práctica. Una situación busca que el alumno construya con sentido un conocimiento matemático, y nada mejor para ello que dicho conocimiento aparezca a los ojos del alumno como la solución óptima del problema que se va a resolver.

**SITUACIÓN FUNDAMENTAL PARA LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO CARDINAL**[1]

Tomemos como ejemplo una situación clásica para el aprendizaje de la noción de número: «El alumno debe traer el número necesario de cucharillas para todas y cada una de las tazas que hay en una mesa».

Si la situación no evoluciona de alguna manera, y solo el profesor puede hacerla evolucionar, el niño puede resolver la tarea haciendo uso únicamente de la correspondencia término a término: va al lugar en el que están las cucharillas y coge un montón. Si después de poner una cucharilla en cada taza le sobran, las devuelve, y si le faltan vuelve por más, y así hasta completar la tarea. Si lo que deseamos es que aparezcan estrategias más potentes, matemáticamente hablando, la situación debe modificarse, de manera que la estrategia de base empleada, la correspondencia biyectiva, fracase.

Imponemos ahora una nueva condición: *que se traigan en un solo viaje*. Ahora la correspondencia término a término puede permitir, ocasionalmente, al azar, resolver bien la tarea, pero en la gran mayoría de los casos va a provocar un fracaso: se traerán cucharillas de más o por el contrario faltarán, de manera que el alumno se ve obligado a

*Continúa*

[1] Cuando hablamos de situación fundamental nos referimos en realidad a una familia de situaciones a-didácticas que tienen elementos comunes: todas ellas requieren del uso del número para formar la colección requerida, bien en presencia de una primera colección, a la que debe ser equipotente: platos-tazas, tazas-cucharillas, garajes-coches, viajeros-asientos, muñecas-vestidos, etc., o bien en ausencia de la colección, de la que solo se conoce su cardinal: prever un cubierto para cada comensal sabiendo el número de comensales.

*Continuación*

buscar otro método que le permita ganar a la primera. Puede acudir, por ejemplo, a copiar la configuración espacial de las tazas y tratar de reproducirla con las cucharillas como si se tratara de un dibujo; si este fuera el caso, el maestro debe colocar las tazas de manera difícilmente copiable, obstaculizando que tal estrategia tenga éxito. Igualmente, si el número de tazas es muy pequeño y forma parte de las cantidades intuitivas (normalmente hasta 4, y más si se encuentran formando una configuración geométrica como en un dado. Su reconocimiento es de gran utilidad, por lo que debe comenzarse con cantidades pequeñas, hasta 5, para favorecer esa memorización), el alumno puede reconocer la cantidad sin necesidad de contar; en este caso bastará con aumentar el número de tazas para hacer fracasar esta estrategia.

Ahora, cualquier estrategia ganadora tiene que pasar inevitablemente por el conteo, por el uso del número, por el reconocimiento de que el número permite memorizar una cantidad en ausencia de esta. El alumno está en condiciones de descubrir que la única estrategia que es siempre ganadora es la que consiste en usar el número como memoria de la cantidad.

Si analizamos la situación anterior, podemos distinguir que ciertos cambios en la misma, que denominaremos *variables didácticas* (disposición de las tazas, posibilidad de desplazarlas para contarlas, cantidad de tazas, número de viajes), llevan aparejado en cada asignación de valor el cambio de estrategia por parte del alumno; además, la estrategia óptima coincide con el conocimiento que se quiere que el alumno construya, con el objeto de la situación: contar para memorizar una cantidad y poder reproducirla en su ausencia. Por otra parte, el alumno sabe, sin necesidad de la sanción del profesor, si el procedimiento usado es correcto o no, ya que la propia situación le informa sobre ello, hay una validación interna de la estrategia usada.

**Actividad 1:** Un *saber didácticamente invisible*, es decir, del que no se contempla la necesidad de enseñarlo, pero que resulta imprescindible para que el alumno aprenda a contar con éxito, es saber organizar materialmente la colección de objetos que debe ser contada, de manera que se pueda saber con certeza si un objeto ha sido ya contado o no.

¿Cómo influye esta variable en la situación anterior? Considerando esta variable, indique y diseñe la progresión de actividades que deberían llevarse a cabo para enseñar este aspecto del conteo.

Lo que vamos a denominar aprendizaje va a consistir, y va a mostrarse, en el cambio de *estrategia*, lo que implica el cambio de los conocimientos que le están asociados y la aparición de un conocimiento específico como resultado del cambio (en el ejemplo anterior, el paso de la correspondencia biyectiva al conteo). Este aprendizaje lleva aparejada una modificación de la relación con el conocimiento objeto de la relación por parte del alumno, que el maestro consigue mediante la gestión de las *variables didácticas* de la situación.

Una hipótesis didáctica importante es que un medio sin intenciones didácticas, es decir, no organizado expresamente para enseñar un saber, es insuficiente para inducir en el alumno los conocimientos que la sociedad desea que adquiera. Así, el enseñante debe producir las adaptaciones deseadas, y ello a través de la elección reflexiva y justificada de las situaciones didácticas a las que someterá al alumno, en las que este pueda construir su relación con el objeto de conocimiento, o bien modificarla, como respuesta a las exigencias del medio, y no como respuesta al deseo del enseñante explicitado en el contrato didáctico.

Las situaciones de este tipo reciben el nombre de *situaciones a-didácticas*, y vienen caracterizadas por el hecho de que las acciones del alumno tienen un carácter de necesidad en relación con el saber en juego, al margen de los presupuestos didácticos y la intencionalidad didáctica y de aprendizaje que el maestro les haya dado.

No toda situación didáctica es evidentemente a-didáctica. Las siguientes condiciones son indispensables para que la situación sea a-didáctica:

– El alumno debe poder entrever una respuesta al problema planteado.

– La estrategia de base debe mostrarse rápidamente como insuficiente.

– Debe existir un medio de validación de las estrategias.

– Debe existir incertidumbre por parte de alumno en las decisiones.

– El medio debe permitir retroacciones.

– La situación debe ser repetible.

– El conocimiento buscado debe aparecer como el necesario para pasar de la estrategia de base a la estrategia óptima.

Condiciones que el maestro debe verificar en lo que se llama el *análisis a priori* de la situación.

> En el ejemplo anterior, el niño tiene algún conocimiento con el que actuar, sabe emparejar y puede empezar usando este método para entrar en la situación, que conecta, por tanto, con sus conocimientos previos. La *estrategia de base*, la correspondencia, fracasa rápidamente en cuanto se impone la condición de un solo viaje, se muestra ineficaz e insuficiente. Cada estrategia probada es sancionada por las retroacciones de la situación, y el alumno sabe si la estrategia usada funciona o no, si bien no tiene certeza de ello hasta que no la pone en marcha (de lo contrario el alumno poseería ya los conocimientos objeto de aprendizaje de la situación). La situación es repetible, de manera que el alumno pueda hacer nuevos ensayos probando nuevas estrategias. El éxito se produce cada vez que el alumno usa la *estrategia óptima*, que es contar, estrategia demandada por la situación.

Desde el punto de vista del alumno, la situación es a-didáctica solo si él tiene conciencia de implicarse, no por razones ligadas al contrato didáctico, sino al razonamiento matemático únicamente. Lo que llamamos el *análisis a priori* de la situación pretende determinar si una situación puede ser vivida como a-didáctica por el alumno, buscando las condiciones necesarias para ello, y analizando si la situación puede desarrollarse y produce una relación matemática del alumno con su problema.

Una situación es «no didáctica» si nadie la ha organizado para permitir un aprendizaje, por ejemplo, un problema que aparece de forma natural en la vida profesional o familiar. En ella no hay maestro ni alumno.

Una situación didáctica es una situación que se lleva a cabo normalmente en la clase, entre un maestro y uno o varios alumnos, alrededor de un saber. En una situación didáctica las intenciones de enseñar y aprender se manifiestan públicamente; está regida por el contrato.

Es evidente que una situación no didáctica puede ser a la vez a-didáctica, pero una situación didáctica no tiene por qué ser vivida como a-didáctica, si bien el profesor de Matemáticas espera siempre alguna fase a-didáctica cuando plantea un problema de Matemáticas a sus alumnos, ya que espera que, al menos en parte, lo resuelvan como matemáticos.

Para que un alumno pueda percibir una situación como a-didáctica es necesario que haya una construcción epistemológica cognitiva intencional. El alumno es entonces el responsable de la resolución del problema que le plantea la situación, y a él le corresponde encontrar una solución. Se requiere pues que el alumno acepte el problema como *su* problema, que entre dentro de sus proyectos, y para ello no basta con comunicárselo. El alumno debe implicarse en la situación, entrar en el juego, y ello sin que le interese o le mueva lo que va a aprender con ella, lo que el maestro quiere que aprenda. La acción mediante la que el profesor busca esta aceptación por parte del alumno recibe el nombre de *devolución*. Los procesos de devolución tienen por objeto convertir el saber que se va a enseñar en conocimientos personalizados, contextualizados y temporalizados del alumno, y requieren que el profesor lo contextualice y lo personalice buscando problemas y situaciones que permitan al alumno construir el sentido de la noción objeto de enseñanza, de manera que su actividad se asemeje a la del matemático.

**Actividad 2:** Explique por qué en la situación descrita de las tazas y las cucharillas el conocimiento buscado, contar, tiene carácter de necesidad y no depende del contrato didáctico. ¿Por qué se produce la devolución en dicha situación?

¿Es a-didáctica, no didáctica, o ambas cosas la situación descrita?

Busque un ejemplo de una situación que sea a la vez a-didáctica y no didáctica.

### 2.4.1. Los distintos tipos de situaciones

Guy Brousseau, autor de la Teoría de Situaciones[2] establece una tipología de las situaciones didácticas, clasificándolas en situaciones de *acción*, *formulación y validación*, a las que añade posteriormente las de *institucionalización*, en un deseo de modelizar todas las posibilidades:

– El alumno se envía un mensaje a sí mismo (situación de acción) mediante los ensayos y errores que hace para resolver el problema.

La situación descrita de las tazas y las cucharillas es una situación de acción.

– El alumno intercambia información con uno o varios interlocutores. El maestro puede ser uno de ellos, los dos pueden ser alumnos o grupos de alumnos (situaciones de formulación).

– El alumno debe justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha, elaborar la verificación o prueba semántica que justifica el uso del modelo para tratar la situación (situaciones de validación). La eficacia de cada estrategia depende de la situación precisa, que puede resultar óptima en algunos casos e ineficaz en otros.

En la dialéctica de la acción, ligada a las situaciones del mismo nombre, el alumno formula, prevé y explica la situación, organizando sus estrategias con el fin de construir una representación de la situación que le sirva de modelo y le ayude a tomar decisiones. Las retroacciones proporcionadas por el medio funcionan como sanciones positivas o negativas de sus acciones, según el caso, lo que permite al sujeto adaptarlas a efectos de aceptar o rechazar una hipótesis, o escoger entre varias soluciones. Cada estrategia lleva asociados una serie de conocimientos específicos, diferentes en una y otra, y portadores en ocasiones de concepciones diferentes.

En las situaciones de formulación el alumno intercambia informaciones con una o varias personas, comunica lo que ha encontrado a su interlocutor o interlocutores, que a su vez le hacen llegar información. Esta comunicación de mensajes, muy específicos a veces, puede llevar aparejadas asimilaciones y también contradicciones. Las interacciones entre emisores y receptores pueden producirse a través de acciones y decisiones que no van acompañadas de un código o un lenguaje, o bien a través del lenguaje o de un código que las acompaña, que puede tratarse tan solo de un intercambio de juicios. El fracaso de un mensaje obliga al interlocutor a su revisión, y pone muchas veces en tela de juicio el procedimiento empleado para su obtención, de forma que la sanción en forma de fracaso reenvía a la revisión de la acción. Como resultado de la dialéctica de la formulación, los alumnos van a crear un modelo explícito que pueda ser formulado con ayuda de signos y reglas, conocidas o nuevas.

[2] Brousseau, G.: *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1994.

La situación que sigue, diseñada para trabajar con niños de 5-6 años, la pertinencia del número para comunicar una cantidad, es una *situación de comunicación o formulación:*

Los alumnos trabajan en grupos de dos. El alumno A recibe una colección de coches miniatura en una bolsa o caja. El alumno B es el vendedor de garajes, pequeños rectángulos de cartón del tamaño de los cochecitos.

Consigna: El alumno A debe enviar un mensaje escrito[3] a B, para que este le proporcione el número de garajes necesarios (que se encuentran en una caja situada al otro lado de la clase) para poder poner un coche encima de cada plaza sin que queden plazas vacías y sin que quede ningún coche sin plaza.

La variante en la que el alumno A va a buscar las plazas de garaje al día siguiente de haber recibido los coches, sirviéndose generalmente de un papel en el que ha tomado nota de lo que le parece relevante para poder recordar cuántos coches ha recibido, es una *situación de autocomunicación*, pues emisor y receptor son la misma persona.

Como puede verse en la situación anterior, las condiciones para que una situación de formulación funcione son:

– Que haya necesidad de comunicación entre alumnos cooperantes (hay que enviar un mensaje)[4].

– Que las posiciones de los alumnos sean asimétricas en lo que se refiere a los medios de acción sobre el medio o las informaciones (unos ven la colección de coches, otros no).

– Que el medio permita retroacciones para la acción, con el receptor del mensaje (los alumnos discuten sobre los mensajes, comprueban si los garajes aportados son suficientes para todos y cada uno de los coches, para lo cual van colocando los coches encima de las plazas de garaje; no necesitan al maestro para saber si el mensaje funciona).

[3] La naturaleza del mensaje es una variable que permite adaptar la situación a la edad de los niños. Así, un mensaje escrito no está al alcance de todos los niños de 4 años, que pueden, sin embargo, enviar un mensaje oral diciendo el número, o bien mostrando una configuración de dedos.

[4] Los primeros mensajes de los niños no son necesariamente numéricos. Así, comienzan por dibujar los coches en el papel del mensaje, guardando la mayor similitud posible con los modelos (dibujan las ruedas, el volante, etc.), para más adelante prescindir de los rasgos particulares y usar, por ejemplo, un rectángulo para cada coche, y más adelante una cruz o un trazo por cada coche. Solo después de muchos ensayos, y tras varios meses de trabajo, aparece el número y con ciertas peculiaridades; así, si suponemos que el niño ha recibido una colección de 6 coches, un primer mensaje es: 1, 2, 3, 4, 5, 6, mensaje que pone de manifiesto la dificultad para reconocer el principio de cardinalidad (ver 5.4.2.). El mensaje siguiente sería del tipo: 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, que permite ver que hay un reconocimiento claro de la cuotidad que se adelanta al principio de cardinalidad (ver 5.4.2.).

La validación tiene como objeto poner de manifiesto las pruebas empíricas o implícitas que han funcionado en el ámbito de la acción o con motivo de la formulación.

En una situación de validación el medio está organizado específicamente, de manera que el alumno debe hacer declaraciones que se someterán al juicio de su interlocutor; este debe protestar, rechazar una justificación que él considere falsa y a la vez probar sus afirmaciones. Los dos deben encontrarse en posiciones simétricas, tanto desde el punto de vista de la información como de los medios de retroacciones. La discusión no debe desligarse de la situación, para evitar así que el discurso se aleje de la lógica y la eficacia de las pruebas para caer por ejemplo en la autoridad de quien lo dice, el sofisma o la retórica[5]. Dice Brousseau a este respecto:

> En Matemáticas el «porqué» no puede ser aprendido solamente por referencia a la autoridad del adulto. La verdad no puede ser la conformidad a la regla, a la convención social, como lo «bello» o lo «bueno». Exige una adhesión, una convicción personal, una interiorización que por esencia no puede ser recibida de otro sin perder justamente su valor. Pensamos que empieza a construirse en una génesis, de la que Piaget ha mostrado lo esencial, pero que implica también relaciones específicas con el medio, en particular en la escolaridad. Consideramos pues, que hacer Matemáticas es, en primer lugar, para el niño, una actividad social y no únicamente individual.[6]

El maestro no tiene *a priori* la garantía de que la fase de validación va a conducir a los alumnos a conclusiones aceptables para él, de ahí que la situación de validación busque tan solo la garantía de que los alumnos tengan la oportunidad de entablar un proceso de pruebas.

De hecho, en situaciones como la de los coches y los garajes, cuando los alumnos fracasan, a veces es muy difícil que los niños sepan si el que lo ha hecho mal es A, que ha mandado un mensaje incorrecto, o B, que lo ha interpretado mal, por lo que a veces la cuestión se zanja sin saber quién ha cometido el error.

El interés de las situaciones de validación reside en que ponen en juego reglas de debate que tienen un estatuto paramatemático.

Para que haya una situación de validación se requiere:

– Que haya necesidad de comunicación entre alumnos oponentes (proponente y oponente).

[5] Los alumnos de Infantil y Primaria tienen tendencia a admitir como válidos resultados falsos que provienen de alumnos que gozan de prestigio, bien porque son considerados como buenos alumnos, o porque son líderes del grupo, de ahí la importancia de separar los procesos de validación del principio de autoridad, ya sea del maestro o de un alumno.

[6] Brousseau, G.: *Étude local des processus d'acquisition en situations scolaires*, Barcelona, 1976, p. 12.

– Que las posiciones de los alumnos sean simétricas en relación con los medios de acción sobre el medio y las informaciones.

– Que el medio permita retroacciones a través de la acción (mensajes), y con el juicio del interlocutor.

Las interacciones con el medio son los mensajes intercambiados: afirmaciones, teoremas, demostraciones, etc.

En la situación descrita, los alumnos tienen necesidad de verificar si el número de garajes aportados es suficiente y cumple las condiciones de la consigna. Unos tienen la colección inicial de coches, otros los garajes. La superposición de un coche, y solo uno, sobre cada plaza de garaje proporciona información sobre si el mensaje es o no válido, y estas retroacciones son suficientes para decidir sobre la validación, sin necesidad de recurrir a la autoridad del maestro o a cualquier otra.

**Actividad 3:** En la situación anterior, ¿qué papel juega el maestro en la validación?

Cuando el alumno ha encontrado la solución al problema planteado, desconoce que tal solución constituye un conocimiento matemático que puede ser reutilizado con éxito en otras situaciones y ocasiones (en el caso anterior el uso del número para comunicar una cantidad). Sus respuestas deben ser transformadas, mediante un proceso de redescontextualización y redespersonalización, para que esos conocimientos puedan ser convertidos en saberes, integrados y constitutivos del *saber que se va a enseñar*, reconociendo en ellos un saber cultural reutilizable, con un carácter universal. Estos procesos, que están bajo la responsabilidad del profesor, tienen como objeto cambiar el estatuto de los conocimientos y constituyen las llamadas *situaciones de institucionalización.*

### 2.4.2. La ingeniería didáctica

En todo caso, antes de enfrentar al alumno con una situación didáctica, el maestro debe realizar lo que se denomina el análisis *a priori* de la situación, que consiste en dar respuesta a ciertas preguntas, que buscan garantizar que la situación ha sido bien construida y que por tanto puede funcionar. Además, debe hacerse otras preguntas[7] para estar seguro de que no ha habido un deslizamiento epistemológico que banalice los conceptos, y que la situación permitirá al alumno la construcción del sentido.

[7] Tomadas de Legrand, M.: *Cours École d'été de Didactique des Mathématiques*, Saint Sauves, septiembre 1993.

– ¿Hasta dónde transformar el saber-sabio?
– ¿Qué adquisiciones previas del sujeto son necesarias?
– ¿Cuál es la naturaleza del saber adquirido?
– ¿Qué sentido toma para el alumno?
– ¿Le permite adaptarse a las situaciones?
– ¿Le permite resolver problemas?
– ¿Modifica su visión del mundo?

**Actividad 4:** Responder a las preguntas anteriores para la situación de los coches y los garajes.

Si las preguntas anteriores son siempre pertinentes, en el caso de la Educación Infantil son ciertamente vitales, pues la transposición didáctica que hay que hacer de los saberes matemáticos es muy compleja, y estamos acostumbrados a ver producciones poco rigurosas que, bajo la excusa de *simplificar las cosas*, dan como resultado final un saber banal, hasta el extremo de obtener cosas carentes de sentido desde el punto de vista matemático.

El diseño de situaciones didácticas según las condiciones que han sido enunciadas y analizadas, y la organización de las mismas en una progresión articulada en el tiempo, con vistas a enseñar un cierto concepto a una clase de alumnos de un determinado nivel, es el objeto de lo que se denomina *ingeniería didáctica*. Su nombre evoca la necesidad de controlar herramientas profesionales, al igual que el ingeniero, para producir secuencias de aprendizaje con ciertas garantías de éxito. Las herramientas necesarias son, entre otras: la epistemología e historia del saber matemático objeto de enseñanza, el conocimiento de la transposición didáctica clásica que se ha hecho de ese concepto, las concepciones de los alumnos sobre el concepto en cuestión, los obstáculos, errores y fenómenos didácticos conocidos, la epistemología genética, las relaciones que ese concepto mantiene con otros, etc. Como puede apreciarse, un abanico de útiles, nada triviales, que un profesional tiene que conocer y controlar para ser eficaz en su trabajo como enseñante.

La ingeniería didáctica permite construir lo que se denomina *génesis artificial de un saber*, que no necesariamente coincide con la génesis histórica del concepto tratado. En esta génesis artificial se busca el camino más rápido y seguro para que el alumno construya con sentido un concepto matemático, evitando los retrocesos y parones que históricamente hayan podido producirse, y reordenando los procesos de construcción de ese saber de acuerdo con pautas didácticas, haciendo su transposición didáctica de la manera más rigurosa posible, desde un punto de vista epistemológico.

Así, cuando enseñamos el sistema de numeración, buscamos una progresión de enseñanza que, tomando en consideración lo que nos dice la epistemología y la Historia de las Matemáticas, desemboque en el sistema de numeración decimal, sin por ello tener que pasar necesariamente por todos y cada uno de los tipos de numeración desarrollados a lo largo de los siglos: romana, griega, egipcia, maya, sumeria, babilónica, chino-japonesa, etc. La tendencia habitual es, por el contrario, ignorar todos estos prolegómenos y empezar directamente con la muy compleja numeración decimal. Ambas maneras de proceder serían erróneas, y lo que se busca con la génesis artificial del saber es una progresión didáctica equilibrada que tome en consideración las dos posiciones anteriores.

Los objetivos de las ingenierías didácticas pueden ser muy variados, destacando el estudio de los procesos de aprendizaje de un concepto determinado, la elaboración de génesis artificiales de un saber concreto o estudios de tipo transversal (por ejemplo, la resolución de problemas, el aprendizaje de la demostración, el debate científico, etc.). Se acostumbra también a hablar de micro y macroingenierías; el primer término hace referencia a estudios de tipo local, de amplitud limitada, mientras que el segundo se refiere a procesos de varios años de duración, que pueden englobar varios conceptos relacionados entre sí, que se interesan, por ejemplo, por la articulación de distintos conocimientos o estrategias globales de aprendizaje.

## 2.5. El contrato didáctico

A lo largo de este capítulo, ha venido deslizándose un concepto importante para comprender cómo se gesta el aprendizaje matemático en la institución escolar: el *contrato didáctico*. Experiencias sobradamente conocidas, como la edad del capitán[8], han puesto de manifiesto la necesidad de romper el contrato didáctico clásico, impuesto la mayoría de las veces de forma inconsciente por el uso, que rige una gran parte de las actividades escolares; según este contrato, el maestro enseña y el alumno copia la información para aprenderla; el maestro es el responsable del aprendizaje y el que tiene la facultad de enseñar; el maestro dice lo que está bien y lo que está mal, dice lo que hay que hacer, etc.; un contrato evidentemente insostenible si se pretende fundamentar el aprendizaje en modelos a-didácticos.

[8] Se propuso a 97 alumnos de 2.º y 3.º de Primaria el siguiente enunciado: «En un barco hay 26 cabras y 10 corderos. ¿Cuál es la edad del capitán?». De los 97 alumnos, 76 dieron la edad del capitán usando los datos del enunciado. La descripción y análisis de esta experiencia, puede encontrarse en Chamorro, M. C.: *El aprendizaje significativo en Matemáticas*, Alhambra-Longman, Madrid, 1991.

**Actividad 5:** Explicar en qué aspectos el contrato didáctico clásico es contradictorio con un aprendizaje a-didáctico.

Se designa con el nombre de *contrato didáctico* el conjunto de comportamientos específicos del maestro que son esperados por el alumno, y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro. El contrato didáctico fija cómo se organizan las responsabilidades recíprocas de unos y otros, así como su evolución a lo largo de la enseñanza. La parte del contrato didáctico que va a interesar a la Didáctica de las Matemáticas es la específica del conocimiento matemático que se busca, que va a permitir la negociación del sentido de las actividades en juego.

El alumno y el profesor ocupan posiciones asimétricas en la relación didáctica, fundamentalmente en relación con el saber. El profesor no solo sabe más que el alumno, sabe además de una forma diferente, *la topogénesis* y *la cronogénesis* de su saber son diferentes, y tiene la obligación de organizar las situaciones de enseñanza de la manera más adecuada para el alumno. El contrato didáctico distribuye papeles diferentes a unos y otros en el tratamiento de un objeto de saber dado.

La topogénesis del saber es diferente en alumno y profesor: el primero hace ejercicios, el segundo la teoría, uno está del lado de la *práctica*, el otro del lado del *sabe*r. El profesor sabe la relación que guardan unos objetos con otros, tiene poder de anticipación, puede decretar lo que es materia de enseñanza y lo que es antiguo y ya no lo es. Está, por una parte, lo que el maestro debe enseñar y cómo debe enseñarlo, y por otra, lo que el alumno debe saber y cómo debe saberlo.

El saber del profesor tiene una cronogénesis diferente a la del alumno; el profesor *sabe antes que los otros*, *lo sabe ya* y *sabe más*, y por ello puede conducir la cronogénesis del saber, insertando su saber dentro de una cronología didáctica diseñada al efecto, en tanto que el conocimiento del alumno se va construyendo a medida que avanza el tiempo en la relación didáctica.

La noción de contrato no solo es aplicable a una situación, puede extenderse a toda una serie de situaciones o a un nivel de enseñanza, en tanto que constituye un medio de partir el tiempo didáctico en sesiones. La noción de contrato didáctico es una de las aportaciones más importantes de Guy Brousseau a la Didáctica de las Matemáticas, pues esta noción permite un análisis muy fino en términos didácticos de los aprendizajes matemáticos en contexto escolar.

### 2.5.1. Los efectos producidos por disfuncionamientos del contrato didáctico

En todas las situaciones didácticas, el profesor trata de hacer saber al alumno lo que espera de él, lo que desea que haga, forma parte de las expectativas del contrato didáctico. Desde un punto de vista teórico, bastaría con que el profesor propusiese una situación específica del conocimiento buscado, que una consigna clara de la misma permitiese la comprensión y devolución de la situación al alumno, que entraría así en el juego buscando la resolución, lo que daría lugar al aprendizaje. Pero cuando el alumno no acepta esta devolución y rechaza o evita entrar en el problema, el maestro, cuya obligación social es que éste aprenda, hace aflorar una de las paradojas de la relación didáctica ligadas a la devolución: «El maestro no puede decir al alumno lo que es necesario que haga, sin embargo, es necesario que lo obtenga».

Empieza así a gestarse un método de producción de respuestas, que va a hacer aparecer una segunda paradoja de la relación didáctica. El profesor quiere que el alumno produzca respuestas adecuadas, como una manifestación externa de que ha adquirido el saber, del éxito, al menos aparente, de la enseñanza, pero el alumno no dispone de los medios cognitivos necesarios, puesto que justamente el objeto de la enseñanza es que pueda disponer de ellos.

Entre las posibilidades de tratar estas paradojas aparecen dos soluciones extremas: el profesor dice exactamente al alumno lo que espera obtener como respuesta, con lo que el objeto de enseñanza se convierte en algo extraño al sujeto, o bien puede, por el contrario, facilitarle alguna nueva herramienta para abordar un problema nuevo más sencillo, con lo que la actividad del alumno puede desplegarse en vano, quedando muy lejos del problema propuesto inicialmente.

El deseo de escapar de estas contradicciones lleva a alumnos y profesores a adoptar estrategias, todas ellas apoyadas en el contrato didáctico, tendente a evitarlas.

Los alumnos, para escapar a la angustia provocada por las preguntas, exigen que las preguntas que les haga el profesor sean tales que ellos tengan de antemano la respuesta, y requieren que estas sean transformadas rápidamente en algoritmos, que puedan ser memorizados, y que les proporcionarán las reglas claras de cómo y cuándo emplearlos. Los profesores, deseosos de reconocer indicios de aprendizaje, caen con facilidad en la trampa que les tienden los alumnos; obtienen respuestas adecuadas a sus preguntas y tienen la sensación de que los alumnos aprenden, pero a medio plazo descubren que los alumnos aparentemente despiertos, que parecía que comprendían y aprendían, en realidad no saben nada.

Las conductas anteriores llevadas al extremo proporcionan efectos catalogados e identificados en Didáctica de las Matemáticas como efectos Jourdain, Topaze, deslizamiento metacognitivo, analogía, Bloom, Dienes[9], etc.

En el *efecto Topaze*[10], *el maestro* propone de forma explícita determinadas cuestiones al alumno, pero es él quien *toma a su cargo, bajo su responsabilidad, lo esencial del trabajo*. Si el alumno fracasa, en un afán de ocultar la incapacidad de este para encontrar la respuesta, el enseñante negocia una respuesta a la baja; para ello, añade sucesivamente informaciones suplementarias reductoras de sentido, indicios que le ayuden a encontrar la respuesta, y así hasta que esta se produce. El resultado es que la respuesta del alumno, aunque sea correcta, se encuentra desprovista de todo sentido, y todo porque esa negociación del contrato didáctico priva al alumno de las condiciones necesarias e inherentes a la comprensión y aprendizaje de la noción perseguida.

El *efecto Jourdain*[11] es una degeneración del efecto Topaze.

El profesor, para evitar el debate con el alumno sobre el conocimiento, y constatar eventualmente el fracaso de éste, admite y reconoce el indicio de un conocimiento sabio en los comportamientos o respuestas del alumno, aunque estas hayan sido motivadas por causas y significaciones banales[12].

*Las respuestas banales del alumno son presentadas como indicios de dominio de un conjunto de cuestiones sofisticadas, como la manifestación de un saber sabio.*[13]

*El efecto de analogía* consiste en reemplazar el estudio de una noción compleja por el de otra análoga más sencilla.

---

[9] El primero en tipificar estos efectos fue G. Brousseau. La descripción detallada de ellos puede encontrarse en la obra antes citada: Chamorro, M. C.: *El aprendizaje significativo en Matemáticas*, Alhambra-Longman, Madrid, 1991.

[10] El nombre de *Topaze* tiene su origen en la obra del mismo nombre de Marcel Pagnol. En ella, el maestro trata de que el alumno escriba el plural correcto de la palabra *mouton* en un dictado: *des moutons étaient réunis...* Para ello, Topaze dicta varias veces *des moutons* (la *s* final de este plural no suena en francés); como el alumno sigue sin escribir la *s* final, el profesor pasa a dictar de forma disimulada la respuesta esperada: *des moutonsses étai-hunt réunisse...*

[11] El nombre está tomado de la obra de Molière *El burgués gentilhombre*. En ella, *monsieur* Jourdain, plebeyo enriquecido venido a más, decide recibir clases de retórica. En una escena determinada, el maestro está enseñando las vocales a M. Jourdain. Este le pregunta en un momento dado si están haciendo prosa, a lo que el maestro *no puede* sino responder que sí, si no quiere entrar con M. Jourdain en un debate que no podría comprender.

[12] Brousseau, G.: *Quelques conduites détérminantes en Didactique des Mathématiques*, IREM, Bordeaux, 1984, p. 11.

[13] Es muy frecuente entre los padres, y algunos profesores, confundir la capacidad de contar de sus hijos, es decir, el mero conocimiento de la cantinela, con el dominio y comprensión de la noción de número. Estamos ante un contundente ejemplo de *efecto Topaze*.

El efecto de *deslizamiento metacognitivo* consiste en tomar como objeto de estudio una técnica útil para resolver un problema, perdiendo de vista el problema inicial y el saber que se pretendía desarrollar, de manera que el medio se convierte en fin en sí mismo[14].

**Actividad 6:** Buscar un ejemplo de cada uno de los efectos descritos en la enseñanza de las Matemáticas que se produce en la Educación Infantil o Primaria.

## 2.6. Epistemología y enseñanza de las Matemáticas

Aunque la génesis artificial del saber de la que hemos hablado antes no siga los pasos de la génesis histórica, el conocimiento de esta es imprescindible como punto de partida para el análisis didáctico. Conocer la historia de un saber nos informa sobre cómo ha evolucionado, cuáles han sido las distintas significaciones de un concepto, los problemas que han motivado su nacimiento y a los que pretende dar solución, aspecto este muy importante a efectos de contextualizar después la enseñanza que de él se haga, nos permite, también, reconocer los procesos generales del pensamiento matemático, de la Matemática como cultura.

El saber no puede ser enseñado directamente, tal y como figura en el corpus matemático, debe sufrir ciertas transformaciones; las Matemáticas del matemático no son las Matemáticas del maestro, al igual que estas no son las del alumno, las tres son cualitativamente distintas. Se deduce, por tanto, la necesidad de un tratamiento didáctico del saber, de una *transposición didáctica*[15] que transforme el objeto de saber, lo que se llama *saber sabio*, en objeto de enseñanza, el *saber a enseñar*. Pero las transposiciones didácticas que se hacen no son siempre adecuadas, y una de las tareas de la Didáctica es la de ejercer una vigilancia epistemológica que garantice que las transformaciones sufridas por el

[14] Un claro ejemplo de deslizamiento metacognitivo corresponde a la importancia desmesurada que en algunos momentos tuvo la teoría de conjuntos, concebida en un principio como medio para explicar la noción de número y las operaciones aritméticas, y que se convirtió en un fin en sí misma. Había que memorizar las definiciones de inyectiva, suprayectiva, reflexiva, producto cartesiano, etc., sin que en ningún momento estas propiedades se usasen en el trabajo numérico. Los niños rellenaban, y siguen rellenando, diagramas de Venn con la vana ilusión de que hacen actividades relacionadas con el número.

[15] La noción de transposición didáctica se debe a Y. Chevallard, autor de la obra *La transposición didáctica*, Aiqué, Buenos Aires, 1998, a la que remitimos para profundizar sobre los procesos de transposición didáctica.

saber sabio no lo han convertido en algo irreconocible, matemáticamente hablando, y desprovisto de sentido, viendo qué elementos mínimos es necesario respetar para que las transposiciones realizadas conserven el sentido del concepto y no lo desvirtúen.

El problema del sentido es de gran importancia en Didáctica de las Matemáticas, y se halla ligado a la construcción de concepciones correctas del conocimiento. Una de las hipótesis fuertes de la teoría es que el conocimiento de una noción adquiere parte de su sentido en las situaciones en las que interviene como solución[16].

La noción de concepción está fuertemente ligada a la de situación. Una *concepción* se caracteriza por un conjunto de conocimientos reagrupados, que producen ciertos comportamientos y decisiones, frente a un conjunto de situaciones.

Por ejemplo, la práctica totalidad de los alumnos de 3 y 4 años tiene una concepción del número muy influenciada por factores sensoriales que nada tienen que ver a efectos de determinar la cantidad: espacio ocupado, tamaño de los objetos, disposición espacial, etc. Así, preferirán siempre cinco monedas de un euro a un billete de cinco euros, tres bolas grandes a tres pequeñas, etc.

Dentro de la perspectiva del aprendizaje por adaptación, las dificultades que el alumno encuentra son fundamentales para provocar esta adaptación, y constituyen elementos indispensables para la comprensión de nuevos saberes, siendo a veces constitutivas de éstos. Hay pues que interpretar las dificultades en el aprendizaje de los alumnos como ligadas a concepciones antiguas que serán sustituidas por otras nuevas, para buscar después las situaciones problema que pongan claramente de manifiesto la existencia de soluciones mejores que las que el alumno conoce hasta ese momento, de forma que la nueva concepción aparezca como una solución a estas dificultades.

Es necesario aceptar también que un saber no puede ser enseñado de forma directa conforme a las exigencias de la comunidad científica, a menos que se renuncie a la construcción del sentido por parte del alumno, por lo que a veces el profesor se ve forzado a enseñar un saber más o menos *falso* que deberá ser rectificado más adelante. Se plantea aquí el problema de las institucionalizaciones locales, que pueden generar concepciones erróneas que se constituirán en obstáculo para el verdadero conocimiento, que va a requerir rupturas cognitivas y cuestionamiento de saberes antiguos. En un aprendizaje por adaptación, los conocimientos creados por los alumnos son a menudo locales, por lo que las nociones están particularizadas y limitadas, deformadas en su sentido y su expresión, y se encuentran ligadas de forma casual y errónea a otros conocimientos, que son

[16] Véase en el capítulo anterior la teoría de los campos conceptuales y la noción de concepción.

a su vez provisionales e incorrectos. Además, la permanencia, a veces prolongada de estas nociones, en tanto que siguen resolviendo satisfactoriamente cuestiones locales, refuerza esta significación y aumenta su valor, haciendo más difícil su rechazo posterior, convirtiéndose en un obstáculo para aprendizajes futuros.

Así, por ejemplo, en tanto que los alumnos no conocen los números decimales, el maestro se las arregla para que en las mediciones solo aparezcan números enteros, y se juega la ficción, absolutamente necesaria en la relación didáctica, de que las medidas que se realizan son exactas, lo que solo es posible en la teoría pero que no ocurre jamás en la realidad por muy sofisticados que sean los aparatos de medida que se usen.

En otras ocasiones, los ejemplos y casos que se eligen son absolutamente particulares y marcan la formación de las concepciones de los alumnos. Así, los alumnos creen que la unidad de medida debe ser siempre menor que el objeto que se va a medir, cosa habitual en la práctica escolar, que trata de evitar el fraccionamiento de la unidad y por tanto la aparición de los números decimales que el alumno no conoce; tal concepción es evidentemente falsa.

**Actividad 7:** A partir de la experiencia de la edad del capitán, describir la concepción que tienen los alumnos de lo que es un problema y en qué consiste su resolución.

**Actividad 8:** Si la concepción mayoritaria de los alumnos es que la multiplicación hace aumentar y la división disminuir, ¿qué problemas posteriores puede encontrar el alumno cuando se enfrente a otros conjuntos de números distintos de los naturales?

### 2.6.1. La distinta naturaleza de los obstáculos

La noción de *obstáculo epistemológico* aparece mencionada por primera vez en 1938 por el epistemólogo Gaston Bachelard en su obra *La formation de l'esprit scientifique.* Lo auténticamente novedoso es que el obstáculo va a ser un conocimiento ya científico en su esencia:

> Cuando se buscan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que es en términos de obstáculos como debe plantearse el problema del conocimiento científico. No se trata de considerar obstáculos externos como la complejidad y fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y el espíritu humano: en el acto mismo de conocer, aparecen, íntimamente, como una especie de necesidad funcional, trabas y dificultades [...]. De hecho, se conoce contra un conocimiento anterior, destruyendo los

> conocimientos mal formados, sobrepasando lo que en el espíritu mismo es un obstáculo para la espiritualización[17].

En la obra citada, el autor da una larga lista de obstáculos: la experiencia primera, un conocimiento demasiado general, el obstáculo verbal y la extensión abusiva de imágenes familiares, el obstáculo unitario y pragmático, el coeficiente de realidad atribuido a lo natural, el obstáculo substancialista, etc.

Bachelard advierte sobre el riesgo de utilizar en la enseñanza elemental experiencias demasiado vivas y pintorescas, que se constituyen con facilidad en falso centro de interés, pues el espíritu científico se pierde siguiendo dos tendencias contrapuestas: la atracción por lo singular y lo universal. De igual forma, la primera intuición es un obstáculo para el pensamiento científico, y la extensión de imágenes por analogía o el uso de metáforas aparece como característica de mentalidades precientíficas.

Esta noción va a ser acuñada por la didáctica, y G. Brousseau va a hacer una interpretación más amplia: «… el aprendizaje se hace por el ensayo de concepciones sucesivas, provisional y relativamente buenas, que será necesario rechazar cada vez o retomar en una verdadera génesis». Más adelante añade:

> El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar [...] sino el efecto de un conocimiento anterior que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, están constituidos por obstáculos. Así, tanto en el funcionamiento del maestro como del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido[18].

Un obstáculo va más allá de una mera dificultad encontrada en el aprendizaje, que no pone en cuestión las concepciones existentes en ese momento o los puntos de vista de la teoría. Por el contrario, la superación de un obstáculo requiere una reestructuración de concepciones, no se trata de un error pasajero y fácilmente corregible.

Los criterios utilizados para definir un obstáculo son:

1. Se trata de un conocimiento que funciona como tal, correctamente, produciendo respuestas adaptadas en un conjunto de situaciones y para ciertos valores de las variables de esas situaciones.
2. El obstáculo es un conocimiento que trata de adaptarse a otras situaciones, a otros valores de las variables, y ahí va a provocar errores específicos, localizables, analizables.

*Continúa*

[17] Bachelard, G.: *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie Vrin, Paris, 1938, p.13.
[18] Brousseau, G.: «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques», Actes de la XXVIIIˋème Rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve, 5-12 août 1976, p.170.

*Continuación*

3. El obstáculo es un conocimiento estable que resiste a las contradicciones a las que se somete, y que sigue manifestándose de manera inesperada e intempestiva durante mucho tiempo.
4. El obstáculo no puede ser franqueado más que en situaciones específicas de rechazo en las que será constitutivo del saber. La vuelta a la concepción-obstáculo forma parte integrante del nuevo saber.

En principio, cada conocimiento es susceptible de constituir un obstáculo con vistas a la adquisición de nuevos conocimientos, nueva paradoja de la relación didáctica. Pero no sólo los conceptos y relaciones constitutivas de un modelo dado pueden constituirse en obstáculo, sino también los tipos de metodología que se utilicen. Es posible localizar un cierto número de procesos didácticos productores de obstáculos, tales como la generalización abusiva, la fijación sobre una modelización o contexto familiar, la amalgama de nociones sobre un soporte dado, objetos geométricos o de otro tipo, etc.

Atendiendo a su origen se distinguen tres tipos de obstáculos: obstáculo ontogenético, obstáculo didáctico y obstáculo epistemológico.

Los *obstáculos ontogenéticos* se derivan y son el resultado del desarrollo psicogenético del alumno. Las representaciones de los alumnos se manifiestan a través de modelos implícitos o de esquemas de acción, así como por formulaciones y teoremas en acto, y se desarrollan a través de las relaciones que el individuo establece con el medio. Cuando el individuo, por encontrarse en un nivel de desarrollo inferior, no consigue superar las dificultades y contradicciones que supone la aplicación de su modelo espontáneo a las situaciones escolares propuestas, se está ante un obstáculo ontogenético. Su superación va a requerir rupturas, la toma en consideración de otros puntos de vista, y el consecuente conflicto cognitivo, es decir, un nivel de desarrollo madurativo superior.

Un ejemplo claro de obstáculo ontogenético en alumnos de Educación Primaria es la apreciación incorrecta del carácter tridimensional del volumen, así como de la relación que entraña con la bidimensionalidad; es decir, la comprensión de cómo la variación de las diferentes dimensiones de, por ejemplo, un poliedro, influye en el volumen del mismo. Así, los alumnos menores de 13 años creen en su mayoría que si cada una de las tres dimensiones se duplica, el volumen resultante será 6 veces el primitivo; este error se debe a la dificultad en el paso de los modelos aditivos, más primitivos, a los multiplicativos, que se produce solo en edades posteriores que garantizan un mayor nivel de desarrollo cognitivo.

Los *obstáculos epistemológicos* son inherentes a la constitución del conocimiento, su presencia es independiente de las elecciones que se hagan, y son por tanto inevitables. Están ligados al desarrollo histórico del concepto, es decir, pueden reencontrarse si se analiza la formación histórica del mismo. Un obstáculo epistemológico es constitutivo del conocimiento en el sentido de que el conocimiento que posee alguien que lo ha encontrado difiere de aquel que posee alguien que aún no se ha enfrentado a él.

Desde un punto de vista didáctico, interesa poder distinguir aquellas concepciones que son susceptibles de ser modeladas y que pueden formar parte del proyecto de enseñanza, de aquellas que por el contrario se constituirán en obstáculo. Estas concepciones resistentes a procesos en los que se demuestra su falsedad, no pueden ser ni negadas ni olvidadas, y requieren de la construcción de situaciones didácticas específicas adaptadas que ayuden a los alumnos a franquearlas. Los errores provocados por estos obstáculos van a resistir y resurgir aun después de que el sujeto haya rechazado, de forma consciente, el modelo erróneo de su sistema cognitivo. Su resistencia y permanencia en el tiempo deriva de su pertinencia en situaciones locales, por lo que los contraejemplos o manipulaciones aisladas que pretenden mostrar su falsedad son ineficaces para su destrucción.

Un ejemplo claro de obstáculo epistemológico lo constituye la noción de perímetro en relación con la de superficie. Los alumnos de Primaria creen que el área de una figura depende de la medida de sus lados, lo que es cierto solo para los polígonos regulares. Fuera de este contexto, cuando se generaliza a otra clase de figuras, es falso que la superficie dependa del perímetro. Esta constatación, aun repetida muchas veces, no impide que los alumnos sigan identificando área y perímetro durante mucho tiempo.

**Actividad 9:** Revisar las cuatro condiciones enunciadas más arriba que caracterizan un obstáculo epistemológico, para comprobar que la identificación perímetro-superficie es en efecto un obstáculo epistemológico.

**Actividad 10:** Buscar en la literatura didáctica, en las lecturas recomendadas, otros obstáculos epistemológicos.

Los *obstáculos didácticos* están ligados a los procesos de transposición didáctica que se hace del saber-sabio a efectos de ser enseñado. La epistemología de algunos profesores les conduce a menudo a buscar un método de producción de respuestas, un algoritmo de producción de resultados y conductas observables que den cuenta de la apropiación del saber, soluciones aceptables constitutivas del más puro saber escolar, utilizando para ello una transposición didáctica reductora, que o bien fija un sentido erróneo o demasiado particular de un conocimiento, o bien le priva de todo sentido. El saber es identificado con un cuerpo de declaraciones, y el dominio del saber se traduce por demostraciones memorizadas que forman parte de esas declaraciones, de manera que la verdadera naturaleza del saber se ve alterada.

El uso de ciertos «instrumentos didácticos», como la multiplicación en cruz en la regla de tres, el uso de la escalera para la conversión de unidades, el uso abusivo de fórmulas para encontrar la superficie de los polígonos, el uso de algoritmos de cálculo sin comprensión, el uso de las regletas de Cuisenaire para introducir la noción de número, etc., son potencialmente productoras de obstáculos, en la medida en que impiden que el alumno construya el sentido de los conceptos, que son sustituidos por prácticas algoritmizadas y mecanizadas que los alumnos no siempre controlan, por lo que generan gran cantidad de errores.

**Actividad 11:** Detectar y describir prácticas didácticas habituales en la enseñanza de las Matemáticas en Educación Infantil que puedan constituirse en eventuales obstáculos didácticos.

## 2.7. Bibliografía

Briand, J y Chevalier, M. C.: *Les enjeux dans la relation didactique*, Hatier, Paris, 1995.

Brousseau, G.: *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991 (existe versión inglesa).

Chamorro, M. C.: *El aprendizaje significativo en Matemáticas*, Alhambra-Longman, Madrid, 1991.

— (coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson, Madrid, 2003.

Chevallard, Y.: *La transposición didáctica*, Aiqué, Buenos Aires, 1998.

Jonnaert, Ph.: *Conflits de savoir et didactique*, De Boeck, Bruxelles, 1988.

Vergnaud, G.: *El niño, las Matemáticas y la realidad*, Trillas, México, 1990.

CAPÍTULO 3

# Desarrollo del pensamiento simbólico en el niño

FRANCISCO VECINO

## Contenidos

## 3.1. Introducción

La construcción de un pensamiento lógico-matemático por parte del niño de Educación Infantil exige, como herramienta primitiva, el previo desarrollo de los elementos de carácter simbólico y lógico que requiere la iniciación a la reconstrucción de los conceptos matemáticos más elementales:

- El número.
- El espacio y la geometría.
- Las magnitudes y su medida.

Por tanto, hemos de considerar el desarrollo de la función simbólica como un tema transversal que tendrá su lugar y su razón de ser en cualquiera de los temas específicamente matemáticos que se introduzcan en la educación elemental. Siempre ha de existir, para cualquier concepto matemático que se quiera introducir, un momento para la designación, representación o simbolización de todos los términos que implica ese concepto, de ahí el carácter eminentemente transversal del desarrollo de la función simbólica.

Si pretendemos que en la clase de Infantil se establezca una comunicación a propósito de los conceptos matemáticos que tratan de introducir la serie de situaciones planteadas al niño, será preciso que este pueda proceder a la formulación de sus pensamientos, estrategias, métodos o procedimientos en torno a la situación que pretende resolver, pero además deberá emplear, progresivamente, el lenguaje conciso y preciso que impone el modo de comunicarse en Matemáticas. El empleo de este tipo de lenguaje no es natural para un niño que ha empezado su escolaridad y, por tanto, necesita un entrenamiento y un aprendizaje de los elementos fundamentales de ese lenguaje y de la sintaxis propia que concatena los términos lingüísticos componentes del mismo. Hay que tener en cuenta, por otra parte, que tal lenguaje se está desarrollando al mismo tiempo que el lenguaje natural del niño y, por tanto, al inicio se permitirá el empleo de términos del lenguaje natural o de términos evocadores del mismo para expresar ideas matemáticas. Lo importante es que ese lenguaje evolucione, con la formación escolar, hacia formas más cercanas y aceptables para el lenguaje lógico-matemático.

Así pues, se impondrá, por decirlo a la manera piagetiana, un verdadero desarrollo de la función simbólica que conduzca, inexorablemente, hacia el desarrollo de un lenguaje para expresar de forma correcta los elementos fundamentales del pensamiento lógico-matemático.

Dado el tipo de situaciones concretas, respetuosas con su desarrollo psicológico, que se deben plantear al niño de estas edades, necesitamos tener en cuenta que para expresar los objetos implicados, las acciones implicadas, las propiedades o atributos de tales objetos y acciones, las relaciones establecidas o que se pueden establecer entre ellos, no solo se habrá que lograr el desarrollo de un lenguaje adecuado sino también el desarrollo de un pensamiento lógico que dé cuenta de todos esos particulares. Si queremos que todo ello sirva además para organizarlos, es decir, para que se conviertan en herramientas útiles en la construcción y el desarrollo de los principales conceptos matemáticos, hemos de insistir permanentemente, desde edades muy tempranas, en el desarrollo particular de ese pensamiento lógico-matemático.

## 3.2. Objetivos

– Conocer la epistemología genética correspondiente a la adquisición del símbolo en el niño.

– Diseñar un currículo referente a la formación del símbolo en el niño a partir de las orientaciones generales de las instituciones educativas y de las distintas propuestas de las editoriales.

– Desarrollar la situación fundamental que provoca la designación.

– Proponer y analizar una progresión de situaciones que reflejen esa situación fundamental, para que el niño se ejercite en el uso de la función simbólica.

– Seleccionar distintos registros de simbolización teniendo en cuenta la naturaleza del concepto que se va a designar y la edad del niño que tiene que proceder a la simbolización.

– Determinar los procedimientos para estimular y dirigir al niño hacia el uso de diversos registros representativos y hacia la traducción entre ellos.

– Suscitar en el niño la necesidad de organizar las informaciones en forma de secuencias o de algoritmos y habituarle al uso de los mismos.

– Detectar la influencia del entorno social en la formación de una simbología.

## 3.3. Consideraciones metodológicas particulares

En un tema como el presente, que forma parte del diseño, planificación y desarrollo de un currículo lógico-matemático para la Educación Infantil se impone, por fuerza, un trabajo esencialmente práctico donde, a partir de una terminología teórica específica y de unos métodos de trabajo dictados por ella, se desarrollen toda una serie de objetivos que se deben alcanzar, de situaciones que se han de plantear, de secuencias organizadoras correspondientes y de métodos para planificar el trabajo y recoger resultados.

Existirá una parte previa mínima donde se introducirá la terminología y los principios básicos para centrar el tema de trabajo y, a continuación, una parte práctica, en forma de situaciones que se pueden plantear al niño, de forma que se asegure la construcción de los elementos simbólicos, del lenguaje y de la sintaxis correspondientes y la consiguiente formación que supondrán para él todas las construcciones que se deriven de esas situaciones específicas planteadas.

Conscientes de todo ello proponemos una metodología específica que permita:

– Enfrentar al futuro maestro con el diseño de situaciones que hagan necesaria la designación para comunicarse con los demás.

– Hacer sentir al aprendiz no solo la necesidad de designar, sino también la necesidad de producir un lenguaje significativo y eficaz para comunicar aquello que se quiere transmitir a los demás.

– Conseguir que las simbolizaciones adoptadas revistan, a través del itinerario didáctico proyectado, un carácter marcadamente simbólico y abstracto, con el fin de acercarse al lenguaje propio de la matemática.

– Concienciar al maestro de que es preciso ofrecer al niño ocasiones propicias para que simbolice, desterrando la concepción imperante según la cual las simbolizaciones se le dan ya construidas.

– Hacer sentir al maestro la necesidad de plantear situaciones para la designación de verdaderos entes matemáticos como: clases de equivalencia, órdenes, algoritmos, números, etc., entes absolutamente necesarios para la construcción de los conceptos matemáticos elementales por parte del niño.

En definitiva se trata de convencer al maestro de que resulta necesario que el niño se acerque a la construcción de un lenguaje matemático, del mismo modo que se acerca, en sus primeros años de escolaridad, a la construcción de los instrumentos lingüísticos más apropiados para comunicarse con sus semejantes en la sociedad en que se halla inmerso.

## 3.4. Consideraciones psicopedagógicas de la iniciación a la simbolización

Antes de aclarar cómo se va iniciando el niño en la simbolización matemática desde un punto de vista psicológico, conviene formularse una doble pregunta:

> ¿Constituyen los símbolos matemáticos un lenguaje particular, en cuyo caso toda actividad mental necesaria para su desarrollo se reduciría y formaría una parte de la psicología del desarrollo del pensamiento verbal, o más bien esos símbolos reflejarían estructuras más profundas del pensamiento? En este caso, ¿hasta dónde retroceder para determinar el conjunto de actividades mentales que condicionan su uso y formación?

Parece haber un consenso universal según el cual el lenguaje matemático coincidiría con ciertas formas del lenguaje natural y por tanto del pensamiento verbal. En cualquier caso sólo sería una coincidencia parcial no generalizable.

Si además consideramos que los símbolos matemáticos se estructuran como componentes más profundas del pensamiento en general, se debe admitir que mediante una sucesión ininterrumpida de estructuras incompletas, parciales y poco equilibradas, en principio, se llegue a la constitución de un lenguaje propio y adecuado a esa ciencia. En tal evolución, siguiendo las orientaciones piagetianas[1], distinguimos tres etapas:

1. Las operaciones de simbolización constituyen un puente entre las formas elementales de expresión y las formas más evolucionadas del pensamiento matemático.

2. Existe una formalización gradual que caracteriza el paso de un nivel a otro de evolución. El comienzo de la simbolización se liga, al principio, a operaciones concretas aunque acompañadas de ciertas formas de lenguaje (de 2 a 7 años); se da, a continuación, un cierto paso hacia la formalización con la coordinación entre acciones y operaciones concretas y se va abstrayendo un cierto tipo de simbolización relacionada con objetos dados (8 a 11 años); es a partir de los 12 años cuando esa simbolización se libera de las interferencias de los objetos, para constituir una terminología formal a través de mecanismos hipotético-deductivos.

3. El simbolismo se hace más complejo y equilibrado con interdependencia de la formalización señalada al final de la etapa anterior.

### 3.4.1. Iniciación a la simbolización en los niños de las primeras edades escolares

Si nos atenemos a las principales ideas piagetianas al respecto, podemos destacar algunas características del desarrollo de la función simbólica en el niño preescolar.

En principio el niño funciona con esquemas simbólicos y para designarlos usa intermediarios que se pueden situar entre significantes imitativos (iconos) y verdaderos signos. Por ejemplo, para simbolizar un animal utiliza un esquema que trata de imitar la figura del mismo, constituyendo así una especie de símbolo que queda entre el icono del animal y un signo abstracto cualquiera que pueda utilizar más adelante para designarlo.

Pero ¿qué evolución se da en la simbolización progresiva hacia el signo? Podemos formular las siguientes hipótesis:

**a) Formación de «preconceptos»**

El niño, a edades tempranas, ni generaliza ni individualiza, utiliza nociones moviéndose sin cesar de un extremo al otro. Piaget llama preconceptos a esas nociones. En este ámbito, el preconcepto sería el símbolo que se utiliza entre el

[1] Piaget, J.: *La formación del símbolo en el niño*, Fondo de Cultura Económica, México, 1961.

simple icono y el signo (concepto). El preconcepto se acomoda al objeto privilegiado. Así, para designarse a sí mismo o a cualquier otra persona de su entorno, utiliza una serie de trazos que tratan de dar cuenta de las partes principales del cuerpo de una persona. Se trata de un símbolo (recuerda al ente simbolizado) sin ser una imagen fiel del ente (icono), ni mucho menos una designación conceptual como podría ser el nombre escrito (signo).

**b) Iniciación al razonamiento: razonamientos preconceptuales y razonamientos simbólicos**

Son típicos de estas edades los primeros, es decir, los razonamientos en los que el niño se sirve de esquemas centrados en el objeto que le interesa. En ellos se centra en una característica saliente del objeto representado. Por ejemplo, al dibujar objetos redondos, sean cajas, canicas o pelotas, el producto final es una línea cerrada que trata de reflejar la forma «redonda» predominante en ellos.

Pero, a partir de los 4 años, los esquemas utilizados por el niño tienden a descentrarse y a extenderse a otros objetos, produciéndose así un avance progresivo en el uso de símbolos representativos.

**c) Inicio de la representación cognoscitiva**

Es entre los 7 y los 8 años cuando el niño crea bocetos para designar. Estos conducirán progresivamente al empleo cada vez más frecuente de signos representativos. También en estas edades se produce una esquematización hacia imágenes más simples de los objetos, en concomitancia con la aparición de las primeras operaciones concretas. Por ejemplo, el monigote característico que representa a una persona tiene unos trazos más decididos y se aproxima al símbolo canónico que tenemos todos de ese ente representativo.

## 3.4.2. Consecuencias pedagógicas

El trabajo sobre la designación es fundamental en los primeros niveles educativos. El esfuerzo que los niños se ven obligados a realizar para producir ellos mismos los signos requeridos por cada situación, adoptando diferentes sistemas de designación, debe ser una preocupación constante para el profesor.

En tales niveles se trata de no confundir los símbolos con las cosas, es decir, los términos de la designación con los objetos designados.

Una vez practicado suficientemente el trabajo anterior, se debe conseguir que los niños actúen sobre los símbolos producidos y que comprendan que las diferentes escrituras pueden ser formas distintas de designar un mismo objeto o ente matemático; ello requiere una insistencia especial en el trabajo sobre la equivalencia de designaciones.

Todo ello permitirá que el niño:

– Perciba el carácter arbitrario, convencional de un icono, de un símbolo y finalmente de un signo.

– Perciba y distinga simultáneamente el significante (icono, símbolo o signo) y el significado (el ente designado).

– Utilice la sinonimia, que desembocará en la utilización del signo «=».

## 3.5. Esquema psicopedagógico del desarrollo de la función simbólica

El ejercicio de la función simbólica se puede resumir en el esquema siguiente[2], en que encontramos los dos planos inseparables de la designación y de la comunicación, con tres polos (el nombre en negro y la determinación en rojo) en cada uno de ellos. De esos polos, dos son comunes a ambos planos: los dos polos centrales. Todos esos polos caracterizan a ambos planos según las operaciones mentales o representativas (en verde) que se desarrollan en cada uno de ellos, operaciones que se desarrollan en el doble sentido que aparece en el esquema. Como consecuencia se producen una serie de productos de designación (significantes orales, gráficos, gestuales, etc.) que en Matemáticas se traducen principalmente en las categorías indicadas en la parte inferior izquierda, y, en general, se presentan en las modalidades reseñadas en la parte inferior derecha.


[2] Este esquema ha sido tomado de Bourneau et al.: *Apprentissage mathématique*, L'École, París, 1992. Y ha sido transformado por el autor del capítulo.

# 3.6. Propuesta de desarrollo del ejercicio de la designación en la Escuela Infantil

## 3.6.1. Justificación epistemológica y curricular

En Pères[3] encontramos la siguiente indicación didáctica: «Cuando un niño quiere **simbolizar** un objeto debe ser llevado **poco a poco** a elaborar aquello que, entre todas las características del objeto, puede ser retenido, es decir, aquello que resulta significativo y pertinente en el objeto».

En ella se indica claramente la importancia de someter al niño a actividades de designación y la progresión que deben revestir tales actividades.

Añade además que «tal elaboración no es espontánea». Nos parece extremadamente importante este resultado de investigación, ya que con él se está proponiendo la construcción de una secuencia didáctica que asegure la elaboración de la simbología adecuada para cada caso propuesto. Se debe tener en cuenta sin embargo, como señala este mismo autor, que en ese ejercicio de la función simbólica aparecerá inmediatamente «un obstáculo de tipo semiológico ya que la construcción de símbolos en el niño remite a una actividad lúdica (dibujar) y no a una necesidad de designar un objeto particular». Esta observación coloca al enseñante ante la necesidad de tener en cuenta ese obstáculo a la hora de construir las situaciones componentes, de forma que los niños no se limiten a dibujar un objeto o sus características esenciales sino que procedan a un ejercicio de depuración de la simbolización dictado por la dinámica de la situación propuesta.

Para completar el cuadro teórico que justifica la introducción de un tema de este tipo en el programa, aportamos la opinión de Durif (1989) sobre «representación simbólica», representación que utiliza «el lenguaje como vector». Sin duda, con esta alusión, se refiere a todo tipo de lenguaje, sobre todo si tenemos en cuenta la etapa anterior en que los iconos, primer indicio de la simbolización, pueden ser materializados en símbolos y, ocasionalmente, en signos externos.

> Esta opinión, ampliamente compartida en la investigación sobre el tema, hace obligatorio un planteamiento de las situaciones didácticas donde se den los pasos: icono → símbolo → signo, aunque dichos pasos no se deban producir obligatoriamente en ese orden.

Lo realmente cierto es que aparecen esos tres tipos distintos de simbolización y que se puede producir una transición entre ellas dependiendo de las

---

[3] Pères, J.: *Construction et utilisation d'un code de désignation à l'école maternelle*, IREM de Bordeaux, Bordeaux, 1987.

condiciones específicas de las situaciones de simbolización y del ambiente social de la clase donde se proponen tales situaciones (Perret-Clermont, Vygotsky).

Este último párrafo impone, además, la consideración de las tres componentes clásicas del acto de designar, es decir: la consideración del referente, del significante y del significado, componentes que deben intervenir en el diseño de cualquier situación didáctica que se plantee para obtener una designación.

Dirigiendo nuestro interés hacia otra dimensión, en Godino y Batanero[4] podemos encontrar citadas como actividades de matematización las siguientes:

– «Inventar una **simbolización** adecuada para **representar** las situaciones y las soluciones encontradas y para **comunicar** dichas soluciones a otras personas».

– «Producir nuevas expresiones y enunciados significativos mediante **manipulaciones simbólicas**».

Consideramos importantísimas tales actividades si se pretende construir un programa adecuado para el ejercicio de la función simbólica, ya que añaden a lo dicho hasta ahora perspectivas fundamentales para que tal ejercicio sea completo:

– Aparece, como nuevo, el aspecto de la comunicación (obligación de plantear situaciones que incluyan la formulación y la validación).

– Aparece también el aspecto de la manipulación simbólica que entendemos como un cambio de registros representativos.

Ambos aspectos harán que el programa correspondiente sea mucho más rico y completo y asegurarán, en definitiva, el ejercicio adecuado de la simbolización, ejercicio fundamental para construir el lenguaje de signos que la propia epistemología matemática necesita.

Ahondando en el tema, podemos citar las siguientes entre las actividades de matematización que tienen que ver con la designación en el currículo de Educación Infantil:

- La designación de conjuntos y de los elementos de un conjunto.
- La designación de las clases resultantes de una partición.
- La designación del orden resultante de una ordenación.
- La designación del número, entendido como síntesis de procesos de clasificación y ordenación.
- La designación de algoritmos y de procesos que se desarrollan en el tiempo o en el espacio.
- La designación del resultado de una medida en cualquier magnitud.
- La designación en el espacio y en las geometrías que lo modelizan.

[4] Díaz Godino, J. y Batanero, C.: «Pasos hacia una teoría del significado y la comprensión», en *Didáctica de las Matemáticas*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 1998.

El panorama es lo suficientemente amplio e importante como para pensar seriamente en la conveniencia de introducir un ejercicio consistente de la función simbólica en los primeros niveles de la educación, ya que de ello dependerá una buena parte de la comprensión de los conceptos y de los temas matemáticos arriba indicados.

No se debe ocultar, sin embargo, que el ejercicio de la simbolización puede conducir a dos resultados:

– La asignación a un mismo ente de varias designaciones diferentes (sinonimia).
– La asignación de una misma designación a dos entes diferentes (homonimia).

A pesar de la aparición de estos dos resultados y de su validez social, la construcción del lenguaje matemático admite solamente el primero, lo que dará lugar a la aparición de un elemento importantísimo de la designación en matemáticas como es el signo de la igualdad (=), signo que adquiere su sentido sólo a partir de un ejercicio consciente de la sinonimia y del veto absoluto de utilización de la homonimia a la hora de designar en Matemáticas. Es la propia naturaleza de esta ciencia la que impone tal restricción y es un resultado que se debe obtener de los niños con el ejercicio consciente de la designación, a partir de las situaciones de simbolización que se les propongan.

## 3.6.2. Las concepciones del maestro de Educación Infantil sobre la designación

Hay una concepción primaria y general, no solo sobre la designación sino sobre cualquier tema de cualquier materia escolar, aunque se radicalice en el caso del pensamiento lógico-matemático. Tal concepción se podría expresar así: «Hay que enfrentar al niño a situaciones o actividades que no le supongan un gran esfuerzo, que se resuelvan de una manera fácil, cuando no evidente». Una muestra de esta concepción son los manuales escolares del nivel de Educación Infantil y muchas de las actividades que se proponen en las clases de ese mismo nivel. Creemos que tal concepción va directamente contra la tesis constructivista del conocimiento.

Pero además existen una serie de concepciones específicas sobre el tema que estamos tratando:

– *Es mejor hurtar al niño el ejercicio de la simbolización*, por lo que en la mayoría de los casos se le da hecha. Como ejemplo podemos mencionar las designaciones de perchas, casilleros, carpetas, etc., del aula, que normalmente se les dan hechas al niño, sin que él haya sentido nunca la necesidad de designar esos objetos para un determinado fin específico.

**Actividad 1:** Realizar un inventario de todas las designaciones que existen en la clase de Educación Infantil y que no han sido producidas por los alumnos.

– *Existe un registro preferente y casi exclusivo de designación: el dibujo infantil*, que provoca, a la larga, confusión y desconcierto por las características de ese medio de designación.

– *La previsión de un solo registro de designación o de una designación única* que va contra uno de los signos más importantes de la matemática: la igualdad. Si no se adoptasen varias designaciones para un mismo objeto, ese signo matemático no tendría ninguna razón de existir.

– *La limitación de la designación a los resultados obtenidos por cada individuo*, que va en contra del principal objetivo del uso de la designación: la función de comunicarse con los demás.

Después de señalar estas concepciones y de constatar el poco ejercicio de la función simbólica que se practica en las aulas de Infantil, conviene recordar las recomendaciones que hace al respecto el DCB de ese nivel educativo. En el apartado de «Objetivos generales» encontramos la siguiente recomendación: «Evocar diversos aspectos de la realidad... o productos de la imaginación y expresarlos mediante la utilización... de las posibilidades que ofrecen *el juego simbólico y otras formas de representación* de la realidad...» y en el apartado de «Adquisición del lenguaje matemático» encontramos esta otra: «La expresión de esas relaciones [se refiere a las que establece el niño a partir de su actividad sobre los objetos] se hará primero a través de la acción, luego *a través del lenguaje oral* y finalmente *a través del lenguaje matemático*, que puede empezar sirviéndose de *representaciones icónicas* y que acabará refiriéndose a los números...»[5]. Parece claro, pues, que una de las tareas que se han de realizar en la Escuela Infantil es la de la elaboración de designaciones de distinto orden, aunque algunos extremos de esas citas necesiten un mayor nivel de precisión, a la cual procederemos en el curso de la proposición didáctica posterior.

## 3.6.3. Secuencia didáctica sugerida

De acuerdo con lo anterior e intentando buscar un camino de introducción a casi todas las designaciones matemáticas que se han mencionado al final de 3.6.1., hemos organizado la progresión de situaciones en tres apartados:

- Situaciones de designación de objetos, personas y acciones.
- Situaciones de designación de conjuntos, de clases y del orden dentro de un conjunto.
- Situaciones de designación de algoritmos.

[5] La cursiva es nuestra.

Como condición previa e irrenunciable hay que tener en cuenta que para el diseño de esas situaciones es preciso respetar una regla fundamental que permitirá la construcción de designaciones por parte del niño: El ejercicio de la función simbólica, para todos y cada uno de los entes a que nos hemos referido en apartados anteriores, exige por parte del maestro un esfuerzo en la determinación de la situación fundamental, que produzca un ejercicio efectivo de la designación. Para ello ese esfuerzo se debería centrar en la construcción de una serie de situaciones en las que:

– Se plantee la necesidad de comunicarse con otro del mismo nivel para indicarle los elementos de un referencial cualquiera.

– Se produzca confusión entre los elementos del referencial sobre el que es preciso comunicar algo, debida a:

- El aspecto de los elementos que se van a designar.
- El parecido entre los elementos que se van a designar.
- El número de elementos que se van a designar.
- La diferente entidad de los elementos que se van a designar.

– Exista la posibilidad de uso de distintos registros semióticos para comunicar, de forma que dé lugar a representaciones semióticas distintas y a la consiguiente traducción entre ellas, con el objetivo final de lograr una comprensión significativa de los elementos designados.

– Se dé la posibilidad de deshacer las situaciones de homonimia a que ha conducido el ejercicio de la simbolización.

## 3.7. Situaciones de designación de objetos, personas y acciones

Parece obligatorio, dado el carácter egocéntrico de los alumnos de los primeros años de Educación Infantil, comenzar por la designación de uno mismo, para continuar después con una derivación bastante natural de este tipo de situación: la designación de los otros y la designación de objetos. Sin embargo, no quedaría completo el panorama si no se procediese a la designación de acciones y de los procesos que determinan la consideración de varias acciones seguidas ya que, una vez que se han designado los elementos primarios, el paso natural es designar las acciones que los ligan entre sí y los procesos determinados por una sucesión de las mismas.

### 3.7.1. La designación de uno mismo: de la expresión oral del nombre a la adopción de un signo

Hemos de procurar que el desarrollo de la situación comprenda las siguientes fases:

a) *Expresión oral del nombre*, ya que la mayoría de los niños llegan a la escuela con una forma de designarse: la expresión oral de su nombre

La situación se desestabiliza si se da la circunstancia bastante probable de que existan varios niños que tengan el mismo nombre, lo que les tiene que obligar a buscar la solución para resolver el conflicto planteado, solución que normalmente se encuentra usando el apellido a continuación del nombre, un número de orden, una característica que los distinga, etc.

b) *Gestión de una primera variable didáctica: forma de designarse a uno mismo*

Para esta variable se adoptará un valor: *sin hablar*, lo que obligará a los alumnos a buscar soluciones para identificarse cuando se ven privados del uso de la voz. Esas soluciones podrán ir desde el uso de la foto hasta el uso de un signo (por ejemplo, un gomet), pasando por soluciones intermedias como son el uso de objetos personales o de dibujos.

**Actividad 2:** Elaborar la consigna que se le daría al niño para que pueda llegar a designarse, respetando las condiciones que se plantean en este apartado.

c) *Gestión de otras variables didácticas*

Es importante pasar de uno a otro de esos registros de designación introduciendo, para ello, otras variables didácticas (que se traducirán en la desaparición fortuita y, sin embargo, intencionada de los elementos usados anteriormente para designarse o en la invalidación de los mismos por determinadas causas comprensibles para el niño). Así, la introducción de elementos (una racha de viento, un celo excesivo de la persona de la limpieza, la intervención de un personaje ficticio que se lleva las designaciones producidas) que hacen desaparecer designaciones adoptadas hasta ahora obliga a la adopcion de otras formas de designación que dependerán de los nuevos materiales de designación que se pongan al alcance del alumno.

d) *Situaciones próximas que se tienen que desarrollar: la designación de personas, de objetos personales (perchero, carpeta, vaso, etc.), del domicilio propio, etc.*

No supone un gran avance, a efectos de designación, la simbolización de los elementos mencionados ya que:

– Se puede asumir fácilmente, por parte de los demás, la designación adoptada por cada uno para designarse, siempre que la situación prevea un desarrollo que plantee en algún momento el uso común de la designación asociada a uno mismo, es decir, siempre que en la situación progresiva se plantee el que unos tengan que reconocer los símbolos adoptados por los demás, con el establecimiento final de designaciones que pueda reconocer toda la clase.

– No supone un gran esfuerzo la adopción de los símbolos o signos, adoptados para designarse a uno mismo, a efectos de designar aquellos objetos o lugares relacionados directamente con el sujeto designado, en cuyo caso es importante que el alumno comprenda lo que significa tal designación, es decir, la relación de pertenencia o de relación con el sujeto designado.

Por supuesto, y a efectos del desarrollo de un futuro lenguaje matemático correcto, se debería conducir la situación para que entes distintos se designasen con símbolos o signos distintos. Un resultado que se debería obtener, además, con este tipo de situaciones es el de la obtención de designaciones distintas para un mismo ente, resultado fácil de obtener al reconducir la situación de modo que, individualmente o por grupos, se trate de designar un elemento dado.

## 3.7.2. La designación de objetos (la caja vacía[6])

Se trata de una situación que tiene como objetivo prioritario la designación de objetos de una colección. Se desarrolla en tres fases:

1. En la primera fase, la maestra va sacando de una caja objetos conocidos por los alumnos y estos deben nombrarlos a medida que se van extrayendo, hasta que creen que no hay más en la caja y lo manifiestan en voz alta. Si aciertan, ganan; si no aciertan, pierden. En esta fase la designación es colectiva e implícita y resulta fundamental el manejo por el/la maestro/a de una variable didáctica: el número de objetos que se meten en la caja, ya que, a menor número, la tarea de controlar cuando se vacía es mucho más sencilla.

2. En la segunda, se reduce el número de objetos y se pregunta a los alumnos qué pueden hacer para saber cuándo se queda vacía la caja, pero en este caso se irá llamando a los alumnos al azar y será uno solo el que debe controlar cuándo se queda vacía la caja. Además, se preguntará a cada alumno al día siguiente de haber introducido los objetos en la caja. Nótese la actuación conjunta sobre tres variables didácticas: *el número de objetos* (12, por ejemplo), *la composición de la clase* para resolver la situación (individual) y *el tiempo trans-*

[6] Tomada de las transcripciones realizadas por M.ª del Carmen Chamorro (UCM) y por Eduardo Lacasta (UPN) sobre la situación desarrollada en l'École Michelet (Bordeaux).

*currido* desde que se plantea la situación hasta su resolución (al día siguiente). La situación se ha complicado de tal modo que pocos logran resolverla con éxito.

Reunidos los alumnos en asamblea para saber qué ha pasado, se constata el fracaso y algunos sugieren como solución dibujar los objetos de la caja, para que al día siguiente se puedan localizar los objetos a partir de la lista de dibujos construida. La tarea no queda resuelta debido a la imprecisión y confusión del dibujo infantil:

– Dibujos muy parecidos correspondientes a objetos de la misma forma (todos los objetos redondos se dibujan de la misma forma, al igual que todos los rectangulares por otra parte).

– Dibujos que no se pueden descifrar, ni siquiera por el autor de los mismos. Estos resultados imponen el planteamiento de una nueva fase para resolver la situación.

3. En la tercera fase se organiza a los alumnos por parejas, se reduce todavía más el número de objetos (4) y debe ser cada uno, con la lista elaborada por un compañero, el que intente dejar la caja vacía, nombrando los objetos que ve dibujados, para que su compañero, que no lo ve, saque o no de la caja el objeto nombrado, hasta que logren entre los dos dejar la caja vacía. Evidentemente la tarea se complica sobremanera ya que la interpretación de los dibujos del otro la hace mucho más ardua. Es en la discusión posterior, entre ambos miembros de la pareja, sobre la imprecisión de los dibujos, sobre la aparición de dibujos parecidos, sobre la falta de detalles importantes…, cuando se logra la depuración progresiva de los dibujos con el fin de localizar todos los elementos de la caja[7]. Se trata pues de una situación de comunicación en que uno es el emisor (el que dibuja los objetos) y otro es el receptor (el que interpreta los dibujos realizados por su compañero). Es una forma clásica de construcción de las situaciones de formulación a las que se refiere Brousseau en su teoría de las situaciones.

Después de aproximadamente 15 sesiones se logra que casi todos resuelvan la situación con éxito, si bien puede darse una confusión entre designaciones de objetos, al manejar en toda la situación una variable didáctica tan importante como es *la composición de la colección de objetos*, y puede ocurrir que al meter varios parecidos obtengan designaciones iguales. Por ejemplo, al meter un tubo de betún y uno de dentífrico, se pueden obtener dos designaciones iguales, confusión que se resuelve planteando a los alumnos, dispuestos en asamblea, la confusión producida y obteniendo de ellos la solución, que normalmente consiste en el añadido de algún detalle a uno de los dibujos que provocan la confusión.

[7] Se puede completar esta información con la proporcionada por la profesora Ruiz Higueras en el punto 4.4. del capítulo siguiente.

En las fotografías siguientes vemos algunos de los objetos que podrían formar parte de la colección. Al elegirlos se está gestionando una variable como «la forma», que presumiblemente producirá designaciones muy parecidas, lo que llevará a un ejercicio posterior de refinamiento de las mismas para designar de forma distinta objetos distintos.

Se puede entender perfectamente que esta situación constituye una primera aproximación a la designación de objetos y que, por tanto, se hace necesario el planteamiento de situaciones posteriores que puedan suscitar, como método de resolución, alguno que vaya más allá del dibujo infantil, para lo cual será fundamental la gestión, por parte del maestro, de una variable didáctica, como *los medios de designación que se proporcionan al alumno*. Sin duda se lograran designaciones distintas si se retiran al alumno los instrumentos de dibujo (ceras, lápices, bolígrafos…) y se le proporcionan otros como pueden ser: gomets, cromos, fotos, etc.

### 3.7.3. La designación de acciones

Se puede emprender, en Educación Infantil, la designación de entes más complejos, como pueden ser las acciones o los procesos resultantes de la sucesión de varias acciones. Para ello es necesario planificar y diseñar cuidadosamente las situaciones que permitirán al niño llegar a la designación efectiva de tales entes complejos.

Para emprender tal tipo de designación y antes de proceder a cualquier diseño de situaciones, hay que tener en cuenta una premisa: la inadecuación e insuficiencia del dibujo infantil para designar estos entes más complejos. En efecto, resulta demasiado difícil que el niño llegue a designar de forma adecuada una acción realizando un dibujo propio, pues, como veíamos, incluso la misma designación de objetos resulta problemática si se adopta como único medio de designación el dibujo infantil.

De entrada, a la hora de planear situaciones para que el niño llegue a la designación de acciones, nos toparemos con una dificultad consistente: la ostensión de la acción no suscita la necesidad de designarla, es decir, mostrar simplemente la acción mientras transcurre no provoca la necesidad de designarla. Por ello hay que buscar los medios que provoquen en el niño la necesidad de designar esos entes complejos. Entre ellos podemos mencionar:

– Plantear situaciones en que haya una coincidencia temporal entre varias acciones.

– Plantear situaciones en que haya una cadencia o desarrollo en el tiempo de varias acciones.

– Plantear situaciones en que se deba ejecutar una acción determinada en un momento preciso.

– Plantear situaciones sin poder usar la palabra para designar la acción que se va a realizar.

Podemos pensar, por ejemplo, en la designación de las rutinas diarias, es decir, en la designación de acciones como entrar en clase, salir de clase, comer el bollo, salir al recreo, sentarse en asamblea, realizar la ficha, ponerse el abrigo, quitarse el abrigo, etc.

De esta forma, proponiendo situaciones en que se usen los medios anteriormente mencionados podemos suscitar en el niño la necesidad de designar tales acciones y, en ese momento, hay que prever que la situación debe proporcionar el material necesario para que el niño llegue a designar la acción. Este material puede consistir en fotos de la acción, dibujos de instrumentos con que se realiza, fotos de la persona más adecuada para realizarla, dibujos abstractos, etc. A continuación, es preciso tener en cuenta varias reglas fundamentales para llegar al ejercicio efectivo de la función simbólica:

– Es necesario proporcionar más elementos de designación que número de acciones, para que se pueda elegir la designación propia.

– Conviene proporcionar, como se sugería antes, elementos de designación correspondientes a distintos registros representativos (registro fotográfico, registro simbólico, registro de signos, etc.).

– Es importante proporcionar elementos muy parecidos entre sí para que el niño llegue al ejercicio efectivo de tal función.

**Actividad 3:** Teniendo en cuenta todas las recomendaciones dadas, diseñar una situación para la designación de cinco acciones, indicando claramente las consignas que se dan, la organización de la clase y los materiales que se proporcionan al alumno.

Tanto en este tipo de situaciones de designación de acciones, como en los anteriores de designación de objetos o personas, es conveniente que la clase entera llegue a designar usando un mismo registro representativo, extremo que se puede obtener planteando, por ejemplo, la actividad en grupo y obligando a que se comuniquen unos grupos con otros. La comunicación resulta evidentemente más fácil si todos los grupos se ponen de acuerdo para elegir un mismo registro representativo.

### 3.7.4. La designación de conjuntos y de clases

En Matemáticas es fundamental la distinción neta entre dos designaciones elementales: la designación de un conjunto y la designación de los elementos de un conjunto.

Ya desde los primeros niveles de la educación elemental se produce un uso frecuente de ambos tipos de designación. Piénsese que el ente matemático fundamental de estos niveles puede ser considerado como una designación de un conjunto. Nos estamos refiriendo al número que puede ser considerado como una clase y, por tanto, como un conjunto de conjuntos que cumplen una propiedad fundamental, aquella que se refiere a la numeralidad de esos conjuntos componentes de la clase. Existe pues una razón epistemológica fuerte para que la designación de conjuntos sea introducida ya desde el nivel de Educación Infantil.

Normalmente los conjuntos se pueden designar de dos formas distintas: por extensión y por comprensión. En el primer caso se designa dando todas y cada una de las designaciones de sus elementos, en el segundo se designa una propiedad que cumplen todos los elementos del conjunto.

*a) La designación de conjuntos*

Desde un punto de vista didáctico, el primer tipo de designación no añade casi nada nuevo a la designación de objetos vista hasta ahora. ¿Qué era la lista de elementos dibujada por cada alumno en la situación de «la caja vacía» sino la designación (por extensión) del conjunto de elementos que estaban en la caja? Solo quedaría, para completar la designación del conjunto, la delimitación de los elementos del mismo con algún medio. No debería ser difícil diseñar una situación que, partiendo de la designación de los elementos que cada alumno tenga en su caja, plantease a continuación la confusión que se produce al juntar todas las designaciones producidas y, como consecuencia, encontrar algún medio para poder distinguir el conjunto de objetos representados por cada alumno.

**Actividad 4:** Describir pormenorizadamente la situación que se plantearía a los alumnos, dando literalmente las consignas propuestas, para que lleguen a distinguir (designar) el conjunto representado extensivamente por cada uno de ellos en la situación de la caja vacía.

La consecución de ese aislamiento de los elementos que ha representado cada uno y, por tanto, la consecución de la designación del conjunto propio, constituye un primer paso para llegar a designar por comprensión el conjunto, de forma que se distinga el conjunto designado por un solo símbolo o signo y los elementos del conjunto designados, cada uno de ellos también por un solo símbolo o signo. No será difícil plantear la situación correspondiente para que esa designación única del conjunto se produzca, asignando a ese conjunto el símbolo o signo adoptado para designar a la persona que ha dibujado sus elementos. Se entiende que tal designación podría corresponder a distintos registros de representación: al de los nombres, al de los colores, al de los animales o flores preferidos, etc., es decir, a una serie de registros que pueden ir del icono al signo indistintamente, pasando por el símbolo.

Otra posibilidad de planteamiento de situaciones para la designación de conjuntos por comprensión puede venir dada si, en vez de proporcionar al alumno todos y cada uno de los elementos de designación de los elementos del conjunto, se le proporcionan menos elementos de designación de los elementos de que consta el conjunto. Esto es recomendable para la designación de los conjuntos homogéneos. Por ejemplo, si en un referencial dado hay cochecitos, muñecos, bolas y tubos, se puede llegar a la designación de cada uno de esos cuatro conjuntos homogéneos, si en vez de dar las designaciones de todos los coches, por ejemplo, se les da solo la designación de dos de los vehículos. No es difícil que los alumnos lleguen a designar el conjunto de cochecitos con el símbolo de uno de esos dos vehículos. Se debe prever, sin embargo, el caso de coincidencia

**Actividad 5:** Aprovechando la visita realizada a la granja, plantear una situación para designar primero los animales de la granja y, después, los distintos conjuntos de animales que se pueden distinguir en ella, exponiendo a continuación una nueva situación que deshaga la posible homonimia generada entre la designación de un animal y la designación de un conjunto de animales.

entre la designación del conjunto y la designación de uno de sus elementos, circunstancia que exigiría el planteamiento de una situación posterior que permitiese resolver el caso de homonimia resultante de la situación anterior: designación idéntica del conjunto y de uno de sus componentes.

*b) La designación de clases*

De la aritmética a la geometría, toda la Matemática elemental se basa en la consideración y en la construcción de clases de equivalencia, por ello resulta un ejercicio importante la designación de las clases resultantes como consecuencia de la aplicación de una relación de equivalencia en un conjunto dado. De acuerdo con ello, no se puede prescindir en la enseñanza infantil de la designación de las clases generadas por la partición practicada en cualquier conjunto dado, designación que consiste de nuevo en la simbolización de los conjuntos generados al aplicar la correspondiente relación de equivalencia.

No vamos a describir ahora las características fundamentales de la clasificación de un conjunto determinado, ya que ello formará parte del desarrollo del capítulo siguiente, pero sí conviene hacer algunos comentarios sobre la simbolización de las clases.

En el planteamiento de las situaciones correspondientes resulta imprescindible una gestión adecuada de algunas variables didácticas. Por ejemplo, si se trata de la situación de la granja propuesta en la actividad anterior, se puede construir una situación en que el maestro maneje las siguientes variables:

– *La visibilidad de las clases*, ya que si aparecen a la vista de los niños ellos no sienten la necesidad de designarlas. Para que se suscite esa necesidad se puede manejar esa variable didáctica haciendo que las clases sean invisibles (por ejemplo, metiendo sus elementos en cajas iguales, se trate de las designaciones de los animales construidas anteriormente o de los modelos en miniatura de los mismos) y solicitando posteriormente a los niños una clase determinada. Seguramente surgirá de ellos la proposición de marcar las cajas con algún tipo de símbolo para estar seguros de seleccionar la caja pedida.

– Como vemos en las sugerencias que acabamos de dar para el planteamiento de la situación generadora de designaciones, se ha gestionado otra variable didáctica, la ***apariencia de las clases.*** En este caso, todas las clases se muestran con idéntica apariencia al estar contenidas en recipientes análogos.

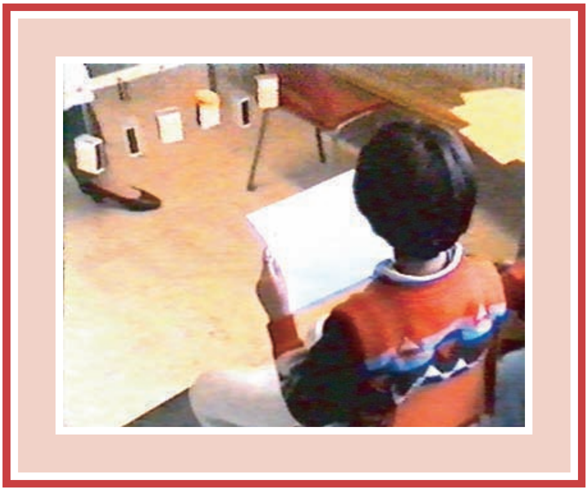
Parece lógica, después de los comentarios hechos sobre la designación de conjuntos, la recomendación de evitar una designación coincidente entre un elemento de las clases y la clase misma, por lo que en el caso eventual de que se produjera habría que plantear una situación suplementaria para deshacer el caso de homonimia generado.

## 3.7.5. La designación del orden lineal (el bastón[8])

Otro tipo de relaciones con el que se trabaja en Matemáticas, y en particular en la Matemática elemental, es el de las relaciones de orden que aplicadas a un conjunto provocan en él una ordenación total o parcial de sus elementos. En el ámbito de la Educación Infantil nos vamos a centrar, por ahora, en las relaciones de orden total y, en este tema, en la designación de las mismas.

Para ilustrar este tipo de relaciones, tomaremos prestada la situación de «el bastón», situación desarrollada en varias sesiones en la escuela Michelet[9] y que resulta modélica para poner de manifiesto el proceso de designación de un orden lineal. La situación consta de dos fases fundamentales:

- En la primera, se coloca un bastón apoyado en los respaldos de dos sillas y se cuelgan en él, mediante cuerdas, cajas grandes e idénticas de cerillas que contienen objetos familiares para los alumnos. Esas cajas se encuentran suspendidas más o menos uniformemente a lo largo de la longitud del bastón. Se meten los objetos en las cajas a la vista de todos los niños y se cierran. Al día siguiente la maestra llama a los niños por orden y va preguntando a cada uno qué hay en una caja determinada (se señala la caja correspondiente con una cartulina naranja). Si acierta, gana; si no, pierde. Evidentemente se producirá un fracaso generalizado en esta primera fase, ya que si hay algún acierto se deberá sobre todo al azar.



[8] Situación desarrollada y estudiada en el trabajo de J. Pères.

[9] Escuela dependiente del COREM (Centre d'Osservation et Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques), Bordeaux.

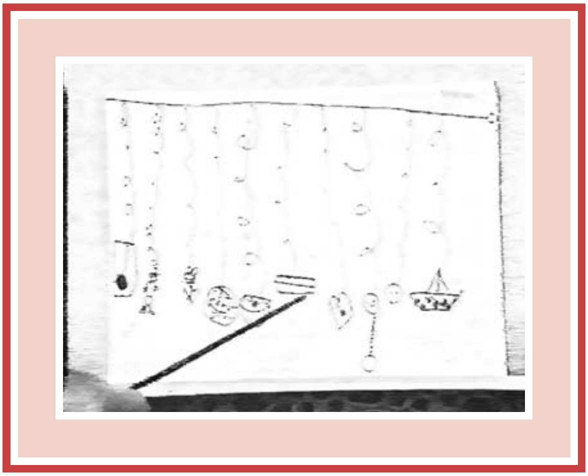
**Actividad 6:** ¿Cuáles son las variables didácticas que ha gestionado la maestra en el planteamiento de la situación?

Ante ese fracaso general, la maestra reúne a los niños en asamblea y les pregunta el porqué de ese fracaso. Responden que no pueden ver los objetos y que todas las cajas son iguales. La maestra pregunta entonces qué pueden hacer para acertar lo que hay escondido en la caja señalada. Transcurrido un tiempo, a alguno se le ocurre que pueden dibujar los objetos tal y como se encuentran suspendidos del bastón y, entonces, la maestra pone en marcha la segunda fase.

• En esta fase, se actúa igual que en la primera con un cambio sustancial: cada niño debe decir cuál es el objeto que se encuentra en la caja marcada por la maestra, pero ahora dispone del dibujo que ha hecho él sobre la situación de los objetos en el bastón.

Los niños producen una serie de representaciones sobre la situación de los objetos:

– *Designación de los elementos desordenados y distribuidos «al azar» sobre la hoja de papel*, que les conduce al fracaso seguro.

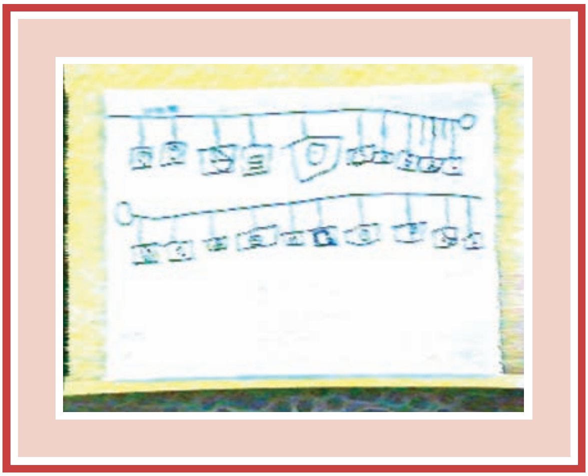


– *Designación en fila: en varias filas* (el papel se acaba y se continúa debajo), *en una sola y en desorden total, en una sola y con ciertas relaciones de vecindad.*

Para asegurarse de que se construye una representación correcta, la maestra va gestionando distintas variables didácticas tanto a la hora de poner al niño delante del bastón, como durante la representación que realiza el niño sobre la hoja de papel. Las principales variables gestionadas son:

– *¿Hay algo que indica una orientación del bastón?* Sí, desde el principio uno de los extremos del bastón está señalado con una flecha de cartón.

– *Orientación del bastón respecto al observador.* La maestra cambia la orientación del bastón respecto al sujeto, provocando que los niños produzcan una *representación en fila doble* (con los objetos colocados en orden inverso en una fila respecto a la otra), representación que no resuelve la situación pues los



niños no son capaces de coordinar cada fila representativa a su posición en el momento posterior de la prueba.

– *Posición de los objetos y del sujeto respecto al bastón.* A la hora de representar, la maestra coloca el bastón sobre la mesa con las cajas abiertas colocadas a ambos lados del bastón y el niño se puede sentar para dibujar de una parte o de la otra del bastón. La posición de los objetos a ambos lados del bastón no produce grandes problemas en ellos ya que, normalmente, los representan solo de una parte del bastón, mientras la posición del sujeto sí que causa problemas, al tener que coordinarla con la posición adoptada a la hora de la prueba.

Se requieren de 15 a 20 sesiones para que la mayoría de la clase llegue a la representación correcta después de haber desechado las que se revelan no válidas en el curso de las pruebas sucesivas a las que se somete al alumno.

### 3.7.6. La designación de procesos

La teoría matemática está llena de teoremas, proposiciones, corolarios, etc., que constituyen procesos designados con un uso importante de simbología de otros entes matemáticos más simples. Por ello es preciso acostumbrar al niño desde su infancia a la designación de procesos cercanos a él, con el fin de acostumbrarle a un tipo de designación compleja.

Plantear situaciones al niño para que designe esos procesos que le son familiares será tarea del maestro. Una posibilidad de diseño de situaciones nos la dan «las recetas de cocina» ya que, dejando aparte la motivación que generan en el niño, brindan una ocasión para la designación de esos procesos que comprenden a su vez otras designaciones más simples como son las de objetos, acciones y cantidades.

Conviene incidir, antes de plantear las situaciones de designación del proceso, en la designación de esos entes llamados cantidades. En Chamorro (2003)[10] encontramos numerosas referencias a la escritura de medidas y cantidades de magnitud, designación de entes que forma parte de distintos entornos de la medida señalados por esta autora. La asignación de sentido a esas escrituras no se produciría si no se hubiera dado antes una introducción a la designación de cantidades, ocasiones que nos brindan en bandeja todas estas situaciones de «las recetas de cocina».

Pensemos, por ejemplo, en la designación de «3 copas de almíbar». Si el niño ha designado anteriormente «la copa de almíbar» como (🍸) y dispone de ejemplares suficientes de esa designación, lo más seguro es que designe las tres copas de la siguiente forma: 🍸 🍸 🍸. Será el/la maestro/a el que, en un paso posterior de la situación, al gestionar las variables didácticas: *número de ejemplares de una designación* (se les proporciona solo un ejemplar de la copa) y *elementos de designación a disposición del niño* (aparte de la copa se le proporcionan ejemplares de los números escritos), induzca al alumno a producir designaciones del tipo 3 🍸. ¿No puede constituir este tipo de designación un precedente válido para designaciones posteriores como: 3 cm (en medida) o 3 x (en álgebra)?

Volviendo pues al tema central de este punto, es decir, a la designación de procesos, lo primero que hay que diseñar es una situación que obligue al niño a tomar la decisión de designar esa actividad compleja, y precisamente la receta proporciona tal posibilidad por la dificultad de recordarla y, por tanto, por la necesidad de tomar nota, es decir, de designarla con los medios que posee un niño de Infantil, medios que no incluyen normalmente la escritura.

Es preciso disponer de una serie de designaciones previas de objetos (la cuchara de azúcar), de acciones (montar las claras) y de cantidades. Se requiere pues un trabajo previo de simbolización sobre el que hemos tratado en puntos anteriores.

A partir de lo dicho anteriormente, se puede comprender que para llegar a la designación de un proceso es preciso montar una situación de comunicación (no oral) dentro de la clase, de forma que el intercambio de mensajes representados sobre la receta lleve a la elaboración, entre todos, de la mejor forma de designarla. Para plantear tal situación de formulación, será obligatorio manejar variables didácticas como las siguientes:

– *Composición de los dos polos comunicantes*, que dada la complejidad de la tarea, obligaría a organizar la clase en grupos.

---

[10] Chamorro, M. C.: «El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida», en Chamorro M. C. (coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, Madrid, Pearson Educación, 2003.

– *El orden de las diversas componentes del proceso*, que obligará a planear cuidadosamente primero la designación de objetos, después la designación de cantidades con los objetos designados antes y, por último, la designación de acciones que por fuerza deben contar con las designaciones producidas con anterioridad.

– *El grado de exigencia de validación de la situación respecto a la designación producida*, ya que la situación ha de prever la discusión entre los grupos designantes a propósito de las designaciones sucesivas que se van produciendo de forma que, al final, la designación del proceso sea un constructo colectivo que sirva para comunicarse entre los alumnos de la clase.

**Actividad 7:** Elegir una receta sencilla y planear las situaciones para designar los distintos entes componentes, especificando el orden en que se deberían emprender las distintas designaciones.

### 3.7.7. Codificación y decodificación

Esta doble actividad está muy relacionada con la designación de procesos, ya que entendemos la codificación como la elaboración sucesiva y ordenada de las múltiples designaciones que implica un proceso dado, mientras la decodificación sería la operación contraria, es decir, la realización material de un proceso a partir de una sucesión ordenada de designaciones.

Será necesario por tanto buscar situaciones que puedan dar lugar al doble itinerario de la codificación primero y después de la decodificación, dando así pleno sentido al ejercicio de la simbolización, con la traducción inversa que supone la práctica de la decodificación. «Las recetas» constituyen una situación que permite perfectamente ese doble itinerario: codificar la receta a partir de la descripción oral de la misma y realizarla a partir de la codificación obtenida anteriormente. Otra situación que permite ese doble itinerario y que da mucho juego en Educación Infantil es la de «Los cuentos». Todo cuento se puede codificar a partir de las designaciones primarias de los personajes y objetos principales, de las acciones más importantes y, en definitiva, de todo el proceso obtenido directamente de la narración que liga esas designaciones entre sí. Una actividad interesante es la decodificación del cuento, es decir, la realización del mismo, sobre todo si es un grupo el que decodifica a partir de la codificación construida por otro grupo diferente, lo que al final obliga a ponerse de acuerdo sobre las designaciones realizadas.

La utilización de diversos registros representativos adquiere todo su interés en estas operaciones de codificación y de decodificación. Normalmente se puede obtener organizando la clase en grupos y dando la posibilidad a cada grupo de elegir entre varios registros representativos. Por ejemplo, en el cuento de *Ca-*

*perucita roja*, el gorro rojo pertenece a un tipo de registro (simbólico), mientras el color rojo pertenece a otro tipo (signo).

Posteriormente, la coordinación de distintos registros de representación producirá un efecto tan importante para el desarrollo del pensamiento matemático como es el de la buena traducción entre ellos, lo que asegurará, en un futuro, la transición entre diversos registros de representación, intrínseca al modo de hacer en Matemáticas. No olvidemos que, como afirma Duval[11], «solo considerando simultáneamente dos (diversos) registros de representación, y no cada uno aisladamente, se puede analizar el funcionamiento cognitivo de las actividades matemáticas».

De momento nos debemos contentar con el establecimiento de bases para que el niño llegue a trabajar en un futuro con las Matemáticas y comprenda los procesos de codificación-decodificación implícitos en el modo de trabajar con las mismas, teniendo en cuenta que en el trabajo de traducción de un registro representativo a otro se da siempre el recurso mental implícito en la decodificación.

## 3.7.8. La designación de algoritmos. Un paso previo: la designación de ritmos

### 3.7.8.1. El algoritmo como instrumento matemático

¿Qué se entiende por algoritmo? He aquí lo que entienden diversos autores:

Un algoritmo es una organización estructurada de acciones elementales que satisfacen las condiciones siguientes:

1. Las acciones elementales se ejecutan en un conjunto finito conocido.
2. Hay una primera acción perfectamente determinada, siempre igual cualesquiera que sean las condiciones iniciales.
3. Dadas unas condiciones iniciales, después de ejecutada cada acción, se sabe sin ambigüedad cuál es la acción siguiente.
4. Cualesquiera que sean las condiciones iniciales se llega siempre a una última acción (no siempre la misma obligatoriamente) (Balachef, 1981).

Un algoritmo es una lista de procesos elementales que conducen a la resolución de un problema (Engel, 1976).

Un caso muy particular de algoritmo es el ritmo, que es una sucesión finita y ordenada de objetos en que la operación básica es «pasar al siguiente» (Balachef, 1981).

Freudenthal, por otra parte, considera el lenguaje algebraico como fundamentalmente algorítmico (Freudenthal, 1983).

[11] Duval, R.: «Quale cognitivo per la didattica della matematica?», *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, pp. 250-269.

Manejando las ideas expresadas en todas y cada una de estas definiciones, cualquier actividad sobre algoritmos que se practique con los niños les llevará a familiarizarse con un número finito de reglas, que pueden ser reiteradas indefinidamente, y que darán lugar a ramificaciones en los campos más diversos de la Matemática, no solo en el algebraico.

Numerosas actividades practicadas en las aulas de Infantil tienen una base eminentemente algorítmica (pliegues, series, recortados, etc.) y el maestro debe ser consciente de la dirección y el objetivo de tales actividades, que se resumen principalmente en la adecuación a una regla o al seguimiento de la misma cualquiera que sea el punto de partida. Hay que pensar que el niño es capaz de realizar esas actividades:

– Bien porque descubre intuitivamente la regla (por ejemplo, en la ejecución de un ejercicio dinámico).

– Bien porque la descubre a fuerza de repetir intentos (por ejemplo, en la ejecución de un plegado).

– Bien por el seguimiento de unas reglas rígidamente establecidas (por ejemplo, en el montaje de una construcción).

Sin embargo, se debe tener en cuenta que la aplicación de unas reglas no implica necesariamente que se sepan explicar.

**Actividad 8:** Realizar las operaciones siguientes: 354 x 207 y 62 483:307. A continuación, explique minuciosamente cada uno de los pasos del algoritmo aplicado en cada operación.

La dificultad de esta actividad nos puede dar una idea de la importancia que tienen los algoritmos en la enseñanza elemental y, al mismo tiempo, de la importancia que adquiere la introducción temprana de estos instrumentos matemáticos esenciales.

### 3.7.8.2. El ritmo como instrumento didáctico de aproximación a la idea de algoritmo

El ritmo, como algoritmo básico, constituye un excelente punto de partida para la introducción de ese importante instrumento matemático.

Vamos a sugerir, pues, una progresión didáctica para la introducción de ritmos y de su designación.

1. *Ritmos onomatopéyicos:*

– Con las manos: palmada, golpe en la mesa, palmada, golpe en la mesa…;
– 2 palmadas, 1 golpe en la mesa, 2 palmadas, 1 golpe en la mesa…

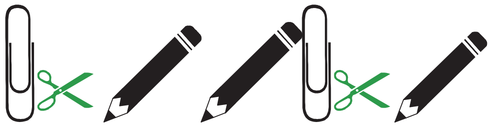
– Con instrumentos: toque de tambor, redoble, toque, redoble…;
– Toque de tambor, toque de silbato, toque de maracas, toque de tambor, de silbato, de maracas…

2. *Sucesiones de colores:*

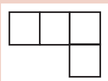
– Con fichas: ●○◉○◉…, donde: ● rojo ○ amarillo ◉ azul
– Con trazos: ⇆⇆↑↑↓↓⇆⇆↑↑↓↓ …, donde: ⇆ verde ↑↑ rosa ↓↓ marrón

3. *Ejercicios de expresión dinámica o plástica:*

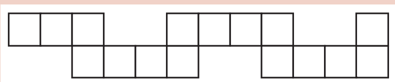
– Paso adelante, paso atrás, paso derecha, paso izquierda, paso adelante, paso atrás, paso derecha, paso izquierda…
– Posiciones del cuerpo en fila: 4 niños en fila enfrentados por parejas (un niño frente a otro mirándose)…
– Guiño, elevación de cejas, ojos cerrados, ojos cerrados, elevación de cejas, guiño…
– Colocación de objetos:

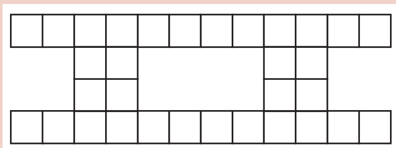

…

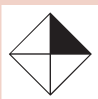
– Ritmos dibujados: ◀ ▶ ◀ ▶ …
…, ▶■● ◀ ▶■● … (Continuar por ambos lados)
▲◆◗◗◆▲… ◆… ◗… (Completar)
– Ritmos de expresión plástica:

Con el polimino 

construir:



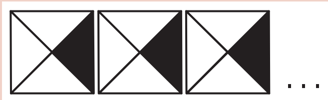


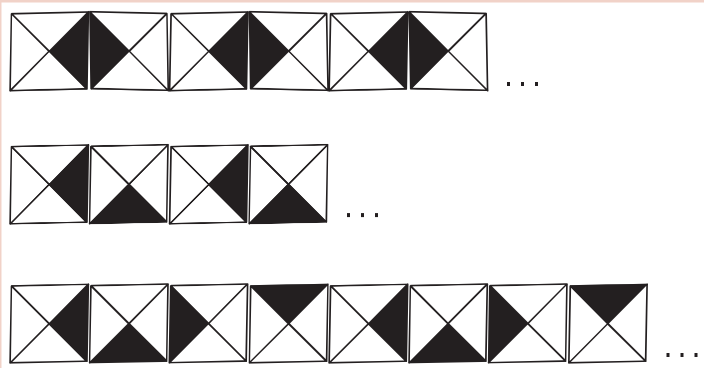
Con fichas como 

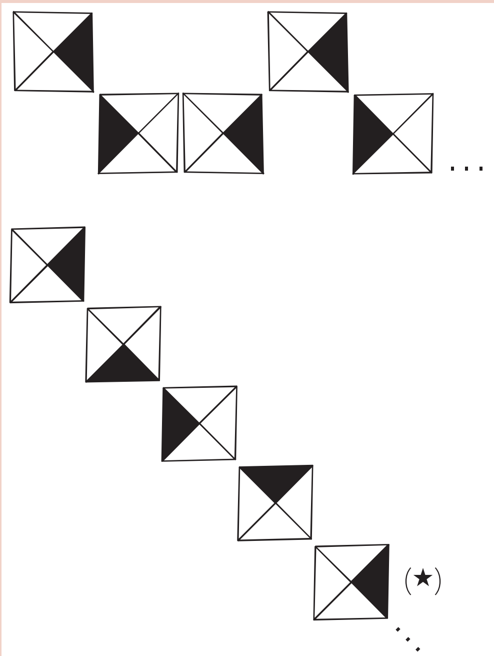
*Continúa*

*Continuación*

construir:







Se trata, en todos ellos, de seguir la pauta iniciada, de forma que haya una señal clara de que el alumno comprende cómo se desarrolla el ritmo comenzado.

Conviene trabajar con la designación de ritmos, aunque la propia plasmación de cada uno de ellos constituya ya una designación en el lenguaje particular de que se trate en cada categoría.

Por ejemplo, en el ritmo señalado (★), se puede conseguir una designación del mismo, planteando una comunicación por parejas de forma que uno deba transmitir a otro cómo construirlo si dispone de una sola ficha. Una posible solución sería: izquierda, arriba, derecha, abajo, refiriéndose a la orientación del triángulo negro y comunicándolo con palabras. Otra sería ⇐⇑⇒⇓, refiriéndose a lo mismo y sin usar palabras.

Como vemos en todos ellos, es esencial la gestión de algunas variables didácticas, entre ellas:

– *La longitud de la célula*, entendiendo esta como el ciclo mínimo que se repite a lo largo del ritmo.

– *La composición de la célula*, que dependiendo de ella se complicará más o menos la dificultad del ritmo.

– *Las posibilidades de uso de distintos registros representativos a disposición*, que pueden ser ofrecidas por el maestro a los niños, con la única condición de que sean ellos los que elijan la que más les conviene.

**Actividad 9:** Plantear una serie de ritmos para que los continúen los alumnos, en los que se gestione la variable didáctica de la composición de la célula (debe variar entre 3 y 6 elementos componentes).

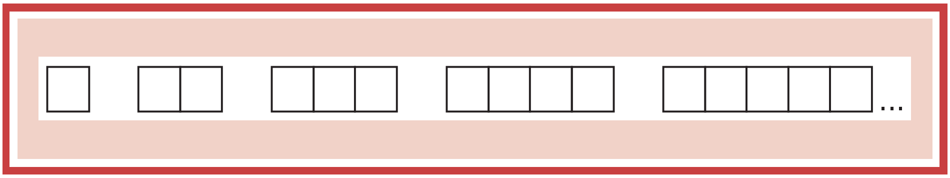
## 3.7.9. La designación de algoritmos recursivos. Comunicación de la regla de formación

La introducción del número, desde la Educación Infantil y durante toda la enseñanza elemental, exige plantear a los alumnos de los primeros niveles educativos algoritmos que vayan más allá de la simple repetición que implica un ritmo. Esa mayor complicación de los algoritmos se refleja perfectamente en los algoritmos recursivos.

### 3.7.9.1. Los algoritmos recursivos

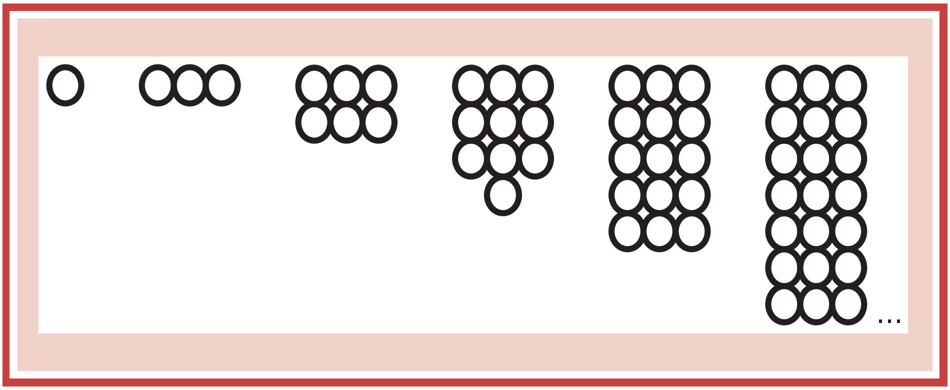
En el algoritmo recursivo no se da una simple repetición de una célula, sino que se da la repetición de una regla de formación que hace que la sucesión de elementos obtenida sea diferente a medida que el algoritmo se desarrolla.

Ejemplo:



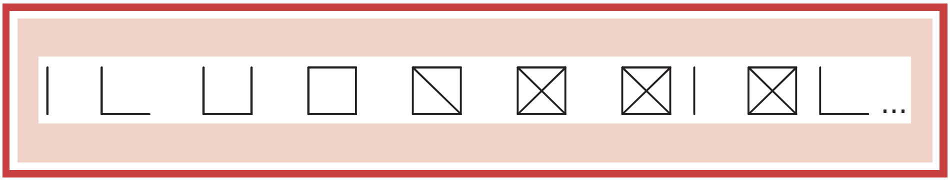
Este algoritmo, el recursivo más simple que se puede construir, tiene una regla evidente que se repite para pasar de un elemento a otro. ¿Cuál es esa regla?

Otro ejemplo:



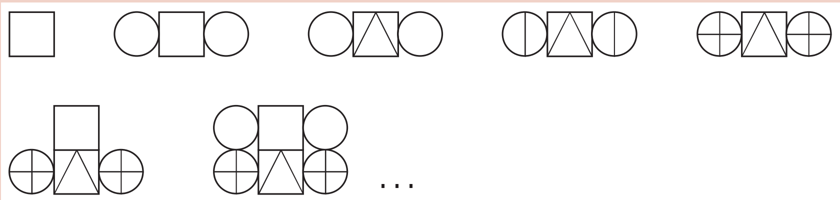
En este la búsqueda de la regla es más difícil. Para pasar al siguiente hay que ir añadiendo el número de círculos «que indica su posición, más el número usado en el paso anterior», siempre que se haya comenzado con uno solo.

Veamos algún otro:



**Actividad 10:** ¿Cuál será el elemento duodécimo de este algoritmo? ¿Y el vigésimo?

Complete a derecha e izquierda. ¿Cuál es el primer elemento?



Se aprecia, en este algoritmo, la dificultad de enunciar la regla de formación. Resulta mucho más fácil continuarlo icónicamente.

m omo momom omomomo…

Tampoco aquí es trivial el enunciado de la regla y, sin embargo, resulta simple la generación de nuevas palabras.

Creemos que esta muestra logra dar una idea de la variedad de algoritmos que se pueden plantear de forma que el alumno pueda enunciar la regla de formación, o bien continuarlos, completarlos, etc.

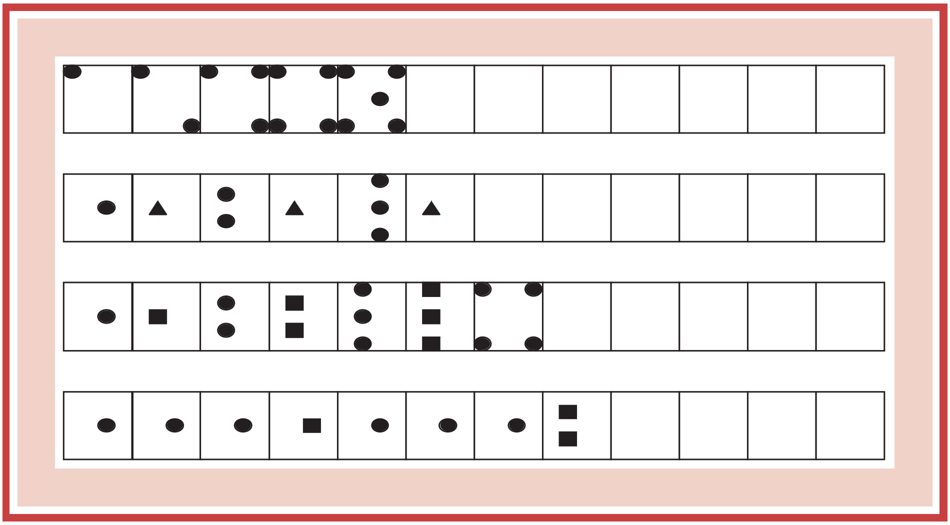
La construcción de algoritmos icónicos se puede complicar si exigimos que estos se desarrollen en un espacio cerrado. Es el caso que se plantea si se quieren construir collares o grecas siguiendo una determinada regla, sea recursiva o no, ya que el cierre del collar o de la greca se ha de practicar de forma que se respete la regla de formación del algoritmo (no es posible dejar a medias el cumplimiento de la regla de formación).

**Actividad 11:** Construir un collar con cuentas esféricas y cúbicas, de forma que vayan intercaladas las formas y se respete la regla de formación de los números naturales, es decir, se debe desarrollar, por ejemplo, así: 1 esfera, 2 cubos, 3 esferas, 4 cubos, etc. ¿Se puede partir de cualquier longitud de cuerda de forma que se respete el algoritmo hasta un límite dado?

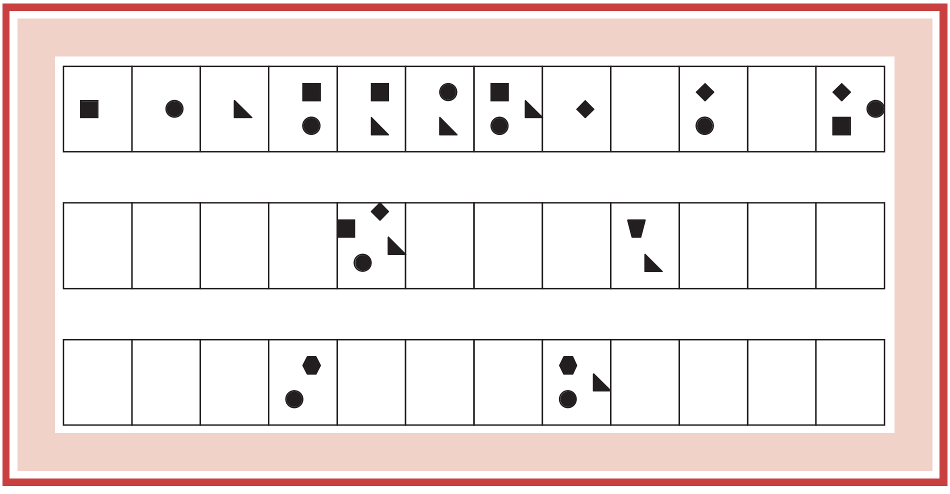
### 3.7.9.2. Una introducción al algoritmo de la numeración

La siguiente proposición de algoritmos prepara al alumno de Infantil para la introducción de los sistemas de numeración y, en particular, para la introducción del algoritmo del sistema de numeración decimal.

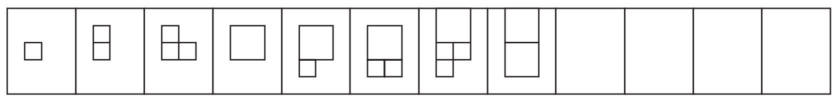
Continuar:



Completar:



Continuar:



La construcción, seguimiento y comprensión de algoritmos parecidos a estos puede constituir una ayuda más para la construcción del número natural, objetivo irrenunciable en los primeros niveles de enseñanza.

Pero el trabajo con cualquier tipo de algoritmo no quedará completo si no se emprende, a continuación, una tarea complementaria de designación de los algoritmos construidos, designación que se deberá centrar, sobre todo, en la simbolización de la regla de formación del algoritmo. Para ello la situación planteada al alumno debe hacer que este sienta la necesidad de designarlo y ello no será posible si tal situación no comprende una comunicación entre los propios alumnos en torno al algoritmo que se va a representar, es decir, que el itinerario que debería plantear la situación sería:

1. Seguimiento y construcción del algoritmo, hasta que no haya duda sobre cuál es el siguiente de cualquier elemento del mismo.
2. Comunicación a otro del algoritmo sin que ese otro lo pueda ver, lo que implica buscar alguna forma de designación del mismo.
3. Construcción del algoritmo a partir de la designación recibida.
4. Comprobación de la construcción comparando el algoritmo de partida y el de llegada (cada uno lo ha construido una persona diferente).

Para que la comunicación sea efectiva el/la maestro/a tendrá que gestionar las siguientes variables didácticas:

– *El espacio disponible*, tanto cuando se le da al niño el algoritmo comenzado (debe poderse prever la regla de formación) como cuando se le plantea rellenar una serie de lugares (tendrán que ser los necesarios para captar si el alumno ha descubierto o no la regla de formación).

– *El tiempo disponible*, que dependerá evidentemente de la complicación de la regla de formación.

– *El número de elementos representativos a disposición* del alumno (habrán de ser siempre más de los necesarios, e incluso de registros distintos a los usados en el algoritmo propuesto).

Esta última variable introduce un tema siempre importante en cualquier ejercicio de designación, es el de los registros de representación de que se dispone para representar el algoritmo. Evidentemente habrá unos registros más apropiados que otros para representar cada algoritmo dado. Está claro que un registro fundamental para representar un algoritmo geométrico será el de las figuras geométricas elementales, mientras que para representar un algoritmo numérico o prenumérico habrá un registro de representación preferente, el de los números naturales.

Por último, querríamos aludir al trabajo de codificación-decodificación que implica el ejercicio de construcción y designación de algoritmos, ya que en los cuatro pasos del itinerario antes descrito hay, evidentemente, una transición continua entre representaciones distintas del algoritmo.

## 3.8. Bibliografía

BROUSSEAU, G.: *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 1988.

BOULE, F.: *Manipular, organizar, representar*, Narcea, Colección Primeros pasos, Madrid, 1995.

CHAMORRO, M. C.: *El aprendizaje significativo en Matemáticas*, Alhambra-Longman, Madrid, 1992.

CHAMORRO, M. C. y Belmonte, J. M.: *Iniciación a la lógica matemática. Jugar y pensar 1 y 2*, Alhambra-Longman, Madrid, 1996.

CHAMORRO M. C. *et alii: Didáctica de las Matemáticas*, Pearson Prentice Hall, Madrid, 2003.

DUVAL, R.: «Quale cognitivo per la didattica della matematica?»: *La matematica e la sua didattica*, n.º 3, 1996, pp. 250-269.

GRAND N: *Mathématiques en Maternelle*, Grenoble, Numéro spécial de la revue Grand N, París, CNRP.

PÈRES, J.: *Construction et utilisation d'un code de désignation à l'école maternelle*, IREM de Bordeaux, Bordeaux, 1987.

PIAGET, J.: *La formación del símbolo en el niño*, Fondo de Cultura Económica, México, 1961.

VECINO, F.: *Los aspectos métricos de la representación espacial en los primeros años de la escuela elemental*, tesis doctoral, UNED, Madrid, 1996.

—: «Aspetto semiotico delle rappresentazioni spaziali del bambino», *La matemática e la sua didattica*, 1997, 3, 272-288.

—: «La representación del espacio en la transición de la escuela infantil a la escuela primaria», UNO, 1997, 93-107.

CAPÍTULO 4

# La actividad lógica en la Escuela Infantil

LUISA RUIZ HIGUERAS

## Contenidos

*El aprendizaje más fundamental que los niños pueden encontrar en las matemáticas, en la escuela infantil y primaria, es el de la gestión personal y social de la verdad. Las matemáticas no tienen el monopolio de la investigación de la verdad, pero constituyen el dominio donde la encuentran más precozmente y donde pueden aprender a tratarla con el menor número de saberes previos.*

GUY BROUSSEAU[1]

## 4.1. Introducción

En la vida cotidiana se escuchan con mucha frecuencia expresiones como estas: «¡Es lógico!» o «¡Es razonable!», lo que supone considerar un argumento «lógico» como un argumento razonable, es decir, conforme al buen sentido. Esto supone la aceptación o el rechazo de un razonamiento, es decir, su validez en el contexto donde se ha establecido un debate.

Si tuviésemos que determinar brevemente *qué es la lógica*, con toda seguridad podríamos dar muy diferentes respuestas:

– El arte de razonar bien.
– Un método que permite argumentar correctamente.
– La ciencia de la demostración.
– Una disciplina cuya norma de funcionamiento se basa en el establecimiento de la verdad.
– El estudio de las leyes del pensamiento.
– El estudio de los fundamentos teóricos de la informática, etc.

Todas estas posibles respuestas han transitado a través de la historia de la lógica, el estudio profundo de cada una de ellas nos permitiría mostrar cómo ha evolucionado la lógica a través de los siglos.

La lógica clásica fue desarrollada para establecer las bases del razonamiento y para construir un fundamento teórico de las matemáticas y otras ciencias deductivas. «Se trata de una disciplina matemática cuyo objeto es el estudio de los tipos de argumentos lógicos y de su validez» (Orús)[2].

[1] Brousseau, G.: *Les Mathématiques à l'école*, Conferencia, 1998.
[2] Orús, P.: *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effects d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*, tesis, Université de Bordeaux I, 1992, p. 39.

En el transcurso del tiempo, múltiples trabajos de filósofos y especialistas en lógica han contribuido a construir un cuerpo teórico denominado *lógica formal* que da cuenta de las leyes del pensamiento humano o pensamiento natural. Los modelos propuestos aportan gran claridad sobre el funcionamiento del *pensamiento natural*, aunque existe una gran distancia entre el lenguaje de la lógica formal y la lógica del lenguaje natural. Por ejemplo, la afirmación de una persona: «Soy un mentiroso», en la lógica formal constituye una paradoja, mientras que en el lenguaje natural es perfectamente admisible.

La lógica natural es uno de los constituyentes del sistema cognitivo de todo sujeto y normalmente se designa como prelógica al nivel más inferior (o nivel cero) de la lógica natural. Justamente este es el nivel que tienen los niños que acceden a la Escuela Infantil.

Si es necesario poseer un cierto número de llaves para entrar en el mundo de las matemáticas y para explorar todas sus posibilidades, podemos afirmar, sin lugar a dudas, que el razonamiento lógico constituye una de las más importantes llaves de entrada.

El razonamiento y, en consecuencia, la lógica, se impone como una necesidad para la construcción no solo de los conocimientos matemáticos sino de cualquier otro conocimiento perteneciente a otras áreas del currículo, aunque, en especial, su presencia se requiere singularmente en matemáticas.

Para adentrarnos en este dominio, proponemos resolver las actividades 1 y 2 que se presentan a continuación y estudiar las dos situaciones que se ofrecen en el ejemplo 1.

**Actividad 1:** Lea detenidamente el relato de los siguientes hechos:

El ladrón que la policía busca procede siempre del mismo modo:

- Si hay una señal de alarma sobre la puerta, entra por la ventana.
- Si entra por la ventana, rompe el cristal.

En su último robo se sabe que el ladrón entró por la ventana.

Señale la conclusión o conclusiones que a tu juicio sean verdaderas:

En este robo…

- el ladrón ha roto un cristal.
- el ladrón no ha roto un cristal.
- no podemos saber si el ladrón ha roto un cristal.
- había una señal de alarma sobre la puerta.
- no había una señal de alarma sobre la puerta.
- no podemos saber si había una señal de alarma sobre la puerta.

**Actividad 2:** Lea detenidamente el relato de los siguientes hechos:

Un comerciante acaba de abrir las puertas de un establecimiento cuando se presenta un hombre pidiendo dinero. Su propietario abre la caja registradora. El dinero que contiene la caja se retira a toda prisa. A continuación, alguien corre. Se avisa inmediatamente a la policía.

Señale la conclusión o conclusiones que a su juicio sean verdaderas:

- Mientras el propietario de un establecimiento encendía las luces, se presentó un hombre.
- El ladrón fue un hombre.
- El hombre que abrió la caja registradora era el propietario.
- El hombre que pidió dinero, tras tomar todo el dinero de la caja registradora, huyó.
- El ladrón pidió todo el dinero de la caja registradora al propietario
- Los acontecimientos relatados se refieren a cuatro personas distintas: el propietario del establecimiento, el comerciante, un hombre que pide dinero y otro que huye.
- Ocurrieron, entre otros, los siguientes acontecimientos: alguien pidió dinero, una caja registradora se abrió, el dinero que contenía se retiró y un policía fue avisado por teléfono.

Para resolver correctamente estas actividades las personas adultas recurrimos a lo que se denomina, normalmente, razonar con lógica. Es decir, tratamos de encontrar la solución aplicando criterios que nos permitan establecer relaciones lógicas entre los hechos relatados (las premisas de partida) y las posibles conclusiones que se deriven de ellos.

Leamos detenidamente el ejemplo 1 donde se nos muestran algunos casos de razonamientos de niños en edad escolar.

**Ejemplo 1:**

**1.ª situación:**

*Pedro tiene cuatro años y es un apasionado de los dibujos animados. Sabe que los sábados pasan en la televisión la serie* El osito Misha *y, tan pronto como se levanta de la cama, pide a su mamá que le encienda el televisor para poder verla. Su madre le dice que debe esperar, ya que esa serie comienza «después de comer». Pedro le responde: «Mamá, dame la comida ahora mismo, y ya puedo ver la película».*

Como hemos podido observar Pedro no razona lógicamente, tal como lo haría una persona adulta. Su madre enuncia la expresión «después de comer» con un sentido genérico, indicativo de una hora socialmente aceptada y que normalmente, en nuestro país, va desde las 14 horas a las 15.30 aproximadamente. Pedro no capta el sentido de esta expresión porque su razonamiento en esta edad tiene caracteres prelógicos que le impiden, entre otras muchas actividades, generalizar, como consecuencia

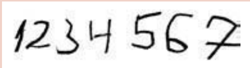
*Continúa*

*Continuación*

de su transductividad y egocentrismo. Para Pedro, conocer el significado de la palabra «comer», no garantiza la compresión lógica de la situación.

**2.ª situación:**

*Una profesora de Educación Infantil solicita a sus alumnos (4-5 años) que le pidan, mediante un mensaje escrito, el número de pegatinas necesario para cubrir en una ficha los pétalos de una flor. Marta le entrega el siguiente mensaje:*




Si analizamos la producción de Marta, podemos observar que para pedir 7 pegatinas, ella necesita emplear las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. En su petición, para cada pegatina precisa escribir una cifra indicativa. La cifra 7 no le es suficiente para determinar el cardinal de toda la colección. Marta tiene problemas para llevar a cabo la cardinación de colecciones. Su origen está muy relacionado con una falta de razonamiento lógico sobre la significación de la inclusión jerárquica de clases, debido a las limitaciones de su desarrollo genético.

Los profesores de la Escuela Infantil, a lo largo de sus años de experiencia en las aulas, se encuentran con casos análogos a los mostrados: errores debidos a la falta de razonamiento lógico. Para evitarlos, tratan de suscitar entre los alumnos razonamientos correctos, es decir, lo más lógicos posible. Cabe señalar, en este sentido, que es justamente la calidad de sus razonamientos uno de los indicadores que emplea, en general, todo el profesorado para identificar a los mejores alumnos.

Pero a diferencia de los niños de los cursos superiores, los niños de la Escuela Infantil y primer ciclo de la Escuela Primaria, disponen de un razonamiento que tiene caracteres prelógicos debido a las limitaciones de su desarrollo genético. Por ello, el profesor debe diseñar, organizar y conducir a sus alumnos a través de situaciones de enseñanza-aprendizaje que les permita evolucionar, desarrollando conocimientos lógicos y superando determinados obstáculos ontogenéticos propios de esta edad.

A lo largo de este capítulo nos interesaremos por el estudio, desde la Didáctica de las Matemáticas, de la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos lógicos en la Escuela Infantil.

## 4.2. Objetivos

– Estudiar y analizar, desde el punto de vista matemático y didáctico, las nociones relativas a los conocimientos lógico-matemáticos que integran este capítulo: proposiciones, predicados, clasificaciones, relaciones de orden, etc.

– Aproximarnos a diferentes modelos de enseñanza de los conocimientos lógicos prenuméricos para determinar cómo la institución escolar ha considerado, y considera en la actualidad, estos conocimientos matemáticos en la Escuela Infantil.

– Construir, bajo una hipótesis constructivista por *adaptación al medio*, situaciones de enseñanza-aprendizaje de conocimientos lógico-matemáticos en la Escuela Infantil.

– Analizar las situaciones que pueden dar significación al aprendizaje de las actividades lógicas en la Escuela Infantil.

– Determinar y analizar los procedimientos que pueden emplear los niños en la resolución de las situaciones anteriores, así como la actividad matemática que desarrollan con ellos.

– Llevar a cabo análisis didácticos de situaciones de enseñanza-aprendizaje de conocimientos lógico-matemáticos.

– Analizar errores cometidos por los niños en relación con estos conocimientos matemáticos e identificar sus causas.

## 4.3. Breve revisión histórica de la enseñanza de los conocimientos lógicos prenuméricos

Para comprender mejor la posición y el sentido de los contenidos lógico-matemáticos que figuran actualmente en los programas escolares conviene llevar a cabo una breve revisión que nos permita aproximarnos a su evolución a través de diferentes épocas.

Los programas anteriores al año 1971 no hacen mención explícita de conocimientos lógicos prenuméricos, sino que proponen, como objetivo primordial de la escuela, denominada entonces «de párvulos», enseñar el recitado y la es-

*Medina (1956): Paisajes numéricos para la adquisición del número 4.*

critura de la serie de los primeros números, así como su composición y descomposición.

A partir del año 1971, los nuevos programas para la reforma educativa, fuertemente influenciados por las teorías de Piaget y por las *matemáticas modernas*, llevan a cabo la implantación de la teoría de conjuntos en la enseñanza. Se modificaron sustancialmente todos los contenidos y se propuso por primera vez en los programas de Educación Preescolar la enseñanza de conocimientos denominados «prenuméricos», es decir, conocimientos considerados como preparatorios para la construcción del número: conjuntos, correspondencias, aplicaciones, clasificaciones, seriaciones, ordenaciones, etc. Su articulación se sustentaba sobre una estructura basada en la lógica proposicional y en la teoría de conjuntos y se concretaba en estos niveles con el recurso a los diagramas de Venn, de Carroll, etc.

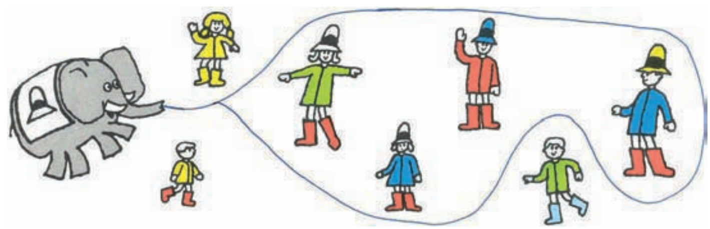


*Diagrama de Venn (Zoo, Dienes, 1982).*

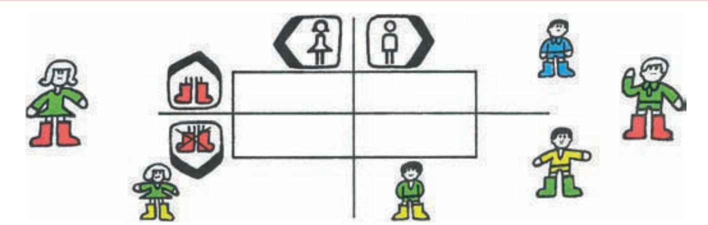


*Diagrama de Carroll (Zoo, Dienes, 1982).*

En los programas oficiales para la Educación Preescolar (1973) se propone llevar a cabo actividades para:

– Clasificar objetos.
– Ordenar objetos.
– Adquirir la idea de conjunto.
– Introducir funcionalmente la idea de número mediante los conjuntos coordinables.

Educación Preescolar, Orientaciones Pedagógicas, 1973, BOE, 186, p. 1490

La teoría de conjuntos suministró un lenguaje que permitía expresar de forma muy simple y concreta los elementos básicos de la lógica matemática a niños de edades muy tempranas[3]. Estos alumnos llevarán a cabo operaciones con conjuntos[4], consideradas como preparatorias para la construcción del número. Así, las correspondencias, aplicaciones, clasificaciones, ordenaciones se designarán como saberes lógicos prenuméricos.

> Todas las actividades prenuméricas de agrupamiento, de ordenación, de clasificación, vienen a ser el basamento de todo el edificio matemático. Es, pues, fácil de comprender que se queman etapas y se atropella el orden necesario cuando se pone al niño sin preparación frente al número (Díaz, 1970, p. 57)[5].

Las posteriores modificaciones de estos programas constituyeron los denominados Programas Renovados para la Educación Preescolar (1981), en los que, de nuevo, se volvía a hacer hincapié en la necesidad de desarrollar el pensamiento lógico prenumérico en los alumnos de este nivel, señalando que:

> Es, por lo tanto, imprescindible, antes de llegar a la idea de número, que el niño realice actividades de formación de conjuntos, correspondencias entre conjuntos, clasificaciones, hasta llegar a la coordinabilidad de conjuntos [...]. Tanto las seriaciones como las clasificaciones son tipos de experiencias a realizar en el período prenumérico (Programas Renovados, 1981, pp. 52-56).

Cabe señalar que, en muchas ocasiones, basta revisar fichas y textos escolares de Educación Infantil, el trabajo de los niños con estos objetos matemáticos constituía una actividad banal, es suficiente ver la figura de la página siguiente (Dienes, 1982)[6].

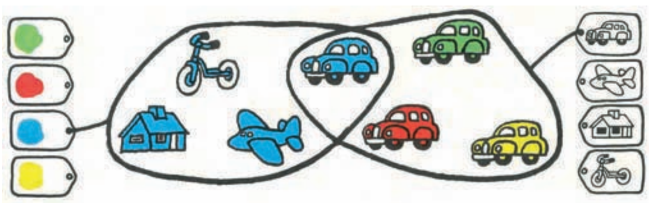
---

[3] Se proponía trabajar en estos niveles: relaciones de pertenecia, de inclusión, cuantificadores lógicos, funciones proposicionales, clases y operaciones lógicas sobre clases, aplicaciones, relaciones binarias, etc.

[4] «La noción de colección pasó del lenguaje metamatemático al lenguaje matemático, y tomando, generalmente, el nombre de "conjunto" pasó a la enseñanza desde los niveles más inferiores de la educación», Orús, 1992, p. 168, *Ibidem*.

[5] Díaz Arnal, I.: «Las nuevas directrices en la Enseñanza Matemática y su resonancia internacional», *Vida Escolar*, 118-119, 1970.

[6] Dienes, Z.: *Zoo*, Teide, Madrid, 1982.



Intersección de conjuntos (Zoo, Dienes, 1982).

Los Diseños Curriculares (1992)[7] pretendieron transformar el paisaje prenumérico y su aproximación en la enseñanza. De hecho, no se hace referencia explícita a ningún tipo de conocimiento designado como prenumérico. Basta constatar que, en las fichas y materiales escolares emanados de esta reforma, han desaparecido totalmente actividades como las señaladas en las figuras anteriores. No obstante, en la propuesta de secuenciación de contenidos, antes de abordar los aspectos numéricos, se propone trabajar con los objetos para formar colecciones y establecer diversos tipos de relaciones.

> Las situaciones de enseñanza-aprendizaje deben plantearse a partir de experiencias concretas, donde los niños encuentren sentido a comparar, agrupar, ordenar, seleccionar, colocar, repartir, quitar o añadir.
>
> Las acciones con y sobre los objetos permitirán agrupar y comparar objetos atendiendo a categorías, atributos sensoriales y conceptuales, así como verbalizar el criterio de pertenencia o no pertenencia de un objeto a la colección y representar colecciones ya formadas...
>
> La ordenación de objetos y la identificación de la ley de una serie ya formada, así como la identificación de las relaciones de similitud cualitativa y cuantitativa, son contenidos que los niños pueden abordar.
>
> DCB, Educación Infantil, 1993, p. 60

En suma, han existido diferentes modelos en la organización de los conocimientos lógicos-prenuméricos en la Educación Infantil: desde su ausencia total (años anteriores a la década de los setenta), hasta su consideración explícita como saberes básicos para el aprendizaje del número (décadas de los años setenta y ochenta). En la actualidad, no se identifica explícitamente un bloque de conocimientos como saberes lógicos prenuméricos, aunque, como acabamos

[7] En los DCB actuales, los conocimientos matemáticos de la Escuela Infantil constituyen el área de Expresión matemática y se ubican dentro del ámbito de Comunicación y representación, junto con las restantes áreas de expresión: Lingüística, Corporal, Plástica y Música.

### Limitaciones que impiden a los niños de la Escuela Infantil pensar lógicamente: Origen de obstáculos ontogenéticos[8]

Los niños de Educación Infantil (3 a 6 años) se encuentran en el período que Piaget denominó *período de preparación y organización de las operaciones concretas* (de 2 a 11 años). En la fase preoperacional (2 a 4 años) uno de los problemas más importantes que tienen es la incapacidad para distinguir entre significante y significado, de ver la diferencia entre el signo y el objeto concreto al que representa. Los niños en esta fase están desarrollando patrones de pensamiento intuitivo, utilizan un lenguaje cada vez más apropiado, aunque no siempre con el mismo significado que le dan los adultos. El proceso que les conduce a la causalidad, la verdad o falsedad está basado en un pensamiento incompleto. Los niños toman decisiones basándose en la intuición, mientras que los adultos se apoyan en razonamientos lógicos. El desarrollo de la relación lógica (la necesidad lógica) coincide con la etapa de la socialización del pensamiento. A partir de este momento los niños comienzan el desarrollo de los porqués lógicos (relaciones lógicas) y sus primeros razonamientos deductivos correctos, aunque la deducción se apoya sobre sus creencias, es decir, sobre la realidad tal como ellos la conciben personalmente.

Existen diversas limitaciones que impiden a los niños pensar lógicamente, entre ellas, destacamos las siguientes características de su pensamiento:

- *Egocentrismo.* Observan cualquier problema desde su propio punto de vista, no se preocupan por comprender el de otra persona. Si su propia creencia o afirmación es evidente, le resulta imposible ponerse en el punto de vista de otra persona. Para él no es necesario buscar una prueba o justificación lógica, entiende que será evidente para los demás lo que es evidente para él mismo.

El egocentrismo está en la base del realismo infantil, supone su incapacidad para comprender la relatividad de las cuestiones o hechos que son manifiestamente relativos para los adultos. Consideran su existencia de forma absoluta.

A lo largo de este período el niño va evolucionando desde el *lenguaje egocéntrico* que puede utilizar con otros o solo, pero cuya función primaria es la comunicación consigo mismo, hacia el *lenguaje socializado* que tiene como función la comunicación con los demás.

- *Falta de introspección.* Se trata de la falta de consciencia que tienen los niños de su propio pensamiento, así como de sus propios razonamientos. Su capacidad instrospectiva es muy reducida: si le preguntamos cómo ha conseguido solucionar una situación problemática, es incapaz de expresar cómo la ha resuelto.
- *Transducción.* Es un modo de razonamiento que procede de lo particular a lo particular, sin ningún tipo de generalización o rigor lógico. El niño afirma sin pruebas y no es capaz de dar demostraciones o justificaciones lógicas de sus creencias.

La incapacidad de los niños para llevar a cabo una correcta diferenciación entre los aspectos transitorios y permanentes de la realidad, entre los objetivos y los subjetivos, entre los universales y particulares, constituye un indicio de su egocentrismo, de su falta de introspección y de su transductividad. Se ha denominado también etapa de *pensamiento prelógico* por falta de una lógica de clases y una lógica de relaciones.

*Continúa*

[8] Esta noción se estudia en el capítulo 1 de este libro.

*Continuación*

Será a partir de los 7 u 8 años de edad cuando, en la vida intelectual del niño, aparecerá una declinación del egocentrismo y un deseo de verificación o justificación lógica. No es casual ni por azar que esto se produzca en esta edad y alrededor de la etapa de la socialización: la justificación lógica es una necesidad social que no nace espontáneamente en el niño, en tanto que individuo. La demostración nace de la discusión y de la necesidad de convencer, es esta necesidad la que hace de la justificación lógica un producto de la vida social que no puede nacer en el seno de la vida individual.

Las características del pensamiento infantil citadas anteriormente y otras como la falta de articulación lógica en las relaciones, el realismo, el sincretismo, etc., constituyen verdaderos **obstáculos ontogenéticos** a los que el alumno se debe enfrentar en su proceso de aprendizaje.

de mostrar, antes de iniciar el trabajo con el número, se propone trabajar ampliamente con las colecciones y con todo tipo de relaciones.

## 4.4. La actividad lógica en la Escuela Infantil: una nueva concepción de los conocimientos prenuméricos

Nos sustentaremos en una opción didáctica cuyo objetivo es generar en los niños de este nivel una actividad matemática que promueva el desarrollo de su *pensamiento y razonamiento lógico*[9]. En consecuencia, desde esta opción[10], es necesario realizar un trabajo didáctico que permita la creación de situaciones de enseñanza que provoquen y hagan evolucionar el lenguaje, el pensamiento y la actividad lógica en estos niños.

[9] Decir que un determinado sujeto es capaz de utilizar de forma natural la lógica de proposiciones no significa, por supuesto, que sea consciente de ella. Para esto tendría que hacerla explícita, cosa que solo se logra estudiándola, de la misma manera que nosotros usamos el lenguaje y, sin embargo, no somos conscientes de la gramática hasta que no la hemos estudiado. Debemos, pues, diferenciar y no confundir los conocimientos de lógica matemática que aparecen como respuesta al problema de formalizar y fundamentar el razonamiento matemático y las relaciones, manipulaciones, observaciones, identificaciones concretas que deben aprender a desarrollar los alumnos en este nivel.

[10] Esta opción se ha consolidado teniendo en cuenta los resultados de toda una serie de investigaciones sobre la construcción del número y de la numeración, tales como: Meljac, C.: *Décrir, agir, compter*, PUF, París, 1979; El Bouazzaoui, H.: *Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération*, Tesis. Universidad de Bordeaux I, 1982. Desde entonces, la didáctica de las matemáticas ha comenzado a cuestionarse las denominadas *actividades prenuméricas* en la Escuela Infantil.

A continuación, nos basaremos en una serie de trabajos, desarrollados bajo la dirección de Brousseau[11], en los que se aborda todo un dominio de situaciones didácticas válidas para la Escuela Infantil, que permiten establecer una relación óptima entre los saberes lógicos, las actividades de acción, formulación y validación, y el desarrollo del lenguaje y del pensamiento natural en los niños de esta edad.

Trataremos de evitar todo deslizamiento hacia un formalismo fuera de lugar, para ello hablaremos de *actividades lógicas en la Escuela Infantil* y, en su construcción, tendremos en cuenta que:

– La actividad de simbolización incluye, en principio, esencialmente el lenguaje. El desarrollo de la **lógica** en los niños se encuentra asociada, en primer lugar, a la construcción del lenguaje: han de dar a cada palabra un empleo preciso y claro.

– La **lógica** no es un juego puro y gratuito. Todas las actividades deben ser portadoras de sentido. No se hace el *inventario* de una colección, se *clasifican*, o bien se *ordenan* unos objetos bajo el influjo de una fantasía momentánea, sino porque se tiene una razón para ello: ahorrar espacio, ganar tiempo, comprobar que no falta nada, localizarlos con rapidez y seguridad, etc.

Las situaciones que propondremos se inscriben en un proyecto de aprendizaje constructivista por adaptación al medio[12], y sus características son las siguientes:

- Están construidas alrededor de situaciones a-didácticas cuya resolución supone la *necesidad* de poner en funcionamiento el conocimiento deseado.
- El profesor lleva a cabo la *devolución* al alumno de la responsabilidad en la resolución del problema.
- Las *acciones* de los alumnos son *validables* por la propia situación o por ellos mismos.
- Permiten a los alumnos hacer muchas tentativas a partir de las informaciones aportadas por las retroacciones de la situación (medio).

Será en el curso o bien al término del desarrollo de la situación a-didáctica cuando el profesor se responsabilizará de la *institucionalización* de los conocimientos elaborados por los alumnos. (Ejemplo: «Hemos *ordenado* los objetos de la colección»).

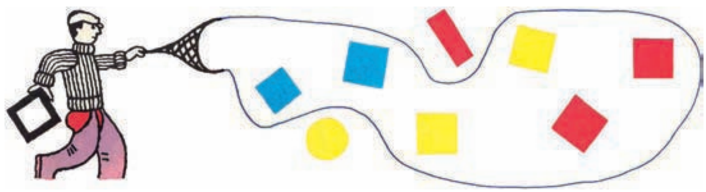
[11] Fundamentalmente nos apoyaremos en: Briand, J.; Loubet, M. y Salin, M. H.: *Apprentissages Mathématiques en Maternelle*, Hatier, París, 2004; y en V.V.A.A.: *Special Grand N Maternelle*, IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier, 2000, 2001.

[12] Este modelo de aprendizaje se explica detalladamente en el capítulo 1 de este libro.

## 4.5. Las colecciones de objetos: la formación de «listas»

Como ya se ha indicado, la lógica infantil está muy ligada al lenguaje y a los mecanismos de *percepción y codificación.* La percepción de un objeto y su designación no son actos sencillos ni espontáneos. Al contrario, solo tienen sentido dentro de todo un sistema, que integra la representación y el lenguaje.

Las actividades lógicas en la Escuela Infantil se inician, en muchas ocasiones, con el examen de las propiedades de los objetos, la constitución de colecciones y su simbolización. Son situaciones indispensables para la construcción de las matemáticas. Pero a veces suponen una reducción excesiva, ya que con frecuencia se proponen a los niños situaciones muy artificiales, es decir, *in-significantes* y banales. Basta analizar este ejemplo:



*Colección* cuadrados (Zoo, *Dienes, 1982).*

La producción de una colección por el sujeto se confunde con frecuencia con la manipulación que permite el reagrupamiento de objetos: cuando un observador ve a un niño tomar objetos y colocarlos en una caja, puede afirmar que ha constituido una colección, pero no puede asegurar que el sujeto ha «concebido» dicha colección.

En los textos escolares frecuentemente encontramos actividades, tales como: «Cuenta el número de elementos de esta colección». Aparentemente no existe ningún misterio en esta petición, pero debemos observar algo muy importante: la noción de colección no es objeto de enseñanza. La colección se muestra simplemente. El profesor no dispone de ningún medio que le permita controlar si el sujeto ha concebido realmente la colección, o si solo existe para el maestro. Así, por ejemplo, los niños pueden ver que en la clase hay ventanas, también hay puertas, mesas, sillas, perchas, etc., pero no es espontáneo formar cada uno de estos conjuntos, ni concebir que el conjunto de puertas tiene menos elementos que el conjunto de ventanas o el de perchas. Sin embargo, en muchas ocasiones, se considera que la formación de estas colecciones constituye un proceso totalmente natural y espontáneo.

Ahora bien, sabemos que construir los números naturales supone «medir» colecciones, aunque la «colección», el «conjunto» no es un objeto material. «Es un objeto que pertenece a una estructura matemática y el dominio de estos objetos es lo que permite asignarle una estructura de espacio medible. Así, si el sujeto no dispone de medios para determinar el objeto *colección*, no puede asignarle una medida» (Briand, 1999, p. 50)[13].

Constituir una colección a partir de una lista, construir una lista como medio para recordar una colección o para comunicar su contenido, elaborar símbolos para designar objetos y poder confeccionar una lista son diferentes actividades que favorecen y potencian el desarrollo del pensamiento lógico en los alumnos de la Escuela Infantil.

Una lista constituye el modo más simple de designación de colecciones de objetos no estructurados. Es una herramienta que encontramos en la vida corriente, ya que nos permite recordar y controlar informaciones, tratarlas y llevar a cabo múltiples anticipaciones.

Para ser eficaz, una lista precisa que a todos y cada uno de los objetos de la colección se le asigne uno y solo un símbolo. Es decir, es necesario establecer una aplicación biyectiva entre los objetos de la colección y los signos. Ahora bien, a la edad de estos niños (Escuela Infantil) la construcción de aplicaciones biyectivas no es espontánea, por lo tanto no se espera que los niños inicialmente lleven a cabo asignaciones correctas entre los objetos y los signos, sino que esto constituya un verdadero aprendizaje. En el proceso de elaboración de listas, los niños encuentran dificultades y obstáculos que les provocan desequilibrios: repiten designaciones análogas para objetos diferentes, olvidan objetos por designar, etc.

En el ejemplo 2 presentaremos una situación de aprendizaje, propia para la Escuela Infantil, cuyo objetivo es la construcción efectiva de una colección por el alumno. Para ello, nos basaremos en la siguiente situación fundamental[14]:

**Situación fundamental para la determinación de una colección:**

Decimos que una persona determina efectivamente una colección cuando dispone de medios que le permiten asegurar que los objetos de esa colección, después de una serie de transformaciones, son los que tenía en principio o bien son diferentes.

[13] Briand, J.: «Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numeriques et numeriques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 1, 41-77, 1999.

[14] Esta noción se estudia en el capítulo 2 de este libro.

La situación fundamental debe construirse de tal manera que permita al sujeto poner en funcionamiento medios de control efectivos sobre una colección de objetos, cuando esta ha sufrido diversas transformaciones.

Adaptada al nivel de la Escuela Infantil implica encontrar el contenido exacto de una caja recordando todos los objetos que contiene[15]. El maestro puede gestionar convenientemente las variables didácticas de esta situación y generar situaciones a-didácticas que provocan en los niños la necesidad de construir listas como «inventario» de las colecciones de objetos. La situación que estudiaremos está construida bajo el modelo de la teoría de situaciones de Brousseau (1998)[16].

**Ejemplo 2:**

**Situación: Construcción de listas como inventario de las colecciones de objetos: iniciación a la designación de objetos**

El objetivo fundamental de esta situación es que los niños de la Escuela Infantil (alumnos de 4 y 5 años de edad que no han aprendido, en su gran mayoría, ni a leer ni a escribir) puedan crear y utilizar representaciones simbólicas para controlar diferentes colecciones de objetos, permitiendo, además, que en el futuro aprendizaje del número puedan dar sentido a las funciones de designación y simbolización que tiene la numeración.

**Material:** Un «tesoro» formado por los siguientes objetos:

*I. Canicas*

1. de níquel
2. negra
3. azul de cristal traslúcido
4. roja de cristal traslúcido
5. verde de cristal translúcido

*II. Objetos longitudinales*

6. tubo de dentífrico
7. tubo de crema
8. biberón
9. barra de labios
10. frasco cilíndrico de perfume
11. pila cilíndrica gruesa
12. pila cilíndrica pequeña

*III. Objetos redondos*

13. rollo de fixo
14. pelota pequeña de baloncesto
15. pelota pequeña de goma con cascabel
16. botón rojo de abrigo (dos agujeros)
17. botón de camisa azul (cuatro agujeros)
18. cajita de pastillas de regaliz
19. caja de caramelos refrescantes

*IV. Objetos rectangulares*

20. jabón de tocador rosa
21. cajita de perfume (caja fantástica)
22. cajita azul
23. libro pequeño
24. cajita con espejo

*V. Monederos*

25. monedero negro
26. monedero beige
27. monedero marrón

*VI. Objetos diversos*

28. excavadora de juguete
29. camión de juguete
30. muñeco de peluche
31. muñeco tipo click

*Continúa*

[15] Nos basamos en la investigación de Péres, J.: *Construction et utilisation d'un code de designation d'objets à l'ecole maternelle*, IREM de Bordeaux, 1987.

[16] Brousseau, G.: *Théorie des situations didactiques*, La pensée Sauvage, Grenoble, 1998. Este modelo teórico se estudia en el capítulo 2 de este libro.

*Continuación*


*Tesoro con 4 objetos.*


*Tesoro con 12 objetos.*

*1.ª fase:*

**a) Preparatoria:** Los niños deben familiarizarse con los objetos del «tesoro». Los deben reconocer y nombrar, es decir, identificar correctamente. Es muy importante que todos los niños nombren cada objeto del mismo modo. Esto debe ser consensuado entre los alumnos y el maestro/a.

**b) De transición:** La profesora toma cuatro objetos del conjunto referencial, los enseña a los niños y los coloca en una caja sobre una mesa a la vista de todos (foto 1). Allí estarán expuestos todo el día. Les advierte que, mañana, cuando regresen, deben recordar todos los objetos con la caja tapada: tienen que reconstruir el contenido de la caja sin ver los objetos. Realizarán este juego durante tres sesiones al menos.

*2.ª fase: El juego de las listas:*

Está basada en el modelo teórico de la *dialéctica de la acción.*

La situación se desarrolla de la forma siguiente:

Por la mañana, los niños se reúnen alrededor de la profesora, que coloca en el interior de una caja 12 objetos (foto 2). Ella les hará saber que la caja estará a su disposición durante todo el día, a continuación se cerrará hasta el día siguiente. El juego consistirá en que cada alumno recuerde su contenido: deben reconstruir el contenido de la caja sin ver los objetos.

Algunos niños experimentan la necesidad de hacer, en una hoja de papel, una serie de dibujos que represente a los objetos que contiene la caja (una «lista»).

Al día siguiente, los que quieran jugar vendrán por turnos (con o sin lista). Podrán nombrar solamente 12 objetos (varios niños que no juegan controlarán la exactitud de las designaciones, según el contenido de la caja, y responderán sí o no para cada objeto nombrado). Si describe el contenido exacto, el jugador gana.

La sesión termina con la preparación por la profesora de una nueva colección de objetos para el día siguiente.

*Construyendo las listas.*

*Continúa*

*Continuación*

Al término de esta fase, se espera que cada niño tenga construido un repertorio personal de representaciones gráficas suficientemente elaboradas como para obtener un mínimo de éxito en el desarrollo del juego.

*3.ª fase: El juego de la comunicación:*

Está basada en el modelo teórico de la *dialéctica de la formulación*.

El juego consiste en que los niños construyan una lista para que la interpreten otros compañeros que, gracias a ella, deben encontrar el contenido de la caja. Durante su desarrollo, la profesora intervendrá incentivando a los niños para que representen los objetos de la forma más objetiva posible. La finalidad de este aprendizaje es la construcción de un repertorio simbólico colectivo, que les permita, sin error, a los niños, descodificar los mensajes recibidos.

*Listas que designan los objetos del tesoro.*

*4.ª fase: Construcción y validación de un código común:*

Está basada en el modelo teórico de la *dialéctica de la validación*.

En esta fase comienzan a intervenir las secuencias de validación bajo forma de debates motivados por los problemas de comunicación encontrados por los niños.

La profesora controlará las discusiones cuando existan malentendidos y animará a los niños a justificar sus argumentos. En esta fase deben aparecer los razonamientos de orden lógico en los niños.

**Aprendizajes que permiten desarrollar esta actividad en la Escuela Infantil:**

La construcción de un código para la designación de objetos encierra un conjunto muy rico de aprendizajes, entre ellos, destacamos los de tipo semiológico y los de tipo lógico-matemático.

- **Aprendizajes de tipo semiológico:**

  – ***El sentido de la representación***

  En el caso de la construcción de signos, es necesario que el niño abandone una actitud de «*dibujante*» a la que está acostumbrado en las actividades de dibujo (donde la fuente de realismo no está subordinada a ninguna necesidad de hacerse comprender) para tomar una actitud de «*designante*» donde la finalidad es exclusivamente la de poder indicar sin error la existencia de un objeto determinado y preciso. La experiencia vivida por los niños en esta actividad les permite madurar y afianzar la distinción entre significado y significante. Sus aprendizajes, en esta línea, constituyen una fase previa para el aprendizaje posterior de los símbolos estrictamente matemáticos.

  – ***La representación gráfica***

  Aunque los niños a esta edad tienen ya a su disposición un repertorio de signos gráficos convencionales, este se revelará insuficiente en aquellos casos en los que intentará hacer una copia de un objeto singular, a veces muy complejo (caso de la retroexcavadora en miniatura) y le resultará casi

*Continúa*

*Continuación*

imposible. El aprendizaje en estos casos le conducirá a adquirir esquemas representativos nuevos y a un enriquecimiento de su repertorio simbólico.

- **Aprendizajes de tipo lógico-matemático:**

Son los que nos interesa desarrollar en este nivel escolar, por ello, se han concebido las situaciones de enseñanza con el objetivo de favorecer al máximo su aparición. Destacamos los que siguen:

***– Puesta en correspondencia término a término***

Para que un niño realice su actividad con éxito es preciso que a un solo objeto corresponda un solo signo y recíprocamente. Para ello, es necesario que se pongan en correspondencia biyectiva todos los objetos de la colección con sus signos respectivos. Esta actividad cognitiva, a la edad de nuestros niños, no es espontánea, y supone por lo tanto un aprendizaje muy significativo.

Además, elaborar o bien interpretar el listado de una colección de objetos son actividades que implican la necesidad de llevar a cabo la *enumeración* de dicha colección (pasar revista a todos y cada uno de los objetos de la colección una y solo una vez).

***– Discriminación de predicados amalgamados***

El proceso de designación de objetos permite a los niños reconocer las características de un objeto y aislarlas unas de otras, poniendo en funcionamiento las operaciones lógicas de *centración* y *decantación* de componentes de predicados amalgamados[17] relativos a los objetos de la colección («tesoro»).

***– Clasificación, ordenación de objetos***

Esta situación permite, además, poner en evidencia la estructuración lógica de los conjuntos que los niños manipulan, las posibles relaciones de orden entre sus elementos, sus posibles clasificaciones, etc. Deben aislar caracteres comunes a diversos objetos, lo que les conduce, por comparación, a formar clases, y a configurar series.

***– Construcción de trazos distintivos***

Sabemos, a partir de las investigaciones piagetianas, que la representación está dirigida por actividades de tipo operatorio. Simbolizar un objeto es hacer una elección entre un cierto número de trazos que pueden ser representados en función de la información que queremos transmitir. Los niños deben, pues, hacer un conjunto de actividades de tipo deductivo en el proceso de selección de trazos suficientemente característicos de la singularidad del objeto que quieran representar.

***– Construcción de trazos opositivos***

Una de las principales dificultades de los niños reside en la codificación de objetos cuyos caracteres formales son análogos a otros de la colección (por ejemplo, las canicas: todas son redondas y del mismo tamaño, aunque de naturaleza diferente: barro, cristal, níquel…). En este caso, la selección de trazos que caracterizan al objeto (por ejemplo, un simple redondel) no es suficiente para determinarlo unívocamente.

Ante esta situación, el niño tendrá necesidad de construir significantes capaces de diferenciar suficientemente un objeto de otros semejantes para no confundirlos. Para ello, necesitará construir trazos no solamente *afirmativos* sino también *negativos*. Debe representar simultáneamente lo que es y lo que no es el objeto, es decir, su identidad y su diferencia. La construcción de códigos a través de procesos de *contrastación*, mediante la identificación de semejanzas y diferencias, es fundamental para el desarrollo del pensamiento lógico: razonamientos válidos, tautologías, contradicciones, inferencias, etc. Además, permite introducir divergencias entre los propios alumnos generando confrontaciones y discusiones que contribuyen a su desarrollo sociocognitivo, superando el egocentrismo que limita su actividad lógica.

[17] Las nociones de *predicados amalgamados*, *centración* y *decantación* se estudiarán en la sección 4.5 de este capítulo.

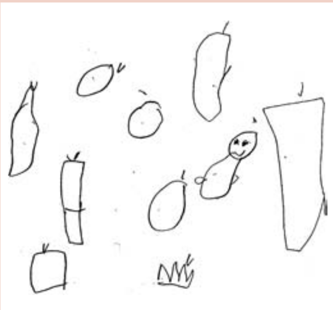
**Actividad 3:**

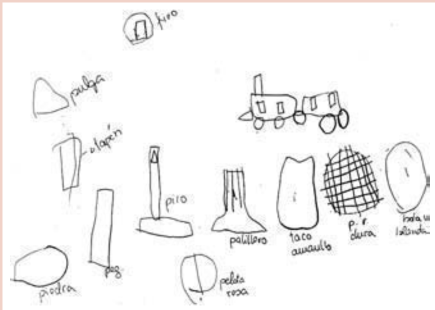
A partir de la situación anterior: «El juego del tesoro», determine:

a. Hipótesis de aprendizaje sobre las que se sustenta esta actividad.
b. Variables didácticas de la situación.
c. Gestión que puede hacer el maestro/a de dichas variables para provocar desequilibrios en el aprendizaje de los alumnos.
d. Estrategias que pueden poner los alumnos en funcionamiento.
e. Relación entre las variables didácticas y las estrategias de los alumnos.
f. Obstáculos epistemológicos y ontogenéticos que permite superar esta situación a los alumnos.

**Actividad 4: Análisis de producciones de los niños**

Las producciones siguientes constituyen «listas» construidas por dos alumnos («tesoro» de 12 objetos). Analice cada una de ellas, teniendo en cuenta los aprendizajes de tipo semiológico y de tipo lógico-matemático que han puesto en funcionamiento. (Las palabras que figuran en la producción de la derecha las escribió la maestra, según iba el niño identificando los objetos).






## 4.6. Modelización del pensamiento natural de los niños mediante la noción de «predicado amalgamado»

El trabajo de Wermus[18] (1987), discípulo y colaborador de Piaget, sobre el pensamiento natural nos permite modelizar ciertos aspectos del pensamiento de

[18] Wermus, H.: Modelisation de certaines activitées de la pensée à l'aide des predicats amalgamés, en La Pensée naturelle, estructures, procedures et logique du sujet, *Publications de l'Université de Rouen*, 86, 53-36, 1987.

los niños, introduciendo la noción de *componente contextual* en el funcionamiento de su lógica, en especial en lo que se refiere al uso y a la construcción de predicados lógicos. También nos apoyaremos en las investigaciones de Orús[19] (1992) sobre el razonamiento de los niños.

### Proposiciones lógicas. Predicados lógicos

Las expresiones lingüísticas con sentido, que reciben el nombre de enunciados, pueden ser de diversas clases: interrogativas, desiderativas, imperativas y declarativas. Únicamente estas últimas se consideran proposiciones.

Expresiones tales como: «¿Hace calor?», «¡Cuánto me gustaría que saliese el sol!», «Cierre la ventana», no son proposiciones. No pueden ser calificadas de verdaderas o falsas, no tiene sentido considerar que el enunciado «¿Hace calor?» sea verdadero o falso. Por el contrario, sí es una proposición la expresión «La Luna es un satélite», ya que consiste en la manifestación o declaración de un hecho.

Se define una **proposición lógica** como un enunciado declarativo, es decir, un enunciado que puede ser verdadero o falso.

Un **predicado** es toda propiedad que caracteriza a un conjunto: «Es menor que 5», «Es una ciudad costera», «Es mayor de 18 años», etc.

Una **función lógica,** denotada por p(x) y definida sobre un conjunto A, es una expresión que se convierte en una proposición lógica al sustituir x por un elemento cualquiera de A.

p(x): x es una ciudad costera / si $x \in A = \{$Ciudades de la Península Ibérica$\}$

p(Cáceres): Cáceres es una ciudad costera → es una proposición falsa.

p(Lisboa): Lisboa es una ciudad costera → es una proposición verdadera.

El conjunto formado por las ciudades de A para las cuales es verdadera p(x) se denomina conjunto de validez de p(x).

**Actividad 5:**

Considerando como conjunto de referencia el formado por todos los objetos del «tesoro» en la situación propuesta en el ejemplo 2, construya diferentes funciones lógicas y determine para cada una de ellas su conjunto de validez.

La situación de «El juego del tesoro»:

- ¿Qué tipo de proposiciones y funciones lógicas permite poner en funcionamiento?
- ¿Pueden controlar los propios niños su dominio de validez?
- Determine la relación entre las variables didácticas de la situación y las diversas funciones lógicas que se pueden construir.

[19] Orús, P.: *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*, Tesis, Université de Bordeaux I, 1992.

La lógica natural o lógica del pensamiento natural es uno de los constituyentes del sistema cognitivo del sujeto y comporta diferentes niveles, que van desde la prelógica de los niños hasta la lógica formal del pensamiento natural de las personas adultas. Según Wermus (1987), no debemos confundir la lógica formal del pensamiento natural con la lógica formal axiomatizada que sustenta a toda la matemática como sistema científico.

Para acercarnos mejor al pensamiento natural de los niños, veamos el ejemplo que Wermus (1987)[20] propone en relación con la representación que estos se hacen de las aves, animales que conocen desde muy pequeños. Este investigador asegura que el predicado *p(x): x es una ave*, en los niños, es una amalgama de múltiples componentes contextuales, más o menos indisociadas en su pensamiento, tales como:

$p_1$: x tiene alas y puede volar.

$p_2$: x tiene pico.

$p_3$: x tiene plumas.

$p_4$: x es ligera como el aire.

$p_5$: x anida en los árboles.

...

$p_k$: x tiene dos patas.

Si nos detenemos, por ejemplo, en el componente $p_4$, de él podríamos aún derivar otros predicados:

$p_{41}$: x es ligera y salta de una rama a otra de los árboles,

$p_{42}$: x es ligera y vuela muy alto, aún más alto que los más altos edificios.

La secuencia configurada por diferentes componentes, la podemos representar como sigue:

$p(x) = \{p_k, \ldots, p_5, (p_{41}, p_{42}), p_3, p_2, p_1\}\ (x)$

Cada componente está ligado a contextos en los cuales los niños han mantenido experiencias con aves. El conjunto formado por todas ellas constituye un «predicado amalgamado» (PA) que simboliza la representación del concepto «ave». Cabe señalar que un pavo (o una avestruz) no sería clasificado por el niño como ave, porque no responde al predicado $p_4$, ya que ambos serían juzgados como animales muy pesados, que no pueden volar.

En los niños, la comprensión del concepto «ave» está caracterizada por una amalgama indisociable de componentes. El término predicado amalgamado especifica el hecho de que los diversos componentes no están relacionados unos con otros por medio de la conjunción «y», sino que los niños los manipulan, los valoran y los ponen en funcionamiento como un todo indisociable.

[20] Citado en Orús, 1992, p. 440.

En suma, lo que caracteriza a un predicado amalgamado, en el plano cognitivo, es que para un determinado sujeto, los diversos componentes forman un todo no disociado y que, además, el sujeto lo trata como tal.

El modelo de los predicados amalgamados, según afirma Orús[21] (1992), es muy pertinente para identificar y representar los razonamientos y las argumentaciones de los niños en relación con el desarrollo de las actividades lógicas.

**Ejemplo 3:**

En geometría, el predicado *p(x): x es un rectángulo*, está caracterizado por su definición matemática explícita, mientras que en el pensamiento natural de un determinado sujeto, basado en múltiples experiencias vividas en diversos contextos, se puede caracterizar a partir de los caracteres siguientes:

$p_1$: es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.

$p_2$: las longitudes de sus lados no están muy desproporcionadas entre sí.

$p_3$: la superficie de la mesa del profesor tiene forma rectangular.

$p_4$: no es ni extremadamente pequeño ni excesivamente grande en relación con el contexto donde se ubica el sujeto.

$p(x) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}\ (x)$

El predicado amalgamado está formado por todos los componentes anteriores. Podemos decir que $p_1$ es el componente principal y los otros constituyen los denominados *componentes contextuales*.

## 4.7. Procesos de centración y decantación

Los niños pueden llevar a cabo la descontextualización progresiva de los diversos componentes que figuran en un predicado amalgamado por medio de las operaciones lógicas de «centración» y «decantación». En el nivel de la Escuela Infantil, estas operaciones afectan a la significación de los operadores lógicos, principalmente a la conjunción lógica, ya que para que un niño pueda conectar mediante la conjunción «y» varias características de un objeto, es preciso que, en primer lugar, sea capaz de reconocerlas sobre dicho objeto, aislar unas de otras y establecer entre ellas conexiones lógicas.

**Centración:** Acción y efecto que muestra la capacidad del alumno para concentrarse en una sola característica de un objeto.

**Decantación:** Acción y efecto que muestra la capacidad del alumno para seleccionar, entre una colección de objetos, aquellos que posean una determinada característica.

[21] *Ibidem.*

## Ejemplo 4: Procesos lógicos de centración y decantación

Para comprender mejor los procesos de centración y decantación nos vamos a ubicar en la situación estudiada anteriormente: «El juego del tesoro».

Proponemos una situación de *formulación* entre dos niños: un emisor y un receptor.

**Material:** 12 objetos del tesoro (debe contener al menos 4 o 5 objetos cuya forma sea homogénea).

**Consigna:** El emisor debe elegir un objeto del tesoro (sin que lo vea el receptor) y debe hacer su designación gráfica en un papel. El receptor, solo con la lectura de esta designación, debe identificar correctamente, entre los 12 objetos del tesoro, el que ha designado el emisor.

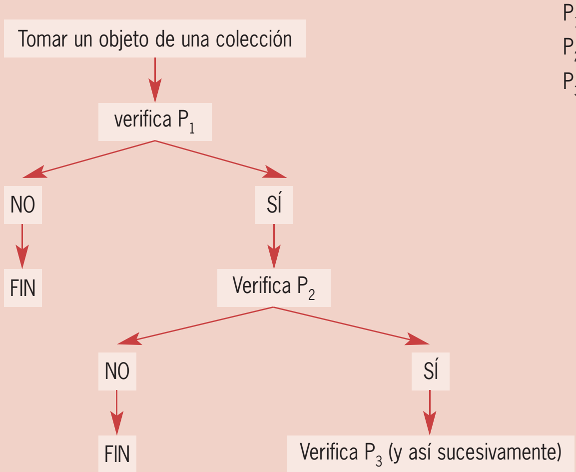
Supongamos que el emisor ha elegido la «pelota pequeña de goma roja con cascabel». Su primera designación fue:

Como el receptor le exigía más información, dado que en el tesoro había muchos objetos «redondos», el emisor, enriqueció su codificación inicial.

El análisis de las actividades lógicas que ponen en funcionamiento estos niños nos informa de que:

- El emisor, que lleva a cabo la descripción de un objeto oculto para el receptor, opera **centraciones** sucesivas para determinar las características del objeto. Para este sujeto, designar lo mejor posible un objeto implica retener una característica e identificarla con un signo, después identificar una segunda característica y asociarle otro signo, y así sucesivamente hasta caracterizar gráficamente al objeto con tal singularidad que permita distinguirlo de los demás.
- El receptor, por el contrario, para seleccionar un objeto, entre todos los de una colección, basándose únicamente en el mensaje gráfico del emisor, debe seguir un proceso de **decantación** de objetos, explorando la colección. Por ejemplo, para el caso anterior, el receptor debe decantar, entre todos los objetos de la colección, solo los objetos redondos, eliminando todos los demás. Posteriormente, entre todos los redondos, deberá eliminar aquellos que no sean rojos, y entre estos últimos, desechará los que no sean de goma, etc.

Esquemáticamente, la actividad de **decantación** sigue el siguiente proceso:




$P_1$ = ser redondo
$P_2$ = ser rojo
$P_3$ = ser de goma

**Designar y denominar:**

Los niños de Escuela Infantil pueden reconocer una colección de dos modos diferentes:

– Por medio de la **designación** de sus objetos.
– Por medio de la **denominación** de sus objetos.

Briand[22] (1999, p. 51) nos propone el siguiente ejemplo para mostrar cómo los niños pueden llevar a cabo designaciones o bien denominaciones para la determinación de los objetos de una colección:

Dada una colección formada por: 8 ruedas, 2 placas LEGO, 4 varillas metálicas, dos muñecos. Para controlar esta colección, es decir, para poder asegurar que esta colección permanece idéntica tras una transformación, es posible construir una lista describiendo cada objeto: cada objeto puede designarse o denominarse; la lista constituye una **designación** de la colección. Pero también es posible poner en funcionamiento un conocimiento que estructura la colección: por ejemplo, el sujeto reconoce el conjunto de objetos necesarios para construir dos coches (un coche precisaría 4 ruedas, una placa, 2 varillas y un conductor). Esta **denominación**: *dos coches con su conductor* facilita al sujeto el control de la colección.

Los niños pueden llevar a cabo más denominaciones y, según sea cada una de ellas, movilizarán un tipo de conocimientos u otro. La relación entre la designación y la denominación puede, por ejemplo, permitir generar una exploración de la colección con ayuda de particiones: según disponga el sujeto de conocimientos que le permitan clasificar en una misma categoría las subcolecciones de objetos (los redondos, los amarillos, los grandes...) explorará el conjunto de una forma u otra. Esta denominación le permitirá, mediante una propiedad que caracteriza a todos los elementos de una colección (o subcolección), poder determinarla con precisión.

## 4.8. Las clasificaciones

Vivimos en un mundo de objetos, estamos enfrentados cotidianamente a objetos a través de su percepción. Nuestra concepción de los objetos del mundo es compleja y variada. Si aceptamos que esta cognición está basada en toda una serie de procesos lógicos complejos, es necesario aceptar que un primer desglose se lleva a cabo por medio de actividades que implican cualificar y cuantificar.

**Cualificar:** Atribuir o apreciar cualidades. Caracterizar un objeto atribuyéndole una cualidad.

**Cuantificar:** Atribuir una medida a una cantidad de magnitud.

[22] *Ibidem.*

Las entidades del mundo son cualificables y cuantificables. Comprender la organización del mundo supone organizar los objetos en modelos que permitan reagruparlos en subconjuntos según ciertos criterios. Se les califica. Determinamos el orden de magnitud de estos subconjuntos. Se cuantifican. Está generalmente aceptado que las operaciones cognitivas de cualificación tienen como resultado clasificaciones y categorizaciones. Las operaciones de cuantificación conducen a establecer el orden de magnitud de las clases. Este es el sentido común ordinario de la cualificación y de la cuantificación. Fue necesario que la humanidad construyese el concepto del número para desarrollar con toda profundidad la inmensa riqueza del sentido de la cuantificación.

Las nociones de cualificación y de cuantificación, así como las de objeto, clase, categoría son bastante vagas en el sentido ordinario, podemos afirmar que son transparentes socialmente y bastante alejadas de la significación que se les atribuye en diferentes dominios científicos. Fueron las ciencias las que comenzaron a clasificar y jerarquizar los objetos con los que trabajaban con el fin de estudiar sus propiedades.

La clasificación[23] es un instrumento intelectual que permite al individuo organizar mentalmente el mundo que le rodea. Toda clasificación implica la selección y la agrupación de objetos en clases, de acuerdo con una regla o principio. El color del cabello, el estado civil, el nivel de educación, son características sin relación entre sí, de acuerdo con las cuales puede clasificarse a las personas. Clasificar supone abstraer de los objetos determinados atributos esenciales que los definen. La clasificación es un instrumento de conocimiento porque obliga a analizar las propiedades de los objetos y, por tanto, a ampliar su conocimiento relacionándolos con otros semejantes estableciendo así, sus parecidos o sus diferencias. Pero, al mismo tiempo que ayuda al conocimiento del mundo exterior, es también un sistema de organización del propio pensamiento, porque le proporciona coherencia lógica.

La clasificación es la agrupación lógica más sencilla, permite constituir clases por medio de equivalencias cualitativas de los elementos a agrupar. La clase, por ser generalmente indefinida, no se construye solo por percepciones; se llega al concepto de clase a través de abstracciones, generalizaciones y operaciones lógicas de composición, reversibilidad y asociatividad. Esta construcción se produce en el niño de forma gradual. Poco a poco se va independizando de la realidad y procede a construir esquemas abstractos. De la realización de colecciones figurales concretas, pasa a las colecciones abstractas no figurales, hasta llegar a realizar verdaderas clasificaciones.

[23] Para Piaget, los conceptos numéricos no se construyen solo con imágenes o a partir de la mera capacidad para usar símbolos verbales, sino a partir de la formación y sistematización en la mente infantil de dos operaciones: clasificación y seriación. El número, según este investigador, es producto de la fusión de clasificaciones y ordenaciones.

La clasificación es más significactiva cuando tiene en cuenta no solo el nivel horizontal de las clases, sino el sentido vertical o jerárquico, es decir, cuando da lugar a una verdadera categorización de clases.

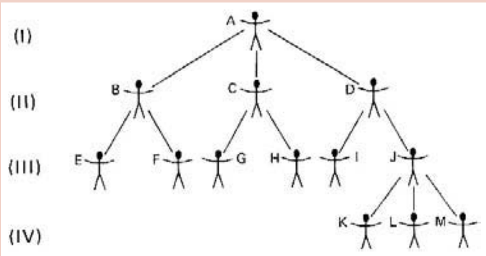
¿Cuál es la diferencia entre clasificación y categorización?

> Una clasificación representa una simple distribución de los objetos en clases, mientras que una categorización contiene, además de las clases, las relaciones entre las clases. Una categoría no puede ser pensada más que con otras categorías. Una categoría es más que una clase. No se define por ella misma, sino en relación con las demás clases (Desclés, 1998)[24].

Para percibir mejor la diferencia entre una simple clasificación y una jerarquización o categorización de clases, veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5: Jerarquización de clases**

Supongamos que el árbol genealógico de una familia es el siguiente:




Esta situación implica la posibilidad de establecer una relación jerárquica de clases en cuanto que todas ellas están relacionadas entre sí. La clase de los hijos en el nivel II implica la clase de los padres en el nivel I y la presencia de las clases de los hijos y nietos en los niveles III y IV. El niño que comprende este sistema jerarquizado, tanto verticalmente como horizontalmente, puede entender perfectamente que una misma persona J puede pertenecer a la clase de los padres, de los hijos, de los hermanos, de los primos y de los nietos.

Toda clasificación implica una «cuantificación». Cuando hablamos de rosas excluimos un número de cosas pertenecientes a todo lo que no sea una rosa. Sin embargo, con respecto a la clase rosas, podemos hacer las siguientes afirmaciones, sin tener que verificarlas con la observación directa: «Existen otras flores, además de las rosas», «todas las rosas son flores», «no todas las flores son rosas», etc. El criterio que nos permite hacer tales afirmaciones, sin necesidad de una evidencia externa, es la seguridad lógica que deriva de nuestra comprensión de lo que un sistema de clasificación implica.

Los niños tienen problemas para separar claramente tres aspectos fundamentales en una clasificación:

[24] Desclés, J. P.: *Categorisation et Quantification*. Cours de Doctorat, Université de París IV-Sorbonne, 1998. Citado en Vaetus-Pascu *Logique de la determination d'objets: Concepts de base et mathématisation*, Thése, Université de París IV-Sorbonne, 2001, p. 5.

a. Confunden un objeto con la clase, no ven claramente la diferencia entre la construcción mental de la clase y objetividad física del objeto. Las clases no existen en el mundo físico, sino que han sido construidas por la mente. Si un niño de cinco años tiene en sus manos un ramo de flores compuesto por diez rosas, dos margaritas y un gladiolo, y se le pregunta: «¿Tienes más flores o más rosas?», responde normalmente que tiene más rosas que flores, a pesar de conocer perfectamente lo que son las flores y las rosas.

b. Tienen dificultades para utilizar un nombre con dos significados distintos, es decir, que pueda corresponder a dos clases diferentes. La palabra escuela la asocia a su propia experiencia (escuela de niños) y le es imposible llamar escuela a una institución dedicada a la enseñanza de adultos.

c. No aceptan el carácter arbitrario de toda clasificación. Dado que las clases no existen en el mundo físico sino que se construyen conceptualmente por la mente, los niños tienen muchos problemas para admitir que un determinado objeto podamos clasificarlo arbitrariamente de un modo u otro, según nos convenga en una situación determinada (por ejemplo: los niños tienen muchas dificultades en admitir que una madre pueda ser madre y policía al mismo tiempo, o que un médico pueda ser padre y médico al mismo tiempo).

Estas no son simples dificultades lingüísticas, sino síntomas de la inmadurez lógica de su pensamiento. Constituyen verdaderos obstáculos ontogenéticos que deben tenerse en cuenta en el proceso de enseñanza, con el fin de diseñar situaciones para que los niños puedan superarlos y llevar a cabo aprendizajes que le permitan desarrollar una rica actividad lógico-matemática y utilizar el lenguaje inteligentemente.

## 4.8.1. Clasificaciones cruzadas

Una clasificación «cruzada» o múltiple requiere que todos los elementos se clasifiquen de acuerdo con dos o más variables al mismo tiempo. La clasificación cruzada incorpora a la clasificación simple el requerimiento de una secuencia ordenada de forma consistente. El modelo de una clasificación cruzada es una matriz en la que las filas indican los elementos pertenecientes a los dife-

| | | Forma | | |
|---|---|---|---|---|
| | | □ | △ | ○ |
| Color | azul | | | |
| | rojo | | | |
| | verde | | | |
| | amarillo | | | |

rentes atributos de una variable y las columnas indican los elementos pertenecientes a atributos distintos de otra variable.

La representación matricial que modeliza a las clasificaciones cruzadas está sustentada en el carácter bidimensional del producto cartesiano.

Las propiedades destacables de los objetos o sujetos con los que se relacionan los niños constituyen diferentes «dimensiones simples», base de actividades clasificatorias: varones, mujeres, niños/as, maestros/as, policías, cuadrados, triángulos, redondos, alargados, grandes, pequeños, verdes, azules, amarillos, etc. Estos caracteres (dimensiones simples) los podrán ir combinando entre sí, hasta llegar a configurar clasificaciones a partir de una estructuración multiplicativa bidimensional (o multidimensional), lo que supone un gran paso cualitativo en su desarrollo lógico.

Así, por ejemplo, un «cuadrado rojo» podrá clasificarlo no solo como objeto rojo (en contraposición con los azules, amarillos, verdes...) o como objeto «cuadrado» (en contraposición con los rectangulares, redondos, triangulares...), sino que podrá identificarlo por oposición al «cuadrado verde», al «cuadrado azul», al «redondo rojo» o al «triángulo verde». Esta doble clasificación corresponde a un doble sistema de relaciones de equivalencia independientes que da lugar a una clasificación bidimesional.

### 4.8.2. Actividades de discriminación, selección y clasificación en la Escuela Infantil

La aptitud para la clasificación se desarrolla en el niño a partir de experiencias que le permiten observar las semejanzas y las diferencias entre los objetos y obrar en consecuencia: distinguir objetos en razón de sus similitudes y de sus diferencias.

> Según figura en el diccionario de la RAE:
>
> **Clasificar** es disponer por clases, por categorías (una categoría es un conjunto de personas o cosas que presentan caracteres comunes).
>
> **Seleccionar** es elegir, escoger por medio de una selección, elegir entre muchos, separar del resto.
>
> **Discriminar** es separar, segregar, distinguir, diferenciar una cosa de otra.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, podemos considerar que cuando elegimos entre muchos, o cuando diferenciamos o disponemos por clases, es preciso definir criterios que justifiquen dicha elección, diferenciación o clasificación. Podemos, por lo tanto, considerar que existe una determinada relación entre *clasificar*, *seleccionar* y/o *discriminar*. La actividad de clasificación implica llevar a cabo una selección y una discriminación según ciertos criterios. Para realizar una clasificación es preciso ser capaz de concebir relaciones entre los elementos de un conjunto y generar a partir de dichas relaciones diferentes subclases. Desde el punto de vista matemático *clasificar* los elementos de un conjunto es realizar una partición de este conjunto, es decir, fraccionar este conjunto en subconjuntos disjuntos dos a dos.

S*eleccionar*, *discriminar* y *clasificar* son actividades útiles tanto socialmente como matemáticamente. Así, es normal escuchar frases «rituales» a lo largo de la jornada escolar que invitan a llevarlas a cabo:

- Es necesario organizar la mesa de la clase para trabajar mejor.
- Es preciso organizar muy bien todos los objetos y rincones de la clase para que todos los niños podamos localizar aquello que buscamos rápida y eficazmente.
- Debemos recoger y dejar todos los materiales bien colocados en su lugar correspondiente.

Estas iniciativas externas, por parte del profesor/a, pueden contribuir eficazmente a la motivación de los alumnos para llevar a cabo estas tareas, pero existen también retos internos a la propia actividad matemática que se lleva a cabo, ya que *seleccionar*, *discriminar*, *clasificar* son actividades matemáticas que permiten dar solución a problemas matemáticos. Ahora bien, ¿cómo formular este problema matemático de modo pertinente en la Escuela Infantil? Vamos a dar respuesta a esta cuestión, apoyándonos en el trabajo de Briand, Loubel, Salin[25] (2004).

Podemos definir una actividad que implique seleccionar/discriminar de varias formas:

- **Desde el punto de vista matemático:**

Discriminar los elementos de un conjunto E según un atributo: es constituir dos subconjuntos en el conjunto dado E, a partir de un determinado predicado. Si un elemento satisface dicho predicado, figurará en el primero y si no lo satisface figurará en el segundo de los subconjuntos.

Si $p(x)$ es verdadera $\rightarrow x \in A$

Si $p(x)$ es falsa $\rightarrow x \in C(A)$

A y C(A) conforman una partición[26] de E, es decir: $A \cup C(A) = E$

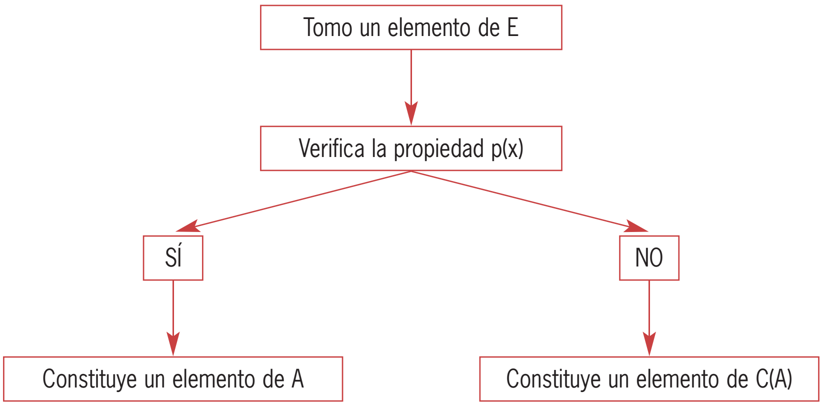
[25] *Ibidem*.

[26] El conjunto C(A) recibe el nombre de conjunto complementario de A en referencia a E. Por ejemplo, si suponemos que E es el conjunto de todas las personas que integran un curso: el conjunto de las mujeres [A] y el conjunto de los varones [C(A)] formarían una partición de E.

Podemos discriminar según varios atributos independientes y obtener diferentes subconjuntos de E, que deben constituir una partición del conjunto de referencia E.

- **Desde el punto de vista algorítmico:**

Discriminar en un conjunto finito E es una algoritmo productor de colecciones disjuntas.




- **Desde el punto de vista didáctico:**

El alumno debe llevar a cabo la actividad de *discriminar/seleccionar* en una situación problema cuya solución óptima sea clasificar los elementos de una colección en dos o más clases disjuntas. Para llevarla a cabo es necesario que ponga en funcionamiento conocimientos que le permitan tener éxito cuando discrimina y/o selecciona objetos en un determinado conjunto.

**Ejemplo 6: Situación de selección-discriminación-clasificación**

**Material:** Una colección de tres o cuatro categorías de diferentes granos (legumbres, cereales, café, etc.) mezclados entre sí.

Cinco cajas idénticas con una tapa en la que haya perforado un pequeño orificio que permita introducir los granos. (Debemos colocar mayor número de cajas que de categorías de granos). Las cajas, a lo largo de todo el desarrollo de la actividad, deben permanecer tapadas.

**Consigna:** Debes colocar todos los granos iguales en la misma caja.

El hecho de tener las cajas cerradas obliga a los alumnos necesariamente a recordar las acciones precedentes, esta exigencia no es gratuita, sino que «obliga» a los alumnos a poner en funcionamiento una rica actividad matemática construyendo estrategias que impliquen:

– Enumeración: hacer una secuencia para introducir los granos en las cajas (por ejemplo, arroz, lentejas, maíz) y reiterarla constantemente (ya que las cajas están tapadas).

– Separar los granos en montones según categorías diferentes y luego introducirlos en cada caja.

**Ejemplo 7: Situación: «El juego de las particiones»**

**Material:** Colección de objetos utilizados en «El juego del tesoro».

Cuatro cajas idénticas.

**Consigna: «**La maestra, a la vista de los niños, coloca tres objetos diferente en el interior de cada caja y dice: Las cajas estarán abiertas durante todo el día para que podáis ver su contenido. Mañana, estando las cajas cerradas, sacaré un único objeto de una caja y, manteniendo la caja cerrada, os preguntaré: ¿Qué otros objetos hay en esta caja?».

**Objetivos de la situación:**

Los alumnos deben:

– Construir una partición de una colección dada de objetos.

– Relacionar los objetos de la colección mediante el criterio: «... está en la misma caja que...».

La producción de una lista en la que figuren todos los objetos no es suficiente para tener éxito en la tarea, es preciso poner en relación cada objeto con el resto de objetos contenidos en la misma caja y constituir clases disjuntas.

**Actividad 6:**

Para cada una de las situaciones que figuran en los ejemplos 6 y 7, determine razonadamente:

– Si se trata de una situación basada en un modelo de aprendizaje «constructivista por adaptación al medio».

– Las variables didácticas.

– La relación entre la gestión que puede llevar a cabo el profesor de las variables didácticas y la modificación de las estrategias que movilizarían los alumnos en su resolución.

– Si la propia situación es «criterio» y «fuente» de aprendizaje.

Realice un análisis didáctico de la situación del ejemplo 6 para el caso en que el maestro/a dejase las cajas abiertas. ¿Cómo se modificaría el aprendizaje de los alumnos?

## 4.9. Las relaciones de orden

En la lengua española, la palabra «orden» tiene diversas acepciones[27], entre ellas destacamos:

[27] Ver diccionario de María Moliner (1984) Gredos. Madrid.

a. Manera de estar colocadas las cosas o de sucederse en el espacio o en el tiempo:
«Nos colocaron por orden de estatura».
«Las fichas están en orden alfabético».
«La ceremonia transcurrió según el orden previsto».
«Se ha invertido el orden de intervención de los ponentes».

b. Cada grupo taxonómico de los que integran una clase:
«Pertenece a la orden de Calatrava».
«El orden de los mamíferos incluye a los carnívoros».

c. Acto por el cual una autoridad manifiesta su voluntad:
«Dar una orden».
«Estar bajo sus órdenes».
«De orden del alcalde».

En esta sección nos interesaremos por la primera acepción, ya que se corresponde con la noción matemática –relación de orden– cuyo estudio didáctico queremos abordar.

El término «seriación», derivado de la palabra serie o sucesión, indica un conjunto ordenado de objetos según un determinado criterio (una relación de orden).

Si por medio de la clasificación, el niño ha de ser capaz de agrupar los objetos en clases en función de sus semejanzas, por medio la seriación deberá consolidar la capacidad de comparar objetos y de ordenarlos en función de sus diferencias.

La actividades de seriación, desde los niveles más inferiores de la Escuela Infantil, pueden interpretarse bien espacialmente o temporalmente, según se trate de objetos ubicados unos a continuación de otros, de acuerdo con una determinada posición, o bien de sucesos que han trascurrido a través del tiempo. De todos modos, ordenar es inherente a la naturaleza de todas las acciones que concurren en el tiempo y que, por lo tanto, manifiestan una coordinación temporal.

Según Piaget-Inhelder (1980)[28], la sucesión lineal la comienzan a construir los niños en los niveles de la Escuela Infantil, ya que constituye uno de los aspectos que caracteriza a las propiedades que permanecen invariables en las transformaciones topológicas (constituidas con anterioridad a las transformaciones proyectivas y euclídeas). Emergen en este nivel los términos comparativos: «delante de», «detrás de», «siguiente», «sucesor»; y las relaciones comparativas cuantificadas: «mayor que», «menor que», etc., cuya expresión se especifica para diferentes

[28] Piaget, J. y Inhelder, B.: *La genèse des structures logiques élémentaires. Clasifications et seriations*, Delachaux et Niestlé, París, 1980.

magnitudes: «más largo que», «más corto que», «más alto que», «más bajo que», «más pesado que», «más extenso que», «con más capacidad que», etc.

Para que los niños lleguen a la construcción de series o sucesiones ordenadas deben poner en funcionamiento operaciones lógicas que impliquen el control de:

- La *reversibilidad*: capacidad para ordenar en dos direcciones: hacia delante y hacia atrás (empleando la relación recíproca de la anterior).
- La *transitividad*: capacidad para admitir que si A es anterior a B y B es anterior a C $\Rightarrow$ A es anterior a C.
- La asignación de un *carácter dual* a todo elemento de la serie: un elemento, según su posición en la serie, es, a la vez, sucesor del anterior y antecesor del siguiente. En el caso de series cuantitativas: un elemento es, a la vez, «mayor que el anterior y menor que el siguiente».
- La *asimetría*: capacidad para asignar a todo par de elementos de la serie una relación asimétrica: dados dos elementos A, B; si A es anterior a B, B no es anterior a A.

Los niños comienzan normalmente desde la Escuela Infantil a relacionarse con seriaciones cualitativas, bien arbitrarias (formar «serpientes» en relación con el color, la forma, etc.) o bien basadas en convenciones sociales (el orden de días de la semana, de los meses del año, de los rituales horarios, del abecedario, etc.), para llegar progresivamente a las cuantitativas como actividad que enlaza con el periodo numérico.

Piaget & Inhelder[29] (1980) observaron en sus experiencias un desarrollo paralelo de la clasificación y la seriación, la primera constató que estaba más favorecida por el lenguaje y la segunda por la percepción.

### 4.9.1. Actividades para construir seriaciones en la Escuela Infantil

Las actividades relativas a la concepción ordinal del número se estudiarán más ampliamente en el capítulo 6 de este libro, no obstante, en esta sección presentamos en el ejemplo 8 un análisis de diferentes situaciones que permiten a los niños de Educación Infantil construir con sentido las relaciones de orden y configurar seriaciones.

[29] *Ibidem.*

## Ejemplo 8: Reproducir una serie ordenada según un orden lineal

**Material A:** Trenes de imágenes.

Una colección de imágenes variadas (a modo de pequeñas cartas de una baraja) y dos bandas de madera con una ranura que permita introducir las cartas para que se mantengan verticales.

**Consigna:** Tienes colocadas en esta banda de madera una fila de cartas. Con estas cartas que tienes sobre la mesa, tú debes hacer otra exactamente igual sobre esta banda vacía.

**Material B:** Perlas para ensartar.

Figuras geométricas de madera coloreada con un orificio que permite poder ensartarlas en una varilla.

**Consigna:** En esta varilla hemos ensartado varias figuras. Con las figuras que tienes sobre la mesa, tú debes hacer otra igual.

**Variables didácticas:**

– Número de objetos que integran en las series.

– Figuras homogéneas de diferentes colores (cubos: rojo, verde, azul, amarillo, blanco, etc.) o figuras heterogéneas y de diversos colores (cubo rojo, esfera blanca, cilindro verde, etc.).

– Repetición (o no) de figuras idénticas: AAABBBCDDAABCC, o bien series configuradas por objetos diferentes entre sí: ABCDEFG.

– Series algorítmicas de objetos diferentes: ABCABCABC, o bien series algorítmicas de objetos repetidos: AABBBCAABBBCAABBB.

– Posición del modelo que se va a reproducir: cercano al niño (sobre la misma mesa donde trabaja), alejado, pero visible, no visible desde su mesa de trabajo.

– Tipo de situación: autocomunicación (el trabajo es individual), comunicación: un alumno que ve el modelo lo describe (oralmente o por escrito) a otro alumno, para que este último lo pueda reproducir.

– El modo de alterar la posición de un objeto en la serie. (Por ejemplo, una vez ensartadas las perlas, no es posible cambiar un elemento de lugar sin sacar otras perlas de la varilla, sin embargo, con los trenes de imágenes podemos tomar un solo elemento y modificar su posición).

**Análisis didáctico:**

Para el caso en que la «varilla modelo» esté próxima y visible, el niño solo tiene que proceder mediante una correspondencia término a término para resolver el problema y verificar (validar) su trabajo. Se trata, pues, de una actividad simple de *reproducción* pues le basta conocer los colores y las formas, seleccionar y discriminar los objetos de la colección en función de los datos facilitados por el modelo y establecer la correspondencia.

En caso de que la «varilla modelo» no esté visible desde su mesa de trabajo, el niño debe desplazarse para ver el modelo, centrarse en sus aspectos significativos: sus extremos (el principio y el fin) y reconocer el orden de los objetos, regresar a su mesa, observar los objetos de la colección y determinar el primer

*Continúa*

*Continuación*

objeto que ha de colocar, el siguiente, el sucesor, etc. Este razonamiento moviliza necesariamente la noción de orden (tanto entre los objetos ensartados en la varilla modelo como entre los de la colección que tiene sobre su mesa) y su vocabulario asociado: primero, siguiente, detrás de, delante de, etc. Aunque el vocabulario no interviene explícitamente en la actividad, sin embargo, se puede suscitar en el curso de debates en caso de error, o de comunicaciones entre niños. En suma, para resolver esta actividad los niños deben poner en funcionamiento procedimientos ligados a una relación de orden y pueden, además, validarlos autónomamente mediante una correspondencia término a término entre el modelo y su producción.

Si el modelo está configurado, por ejemplo, por una serie del tipo AAABBBCDDEEFGGG, el niño, para producir otra que conserve esta configuración, debe movilizar no solo conocimientos asociados al reconocimiento de los objetos y a una relación de orden, sino también al cardinal de colecciones.

### 4.9.2. La enumeración de colecciones: una relación de orden total

Investigaciones[30] en Didáctica de las Matemáticas sobre los conocimientos que los niños necesitan movilizar para la construcción del número han puesto de manifiesto que muchas de las dificultades que estos tienen son debidas a un dominio muy deficiente de la *enumeración* de colecciones.

**Enumeración** es la expresión sucesiva de las partes de que consta un todo.

**Enumerar** una colección finita consiste en pasar revista a todos los objetos de esta colección una y solo una vez.

Diccionario de la Real Academia Española

Desde el punto de vista matemático, la *enumeración* de los elementos de un determinado conjunto finito supone establecer una relación de orden total en el mismo.

Para llevar a cabo correctamente la actividad de enumerar los elementos de una colección, un niño debe:

1. Ser capaz de distinguir dos elementos diferentes de esta colección.
2. Elegir un primer elemento de la colección.
3. Determinar el sucesor en el conjunto de elementos no elegidos anteriormente.
4. Conservar la memoria de las elecciones precedentes.

[30] Berthelot, R. y Salin, M. H.: *L'enseignement de l'espace et de la geométrie dans la scolarité obligatoire*, tesis, Université de Bordeaux I, 1993.
Briand: *L'enumération dans le mesurage de collections*, tesis, Université de Bordeaux I, 1993.

5. Recomenzar el paso 3.
6. Saber que ha elegido el último elemento.

La puesta en práctica de estos seis puntos sucesivamente es necesaria para llevar a cabo correctamente el procedimiento de contar los elementos de una colección, ya que el algoritmo de la enumeración está contenido en el algoritmo del conteo.

En el medio escolar la actividad de enumeración está enteramente bajo la responsabilidad del alumno. La enumeración no está incluida en los contenidos de los programas escolares ni es señalada como necesaria por los profesores, de tal manera que podemos afirmar que constituye un «punto ciego» en el

**Ejemplo 9: Actividades de enumeración**

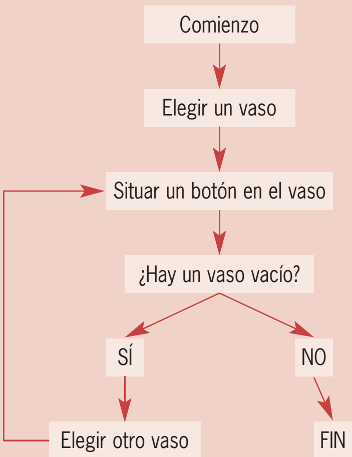
**Situación 1: «Juego de las huchas»:** *Disponemos de una colección de vasos de plástico no transparentes en los que hemos hecho una ranura en la base. Los colocamos boca abajo y pedimos a los niños que cojan botones de una cestita e introduzcan un botón y solo uno, en todos y cada uno de los botes.*

**Observación:** El hecho de que los botes sean opacos impide el control visual continuo en el desarrollo de la actividad de enumeración, es decir, no podemos **conocer** con una sola mirada, en el transcurso de la actividad, lo que hemos realizado y lo que nos queda por realizar.

**Situación 2: «Juego del repartidor de propaganda»:** *Se trata de colocar una octavilla y solo una en cada uno de los casilleros de un mueble que tiene una estructura parecida al conjunto de buzones que están ubicados en los bloques de pisos (se puede formar con cajas de zapatos o de cerillas).*

**Situación 3: «Juego del cartero»:** *Cada niño ha de distribuir un conjunto de cartas entre las clases del colegio, de tal manera que debe introducir una y solo una por debajo de la puerta de cada una de las clases.*

Para lograr llevar a cabo con éxito la tarea pedida, el alumno deberá poner en funcionamiento el siguiente algoritmo de resolución:




*Continúa*

*Continuación*

Un alumno, para llevar a cabo este algoritmo, puede emplear distintas **estrategias o procedimientos:**

**$E_0$:** Enumeración instantánea, basada en un control visual fugaz. Solo se puede llevar a cabo con seis objetos a lo sumo.

**$E_1$:** Marcar los vasos a medida que se van distribuyendo los botones (o en su caso fichas, octavillas, cartas...).

**$E_2$:** Utilizar el espacio: para saber si hay algún vaso vacío, es suficiente diferenciar los vasos llenos de los vacíos separándolos entre sí. Cada vez que el niño mete un botón, separa este vaso del resto.

**$E_3$:** Organizar el espacio según una estructura de orden total: por la simple puesta en línea de todos los vasos. Esta estructuración permite al alumno establecer, en la colección de objetos, un orden total previo a la acción, así la coordinación espacio-temporal será inmediata y no necesitará utilizar los desplazamientos.

**$E_4$:** Si el alumno no puede modificar la posición espacial de los objetos, ni marcarlos, es preciso que pueda estructurarlos mentalmente por medio de señales (o localizadores) interiores o exteriores a la colección, con el fin de producir un orden total:

Esta estrategia depende de:

– la colección de objetos,
– el espacio del entorno (microespacio, mesoespacio, macroespacio),
– la relación con el espacio del alumno que enumera,
– la capacidad del alumno para estructurar la colección de objetos en el espacio.

Las **variables didácticas** que van a permitir al profesor provocar cambios en las estrategias del alumno son las siguientes:

**$V_1$:** Utilización o no de «marcaje» para señalar los objetos.
Posibilidad de que el niño pueda hacer una señal o no en los vasos en los que ya ha metido un botón.

**$V_2$:** Desplazamiento o no de los objetos.
Posibilidad de desplazar o no los vasos en los que ya ha metido un botón.

**$V_3$:** Tipo de configuración espacial que presentan los objetos:
Alineados, en tabla de nxm ($3 \times 4$, $5 \times 6$, etc.), colocación totalmente arbitraria...

**$V_4$:** Número de objetos de la colección (10, 15, 20, o más objetos).

**$V_5$:** Naturaleza del espacio en el que se desarrolla la actividad: microespacio, mesoespacio o macroespacio.

panorama escolar, ya que no existe explícitamente como objeto de enseñanza. Sin embargo, como se ha puesto de manifiesto en las investigaciones anteriores, las actividades de enumeración deben ser objeto de enseñanza desde la Escuela Infantil, antecediendo a las actividades de tipo numérico.

### 4.9.3. Conservación del orden en las relaciones espaciales

El «espacio sensible» es el espacio donde están contenidos los objetos y nos es accesible por medio de los sentidos. Los conocimientos espaciales nos permiten a las personas dominar la anticipación de los efectos de nuestras acciones sobre el espacio y controlar la comunicación de informaciones espaciales. Estos conocimientos se manifiestan, por ejemplo, cuando conocemos suficientemente bien un espacio urbano y podemos seleccionar los caminos para optimizar nuestros trayectos, o bien, cuando un niño pequeño pierde de vista su pelota y sabe ir a buscarla detrás de la puerta aunque no la vea; o cuando un electricista sabe cómo evaluar la distancia entre dos puntos aunque no pueda llevar a cabo la medida directa, etc.

Aunque en este texto se dedican los capítulos 8 y 9 a estudiar las relaciones espaciales, consideramos conveniente presentar aquí brevemente varias actividades que permiten a los niños de la Escuela Infantil movilizar las relaciones de orden en situaciones que plantean problemas relativos al espacio vivido y representado. Estos problemas varían sustancialmente dependiendo del tamaño del espacio: microespacio, mesoespacio o macroespacio[31].

### Ejemplo 10: Orientarse sobre un plano

Proponemos a los niños realizar sobre un papel (A-4) el plano de la clase.

En esta actividad hay un espacio real (tridimensional) y un espacio (bidimensional) que lo representa o modeliza de manera *analógica*: trazos y dibujos realizados sobre el papel.

**Objetivo de aprendizaje:** orientarse sobre un plano, lo que supone:

– Establecer una correspondencia biyectiva entre los dibujos del plano y los objetos de la clase.

– Controlar el orden de los dibujos del plano y su correspondencia con los objetos reales en relación con determinados sistemas de referencia. Esto es fundamental para saber interpretar y utilizar el modelo analógico correctamente.

*1.ª fase:* dibujar el plano con los niños en el interior de la clase.

*2.ª fase:* dibujar el plano con los niños fuera de la clase (en el patio del colegio). Cuando vuelvan a la clase deben comparar el dibujo que acaban de realizar con la clase «real» y corregir, en una sesión colectiva, los errores.

*3.ª fase:* en el plano construido por cada niño se pide que escriba su nombre y el de sus compañeros en el lugar correspondiente a su puesto de trabajo en clase.


*Representación de la clase. Educación Infantil 5 años.*

[31] Se denomina *microespacio* al espacio de las interacciones ligadas a la manipulación de los objetos pequeños; *mesoespacio* al espacio de los desplazamientos del sujeto, es el espacio que contiene un inmueble, que puede ser recorrido por un sujeto, tanto en el interior como en el exterior; *macroespacio* al espacio para el que el sujeto no puede, con los medios normales, obtener una visión global simultánea (en él se consideran tres categorías: urbano, rural y marítimo).

**Ejemplo 11: Representación e interpretación de recorridos**

**Objetivos:**

- Elaborar códigos para la representación gráfica de trayectos.
- Consensuar y unificar los códigos a través de la discusión colectiva.
- Verificar su eficacia mediante actividades de codificación y descodificación.
- Representar ordenadamente trayectos que se suceden en el tiempo.

Se trata de establecer correspondencias entre el mesoespacio (clase) y el microespacio (plano). Para tener éxito en esta actividad es imprescindible controlar el orden seguido en los trayectos reales y ponerlo en correspondencia con su representación en el plano.

*Actividad colectiva:* el profesor representa un desplazamiento sobre el *plano* de la clase con la ayuda de flechas, un niño (por turnos) debe realizar este desplazamiento en la clase «real» y otro debe describirlo verbalmente bajo el control de sus compañeros.

*Actividad por parejas:* un alumno se desplaza libremente por la clase y otro debe representar este desplazamiento sobre el *plano* de la clase. Posteriormente, un alumno debe llevar a cabo un recorrido en la clase real a partir del plano que le aporta otro alumno. Si no logra este objetivo, se debate la necesidad de rectificar las codificaciones del plano y las dificultades encontradas en su interpretación.

**Actividad 7:**

A partir de las situaciones que figuran en el ejemplo 10 y en el ejemplo 11, determine:

- ¿Qué conocimientos matemáticos deben movilizar los alumnos para resolver correctamente los problemas propuestos?
- ¿La propia situación puede «informar» al niño sobre el éxito o el error cometido en la construcción de planos y/o en su interpretación?
- ¿Qué variables didácticas puede gestionar la profesora?
- ¿Cuál es la función de los desequilibrios cognitivos que genera esta situación en los alumnos?

## 4.10. Bibliografía

Briand, J.; Loubet, M. y Salin, M. H.: *Apprentissages Mathématiques en maternelle*, Hatier, París, 2004.

Martín, F.: *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle*, Scérén. CRDP Aquitaine, Bordeaux, 2003.

Ruiz Higueras, L.: «Aprendizaje y Matemáticas» en Chamorro, C. (Coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, pp. 31-69, Pearson. Prentice-Hall, Madrid, 2003.

Vergnaud, G.: *El niño, las matemáticas y la realidad*, Trillas, México, 1991.

CAPÍTULO 5

# La construcción del número natural

M.ª del Carmen Chamorro

## Contenidos

—... ¿Cuánto es uno más uno más uno más uno más uno más uno más uno más uno más uno más uno más uno?

—No sé —respondió Alicia—. Perdí la cuenta.

*Al otro lado del espejo* (LEWIS CARROLL)

## 5.1. Introducción

Es conocida de todos la frase de Leopold Krocneker: «Dios hizo los números naturales y el hombre hizo todo lo demás», que viene a expresar no tanto una creencia religiosa como el reconocimiento de la perfección que entraña la idea de número natural. Y es que, en efecto, los números naturales, la idea primitiva de número, es una conquista histórica de un calado conceptual difícil de igualar.

La idea de número, por mucho que se acompañe del engañoso adjetivo de natural, es, como se verá a lo largo de la lectura de este capítulo, de una enorme complejidad, por lo que no podemos esperar que los niños la construyan sin ayuda. Se trata, además, de una construcción lenta y progresiva, que choca con la creencia social de que todo se reduce a saber recitar la serie de los números en orden.

El niño solo llega a la comprensión de la idea de número tras haber superado numerosas trampas perceptivas. Reconocer que seis elefantes representan la misma cantidad numérica que seis moscas es todo un reto para una mente infantil, que solo llega a comprender la naturaleza del número a través de las múltiples cosas que éste le permite hacer. Por eso, el adulto, el profesor en particular, debe hacer una relectura del mundo que le rodea, en el que, como decían los pitagóricos, casi todo es número, para descubrir que acciones rutinarias son solo posibles gracias a la existencia de la potente idea de número.

Así, saber *con antelación* (esta es la clave), si tendremos bastantes naranjas para que cada miembro de la familia tome una de postre, es sólo posible gracias a la existencia del número. Saber, *antes de cobrar*, si con el dinero que tenemos ahorrado en el banco y el sueldo del mes tendremos bastante para comprar los electrodomésticos de una cocina, o poder comprar las bombillas para todas las lámparas de la casa *sin necesidad de desmontarlas y llevarlas con nosotros*, son algunas de las muchas cosas triviales pero útiles que son posibles gracias a la idea de número. Sin el número nuestra vida cotidiana sería imposible, y estaríamos condenados a inventarlo de nuevo o a volver a las cavernas.

Si, como afirma Vergnaud, los conocimientos de los alumnos están marcados por las situaciones que encuentran y dominan progresivamente, es de vital importancia proporcionar a los alumnos un amplio espectro de situaciones que reproduzcan artificialmente[1] la génesis de la idea de número natural. En el capítulo 6 se proporcionarán numerosos ejemplos, que responden a la idea de que *los conocimientos de los niños de esta edad son conocimientos en la acción*, y tienen mucho que ver con el descubrimiento de procedimientos, además de estar fuertemente contextualizados. Hoy sabemos que hay mucho conocimiento detrás de las acciones, y que hay toda una red semántica de acciones, tan compleja y estructurada como la de los conceptos.

Ahora bien, la construcción de dichas situaciones debe basarse en lo que sabemos de cómo se produce la conceptualización del número, en las etapas de aprendizaje por las que pasa el niño y en el conocimiento de los obstáculos que encuentra y los errores que comete. Solo así se estará diseñando y aplicando una génesis productiva fundamentada en trabajos de investigación, no en concepciones arcaicas practicadas durante decenios en las escuelas (por ejemplo, enseñar el 1, después el 2, después el 3 y así sucesivamente, sin alterar el orden).

Adquirir el concepto de número supone también ser capaz de pasar de representaciones analógicas de la cantidad, donde los símbolos utilizados están en relación con los objetos representados (cinco rayas para simbolizar cinco animales, tres dedos para representar tres personas, etc.), a representaciones convencionales cuya relación con los objetos es arbitraria (usamos 3, o tres, o *trois*, como podíamos usar cualquier otro símbolo o palabra para representar tres personas), y este paso no es trivial para los niños. También es difícil comprender que la escritura convencional supone un modo de representación más potente y más funcional que la analógica[2]. Sabemos además que la adquisición por parte del niño del sistema de notación numérica lleva aparejado un enriquecimiento de los conocimientos sobre el número, si bien necesita de un largo periodo de tiempo para su total comprensión.

Por todo ello, y conscientes de las enormes barreras que el niño debe franquear para adquirir el concepto de número, nos proponemos una serie de objetivos.

## 5.2. Objetivos

– Conocer los principales problemas teóricos surgidos en torno a la génesis de la idea de número.

– Analizar los conocimientos previos necesarios para construir el concepto de número.

[1] En el sentido de *génesis artificial del saber* del que hemos hablado en el capítulo 2.

[2] Ver a este respecto Chamorro, M. C.: «A la búsqueda de la numeración. De la filogénesis a la ontogénesis. Aspectos didácticos e históricos», en Chamorro, M. C. (ed.): *Números, formas y volúmenes en el entorno del número*, MECD, Madrid, 2004.

– Valorar el papel del conteo en la construcción del número.

– Conocer los niveles de estructuración de la cadena numérica verbal y las fases de adquisición de la misma.

– Diferenciar entre número cardinal y ordinal.

– Reflexionar sobre los distintos contextos de utilización del número y los diferentes niveles numéricos, en tanto que variables didácticas a considerar en el diseño de situaciones didácticas para el aprendizaje del número.

– Valorar los conocimientos informales que poseen los niños en torno a la idea de número, buscando su relación con los conocimientos institucionales que proporciona la escuela.

– Conocer los distintos modelos matemáticos de construcción del número natural.

## 5.3. Perspectiva histórica. Corrientes y resultados

### 5.3.1. Introducción

Si hay un objetivo matemático por excelencia en la Educación Infantil, este es la construcción por parte del niño del concepto de número, sobre el que necesariamente van a basarse el resto de los conocimientos numéricos del primer ciclo de la Educación Primaria.

Las investigaciones en torno a la génesis del número y a su naturaleza son muy numerosas y variadas, y tienen su origen en los primeros trabajos de Piaget y Szeminska[3], de carácter estructuralista, publicados en 1941. La mayoría de las investigaciones posteriores, que tienen como referente obligado los trabajos de Piaget, pueden ser reagrupadas en torno a dos orientaciones o perspectivas teóricas: el cognitivismo de origen anglosajón, con el tratamiento de la información a la cabeza, y el neoestructuralismo.

Los trabajos de Piaget y Szeminska son completados y reevaluados en la década de los sesenta por colaboradores del Centre International d'Épistémologie Génétique de Ginebra, entre los que se encuentran Beth, Papert, Grize, Gréco y Morf[4]. Todos estos trabajos han puesto de manifiesto que la construc-

[3] Piaget, J. y Szeminska, A.: *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delacroix et Niestlé, Neuchâtel, 1941.

[4] Gréco, P.; Grize, J. B.; Papert, S. y Piaget, J.: *Problèmes de la construction du nombre*, P.U.F., Paris, 1960.
Beth, E. W. y Piaget, J.: *Épistemologie mathématique et psychologie*, P.U.F., Paris, 1961.

ción y evolución de los sistemas normativos, que validan nuestros conocimientos de lo real, es idéntica en el niño, el lógico o el matemático, y que estos sistemas son inventados mucho antes de que puedan ser formalizados. En cuanto a la reevaluación de los resultados de Piaget, muy cuestionados en diversos aspectos, se ha llevado a cabo a la luz de nuevos hechos experimentales, y de las distintas axiomatizaciones del número, centrándose en la hipótesis piagetiana de que la serie de números se constituye como síntesis operatoria de la clasificación y la seriación.

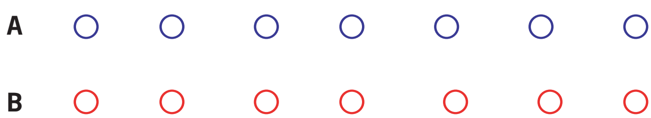
En lo que sigue pasaremos revista tanto a los trabajos de Piaget como a resultados posteriores que avalan o modifican tesis anteriores.

### 5.3.2. El problema de la conservación de la cantidad

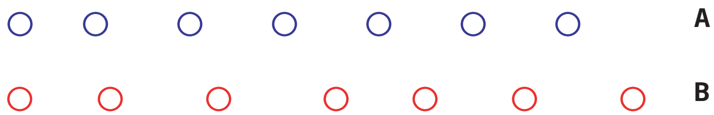
El constructivismo de Piaget supone una ruptura tanto con el inneísmo (las estructuras lógicas del individuo son innatas y forman parte del patrimonio genético) como con el empirismo (la aportación externa que viene a través de los sentidos proporciona esas estructuras, que estarían en los objetos), y postula, básicamente, que el niño construye las estructuras lógicas reconstruyendo y reestructurando lógicamente su entorno, en interacción constante. Construye así dos modalidades de estructuras, las llamadas **estructuras lógico-matemáticas,** que organizan los objetos discontinuos (seriación, clasificación y número), y las llamadas **infralógicas,** que organizan los objetos continuos (sustancia, peso, volumen, espacio, etc.). En la perspectiva constructivista los niños comparan, clasifican y ordenan en el espacio y en el tiempo, y gracias a estas acciones construyen sus conocimientos aritméticos, de manera que la experiencia del niño con los objetos, que sólo juegan el papel de soporte, es necesaria para el descubrimiento del número, que es algo que no puede extraerse directamente de los objetos, en contra de lo que postula el empirismo.

La conservación es para Piaget la permanencia del objeto (número de elementos, sustancia sólida o líquida, etc.), frente a un grupo de transformaciones (deformaciones, fraccionamiento, desplazamientos, etc.). Es decir, el reconocimiento de la igualdad, que requiere la construcción de invariantes, que, como veremos más adelante, reposa sobre la construcción de la reversibilidad.

La prueba clásica más conocida de conservación de las cantidades discretas es la siguiente. El experimentador dispone dos hileras, de siete fichas cada una, en correspondencia óptica, tal como sigue:



y pregunta al niño si hay la misma cantidad de fichas rojas que de azules[5]. Después procede, a la vista del niño, a separar las fichas de una de las hileras hasta obtener una disposición similar a la siguiente:




de manera que la correspondencia visual se rompa. Pregunta después: ¿hay más rojas o más azules?, ¿cómo lo sabes? En otros casos, los niños son invitados a construir una hilera de fichas equivalente a una dada.

Piaget encuentra cuatro niveles de conductas:

1. *Ausencia de correspondencia término a término*. Se da en niños de edades comprendidas entre los 4 y 5 años, y se caracteriza porque usando una intuición simple tiene más en cuenta la configuración global y estática de las hileras (longitud de la misma) que la cantidad de fichas. Los individuos de esta etapa no saben servirse de la correspondencia término a término para responder a la cuestión, y se hayan atrapados por las configuraciones figurativas de las fichas.

2. *Correspondencia término a término sin conservación* (5-6 años). Si bien los niños son capaces de establecer una correspondencia término a término entre las fichas rojas y las azules, una vez que esta se rompe visualmente, porque las fichas se separan o se juntan, los individuos renuncian a la equivalencia numérica. Argumentan que hay más fichas en la hilera **B** porque es más larga, o bien en **A** porque las fichas están más juntas, según se realice la centración sobre uno u otro aspecto, longitud o densidad.

3. *Conservación no duradera* (en torno a los 7 años). La conservación depende de la transformación realizada y del contexto, de manera que el individuo se muestra conservador en unos casos y en otros no. Según Piaget, se trata de una etapa intermedia, por la que no pasan necesariamente todos los individuos; éstos se encuentran sometidos a un conflicto, pues los datos emanados de la correspondencia término a término se contradicen con los índices perceptivos, y la conservación depende de si el individuo se centra en el resultado de la correspondencia término a término o en los índices perceptivos.

4. *Conservación necesaria* (a partir de los 7 años). El niño, a pesar de las transformaciones que pueden dar lugar a índices perceptivos engañosos, afirma la conservación de la cantidad, utilizando argumentos del tipo: «Es parecido, no se ha añadido ni quitado nada, siempre es lo mismo, porque las fichas pueden volver a juntarse (o separarse, según el caso), esta fila es más larga pero en la otra las fichas están más juntas», etc. Respuestas que ponen en evidencia com-

[5] La prueba original se realiza con niños de edades comprendidas entre los 4 y los 8 años.

portamientos de compensación (longitud/densidad), o reversibilidad en la correspondencia (juntar/separar).

Hay en esta etapa una especie de regulación interna que hace que la centración evolucione. Así, el individuo es capaz de argumentar que si bien **B** es más larga, en **A** las fichas están más juntas.

**Actividad 1:** Leer las experiencias relativas a la conservación de las cantidades continuas en el libro de Piaget y Bärbel Inhelder: *El desarrollo de las cantidades en el niño*.

### 5.3.2.1. La cuotidad

Estudios posteriores de Pierre Gréco[6] han puesto de manifiesto que existe un estado intermedio entre la correspondencia término a término y la conservación de la cantidad, en el que hay conservación de lo que Gréco ha denominado *cuotidad*[7] o «número contado» (*quotité* en francés).

Gréco procede de la siguiente manera: en la prueba anterior de las fichas rojas y azules, se pide al niño que cuente las fichas que hay en **A,** se tapa **B** y se le pide que adivine, sin contar, cuántas hay en **B.** Después, se le pide que cuente las fichas de **B.** Se le hace repetir el número de fichas encontrado para **A** y para B, que es el mismo. Se vuelve entonces a la situación inicial, desplazando a continuación las fichas de **B,** y se le pregunta: ¿dónde hay más, en **A** o en **B?,** ¿cuántos hay en **A** y cuántos en **B?**

Las respuestas obtenidas permiten, en primer lugar, diferenciar entre dos tipos de conservaciones: la relativa al número (la cuotidad), y la relativa a la cantidad. Así, hay niños que prevén de forma acertada el número de fichas que habrá en B, 7, si bien siguen diciendo que las 7 azules son más grandes que las 7 rojas. Esta situación, que puede parecer paradójica, es más usual de lo que pudiera parecer, pues se da en el 20% de los niños de edades comprendidas entre 5 y 8 años, que en el 75% de los casos dan juicios de no conservación disociando cantidad y cuotidad. Según Gréco la conservación de la cuotidad proviene de la acción de contar, que es utilizada muy tempranamente por los niños, y que es incluso aprendida como rito de carácter social. La cuotidad, a pesar de no tener un carácter enteramente cardinal, supone ya el carácter encajado de la serie numérica en el que se fundamentará después la cardinación operatoria.

[6] Gréco, P. y Morf, A.: *Structures numériques élémentaires*, P.U.F., Paris, 1962.

[7] La *quotité* se correspondería con lo que algunos autores han denominado posteriormente conteo numerado. La noción de cuotidad tiene un cierto estatuto cardinal, si bien no se da la inclusión jerárquica de las clases propia de la cardinación operatoria propiamente dicha.

Como resultado de las diferentes experiencias llevadas a cabo, Gréco afirma que «hay una disociación efectiva entre las conservaciones (de la cantidad o de la cuotidad) y el conteo instrumental»[8]. Más adelante, define operacionalmente la cuotidad como la anticipación numérica demandada, considerando tres niveles distintos de conservación:

I. No conservación del número ni de la cantidad.

II. No conservación de la cantidad y conservación del número.

III. Conservación del número y de la cantidad.

Por tanto, un resultado interesante es:

El número contado, la cuotidad, se conserva antes que la cantidad.

Piaget y sus colaboradores estudian también el desarrollo y evolución de la correspondencia término a término, y la seriación, encontrando las mismas etapas que para la conservación numérica.

Investigaciones posteriores han confirmado la veracidad de esta afirmación, por lo que puede afirmarse lo siguiente:

Existe un estrecho paralelismo, en las tres etapas del desarrollo, de las clasificaciones, las seriaciones y el número (Beth & Piaget).

Además, los errores cometidos por los individuos en los estadios I y II de construcción del número se corresponden con dificultades del mismo tipo en clasificaciones y seriaciones (Piaget & Inhelder, Gréco & Morf). Sin embargo, la mayoría de las investigaciones posteriores a las de Piaget, parecen mostrar que no hay sincronía entre la adquisición de la conservación numérica y la seriación y la inclusión; la adquisición de esta última, así como de la transitividad (6-7 años), sería posterior a la conservación del número (5-6 años).

La afirmación que acabamos de subrayar sirve a Piaget para establecer un hecho de gran trascendencia para la actuación didáctica en el aula:

La serie de los números se constituye en tanto que síntesis de la clasificación y la ordenación (Beth & Piaget).

[8] *Op. cit.*, 44.

Un resultado interesante, debido también a Gréco, es el hecho de que la conservación de la desigualdad es más resistente a las transformaciones que dan lugar a índices perceptivos engañosos que la conservación de la igualdad; es decir, los niños conservan más fácilmente la desigualdad numérica que la igualdad numérica. Una posible explicación es que, para romper la desigualdad se necesita realizar una transformación de aumento o de disminución hasta obtener la igualdad. Si $A < B$, hay que añadir objetos a A, o quitar objetos de B, para llegar a la situación $A = B$, transformaciones pertinentes desde un punto de vista cuantitativo, en tanto que las transformaciones espaciales (separar, juntar, desplazar, etc.) no son pertinentes en este sentido.

Como consecuencia, desde un punto de vista didáctico, sería interesante diseñar aprendizajes basados en transformaciones aditivas o sustractivas, sobre las que los niños tienen conocimientos muy precoces, anteriores a la conservación, de manera que los juicios de igualdad estuvieran basados en el tipo de transformación llevada a cabo, añadir y quitar, y en la reversibilidad de tales acciones.

### 5.3.3. Los modelos matemáticos de construcción del número natural

Si bien nuestro objetivo no es hacer una discusión matemática de los posibles modelos de construcción del número natural, razón por la cual no nos extenderemos demasiado (parte de esta información se incluye en el anexo), sí nos parece oportuno estudiar el posible paralelismo entre Matemáticas-Psicología y Didáctica, sobre todo con vistas a fundamentar una posible ingeniería didáctica que recree la génesis artificial del saber (ver capítulo 2), pues sólo mostrando la complejidad matemática del concepto de número podrán apreciarse los múltiples aspectos que deben abordarse didácticamente, y la gran diferencia que existe entre el conocimiento social del número y el conocimiento lógico-matemático[9].

Si se comparan las tesis piagetianas con las distintas axiomáticas del número natural: Peano, Quine, Poincaré, Rusell..., se encuentra una cierta correspondencia con los procesos genéticos, si bien son de naturaleza distinta. Así, por ejemplo, la iteración $n+1$ es construida lentamente por los individuos, de manera que en torno a los 8 años es utilizada tan solo por un 70 % de los niños[10], lo que viene a demostrar que los principios inneístas de

[9] Recomendamos leer lo que dice C. Kamii a este respecto en su libro de 1983: *Las teorías de Piaget y la educación preescolar.*

[10] Gréco, P.; Grize, J. B.; Papert, S. y Piaget, J.: *Problèmes de la construction du nombre*, P.U.F., Paris, 1960.

Poincaré[11], en los que la iteración es un postulado primitivo, están lejos del funcionamiento cognitivo real.

Por otra parte, no ha podido verificarse la independencia entre ordinales y la serie de números postulada por Russel y Whitehead, por lo que parece improbable que los mecanismos formadores de los cardinales y ordinales sean independientes. Las componentes lógicas del número dan lugar a una síntesis nueva que va más allá de la composición de clases o la composición serial, es la síntesis de las dos a la vez. «El número no es ni un simple sistema de inclusión de clases, ni una simple seriación, sino una síntesis indisociable de la inclusión y la seriación»[12].

Russell privilegia la idea de cardinal, entendiendo el número natural como cualidad de una clase de conjuntos equipotentes (dos conjuntos son equipotentes o coordinables si se puede establecer una aplicación biyectiva entre ambos). En la axiomática de Peano (ver anexo), los cardinales y los ordinales se corresponden necesariamente, e implican un elemento de recurrencia acorde con los datos experimentales y la interpretación de la epistemología genética. Están presentes tanto la idea de equipotencia como la de siguiente de un número (función sucesor).

La posición de los distintos matemáticos y su relación con las actividades reales del sujeto los resume Droz así[13]:

| Actividad del sujeto | El número es | Perspectiva teórica |
|---|---|---|
| Clasificar | Cardinal | Cantor, Frege, Russell |
| Comparar, seriar | Ordinal | Peano, Neumann, Weyl |
| Denotar y componer | Algebraico | Hilbert |
| Denotar y contar | Constructivo | Lorenzen |
| Transformar | Operador/razón | Euclides, Euler, Herbart |
| Contar | Producto del conteo | E. Cassirer |

El examen detenido que este autor hace de las teorías anteriores le lleva a varias conclusiones que compartimos completamente:

---

[11] Poincaré postula que el número reposa sobre una intuición primitiva del significado de la iteración n+1 sobre la que se construye el siguiente de un número y, por tanto, la serie numérica, y que esta intuición es anterior a la lógica y de naturaleza más profunda. Gelman y Gallistel van a defender después que los principios del conteo, de los que hablaremos más adelante, están presentes implícitamente en las primeras actividades numéricas verbales de los niños, y que han sido obtenidas a través de la evolución filogenética.

[12] Piaget, J.: *Six études de psychologie*, Gonthier, 96, Paris, 1964.

[13] Droz, R.: «Théories et Méthodes. Approches critiques», 292, en Bideau, J. *et al.*: *Les chemins du nombre*, Presses Universitaires de Lille, 1991.

– Ni filósofos ni matemáticos pueden decir de manera unívoca qué son, de dónde vienen y para qué sirven los números.

– Los niños no construyen **una** noción del número ni **una** práctica del número. Hay nociones y usos múltiples del número que se solapan, se completan, se excluyen, etc.

– Los investigadores psicogenéticos se reducen a una única perspectiva que no permite dar cuenta de toda la riqueza del pensamiento y las actividades infantiles.

**Actividad 2:** Confeccionar una lista de las ocasiones en las que usamos el número a lo largo de un día y con qué fines, estableciendo el carácter cardinal, ordinal u otro, de cada utilización.

## 5.4. El papel del conteo en la construcción del número

Aunque la unanimidad entre los distintos autores está lejos de alcanzarse, hay una tendencia generalizada a considerar el conteo como una actividad importante para la adquisición del número. Sin embargo, las investigaciones piagetianas no han tomado en la consideración que se debiera el aspecto cultural del número, olvidando que éste es el resultado de una evolución sociohistórica. De hecho, una de las críticas más extendidas de los resultados de la escuela de Piaget tiene que ver con la poca importancia dada al conteo, lo que consideró una mera habilidad social sin contenido lógico-matemático.

Pero más allá de la parte mecánica e imitativa de los primeros recitados de la serie numérica verbal –la cantinela–, muchos autores coinciden al considerar que el conteo elaborado está estrechamente ligado al desarrollo cognitivo, y que saber contar puede conducir al descubrimiento del esquema que permite generar la serie de palabras-número.

El importante papel concedido, primero por Gréco y después por Gelman, al conteo y a la correspondencia uno a uno, está basado en la precocidad de la conservación de la *cuotidad* (número contado), y en el papel que esta juega en la formación numérica. Pues las acciones del sujeto que utiliza «una numeración preaprendida, los gestos, las miradas que verifican si la correspondencia término a término está completa, introducen un orden implícito, que juega, sin embargo, un papel esencial en la formación numérica: es, en efecto, el fundamento de lo diferente, sin el cual los conjuntos no serían más que clases o categorías»[14].

[14] Gréco, P. y Morf, A.: *Structures numériques élémentaires*, P.U.F, 68, Paris, 1962.

El conteo en los niños más pequeños, considerado por Piaget como meramente verbal, y por tanto subestimado, guarda una gran relación con la cardinación; aunque, como veremos más adelante, los niños comienzan utilizando las palabras-número en contextos muy distintos, tanto de tipo simbólico como no numérico y por tanto con significaciones muy distintas, y terminan por elaborar las conexiones entre estas significaciones y los distintos sentidos del número, y ello, a lo largo de un periodo que va de los 2 a los 8 años. La relación entre las conductas de conteo y las competencias numéricas sigue siendo un tema de estudio. No obstante lo anterior, se puede afirmar lo siguiente:

La tesis piagetiana de la insuficiencia del conteo como fundamento para la comprensión del número sigue en pie.

## 5.4.1. El conteo y los conocimientos informales de los niños

Con una perspectiva de enseñanza, resulta vital estudiar la relación entre el desarrollo de conceptos matemáticos y la adquisición de procedimientos numéricos; por eso, muchos autores (Gelman y Gallistel, Resnick, Ford, Baroody), se han interesado por la manera de contar de los niños, ya que es para muchos un índice de la riqueza de conocimientos matemáticos en las primeras edades así como un factor potencial del desarrollo de las conceptualizaciones numéricas.

Para Rienaud[15], aunque los niños pequeños no sean capaces de expresar en términos abstractos la noción de conservación, de hecho se comportan como si reconocieran la invariancia del número a pesar de los cambios perceptivos realizados en las colecciones, siempre y cuando se trate de colecciones pequeñas, lo que es avalado por Resnick y Ford[16]. Igualmente, desde edades muy tempranas, en cuanto el lenguaje aparece, los niños son capaces de actividades de conteo con resultado correcto, lo que está de acuerdo con los presupuestos expresados por Gelman[17] y otros autores ya reseñados. Para Gelman, la actitud de contar es natural y universal, igual que la palabra, y se constata que las poblaciones no escolarizadas son aptas para realizar cálculos elementales simples.

Para muchos autores (Rienaud, Baroody, Kamii), los niños poseen a partir de los tres años la intuición global de las operaciones elementales de adición y

[15] Rienaud, J.: *L'approche du nombre para le jeune enfant*, P.U.F., Paris, 1989.

[16] Resnick, L. y Ford, W.: *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Paidós-MEC, Barcelona, 1991.

[17] Gelman, R. y Gallistel, C. R.: *The child's understanding of number*, *Cambridge*, MA, Harvard University Press, 1975.

sustracción, siempre de forma no formalizada. Así, los niños no tienen dificultades para reconocer que la adición o sustracción de objetos modifica la cantidad y la equivalencia entre dos colecciones equipotentes. Los niños usan, al principio, procedimientos mecánicos muy poco elaborados para contar, procedimientos que mejoran a la vez que van construyendo significativamente los distintos usos y contextos en los que el número es pertinente. Dicho de otra manera, para comprender lo que es el número hay que trabajar con él en una gran variedad de situaciones, y muchas de estas situaciones, que se encuentran fuera de la escuela, enfrentan al niño con la tarea de contar de una manera informal.

Sin embargo, la matemática informal, resultado de la elaboración de la matemática intuitiva, tiene sus limitaciones. Es imprecisa y poco útil cuando las cantidades son grandes, requiere mucho tiempo y esfuerzo. Y es precisamente por sus limitaciones por lo que debe ser el punto de partida de aprendizajes más formales, de manera que los alumnos puedan apreciar la necesidad y las ventajas de disponer de procedimientos más formales, que generalmente necesitan el uso de signos específicamente matemáticos, que encuentran así su razón de ser.

«La matemática informal de los niños es el paso intermedio crucial entre su conocimiento intuitivo, limitado e impreciso y basado en su percepción directa, y la matemática poderosa y precisa basada en símbolos abstractos que se imparte en la escuela»[18].

## 5.4.2. Los principios de conteo de Gelman y Gallistel

Según Gelman, el conteo es el medio por el cual el niño se representa el número de elementos de un conjunto dado y razona sobre las cantidades y las transformaciones aditivas y sustractivas. Las capacidades de conteo y razonamiento numérico son, como ya hemos dicho, muy precoces, y Gelman mantiene que si a veces el niño fracasa en la tarea de contar, se debe sobre todo a los condicionamientos ligados a la tarea. Así, las acciones materiales que hay que realizar para que se pueda contar una colección: separar los elementos contados de los que quedan por contar, ir marcando los elementos ya contados, situar los elementos en una disposición espacial que permita la identificación de cada elemento, etc., lo que llamamos *enumeración*, son tareas complejas para los niños en edad preescolar, que carecen de estas competencias procedimentales.

A pesar de lo anterior, Briand[19] ha probado que los conocimientos enumerativos son ignorados, tanto por las instituciones escolares como por los enseñantes, que no hacen ninguna transposición didáctica de estos saberes, que se

[18] Baroody, A.: *El pensamiento matemático de los niños*, Visor, 46, Madrid, 1988.
[19] Briand, J.: *L'énumération dans le mesurage des collections*, thése, Université de Bordeaux I, 1993.

convierten así en *objetos didácticamente invisibles*. Como la institución escolar exige de una forma u otra que el alumno sepa contar, y por tanto enumerar, estos conocimientos quedan bajo la responsabilidad del alumno, quien deberá adquirirlos mediante sus actividades sociales y familiares fuera de la escuela[20].

**Actividad 3:** Examinar varios libros escolares de los niveles de Educación Infantil y primer ciclo de Educación Primaria, y comprobar la afirmación anterior.

Una consecuencia de lo anterior es lo siguiente:

Deben diseñarse situaciones didácticas específicas para la enseñanza de la enumeración.

Puntear, tocar los objetos o desplazarlos a medida que se van contando supone, como señala Fuson, la necesidad de fijar la vista en un objeto concreto, aislarlo en un punto particular del espacio y en un momento particular de tiempo, lo que crea *unidades espacio-temporales* que permiten la correspondencia término a término de la que hablaremos a continuación.

Los llamados principios de Gelman y Gallistel expresan las competencias que posee un individuo cuando tiene que hacer frente a la tarea de contar, y son los cinco que siguen:

## Principio de correspondencia término a término

Cada elemento de la colección que se va a contar debe corresponderse, de manera únivoca, con una, y sólo una, palabra-número de la cantinela[21].

Este principio necesita, de manera implícita, que el alumno sepa hacer una correcta tarea de enumeración que le permita no dejar elementos sin contar, o contar otro varias veces. Teóricamente, tal y como ocurre con las cantinelas infantiles, es posible contar con una lista cualquiera de palabras distintas a la habitual, siempre que estas no se repitan y estén ordenadas; de hecho, cada lengua utiliza una lista diferente de palabras, lista que se aprende antes de manera sociocultural y sin significación matemática alguna, como quien aprende de memoria la letra de una canción escrita en un idioma que desconoce.

[20] Existen en el mercado varios programas informáticos especialmente diseñados para este fin por Briand y Brousseau y publicados por Anaya.

[21] A partir de ahora, usaremos la expresión «cantinela» para referirnos a la cadena numérica verbal: uno, dos, tres, cuatro, cinco…

Muchos de los errores de conteo que cometen los niños se deben a que no respetan este principio, debido a la falta de pericia y entrenamiento en técnicas de enumeración. Muchos autores consideran que este principio no es dominado antes de los 4 años.

### Principio de orden estable

La cantinela que escojamos para contar debe ser recitada siempre de la misma forma, siguiendo un orden estable. Es evidente que si contamos la colección

con la cantinela habitual obtendríamos *cinco*, en tanto que si mi cantinela fuese: uno, dos, tres, cinco, cuatro, el resultado sería *cuatro*. La cantinela usada debe ser siempre la misma y en el mismo orden; pues, aunque en principio la cantinela podría ser cualquiera, por necesidades de comunicación todos usamos la misma.

Este principio tiene por objeto *etiquetar* una colección de manera que pueda ser diferenciada de otras, razón por la cual las palabras-número de la cantinela deben ser necesariamente distintas, sin que una misma palabra pueda ser reutilizada.

El aprendizaje de la serie numérica estable requiere tiempo, y es necesario esperar a los 4 años y medio para que el niño pueda repetir la serie de números hasta el 10 de forma correcta. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que los aprendizajes numéricos son muy variables de unos niños a otros, pues no hay que olvidar que el número tiene una componente sociocultural importante.

### Principio de abstracción

Contar una colección supone interesarse solo por el aspecto cuantitativo de la misma, dejando de lado las características físicas de los objetos contados. Por esa razón, las colecciones A y B tienen el mismo cardinal, y ello con independencia de que las bolas de A sean rojas y las de B azules, y sin importar si tienen diferente tamaño.


En realidad, los niños no conservadores, que se dejan confundir por índices perceptivos engañosos, ponen de manifiesto en algunos casos la transgresión de este principio. Así, dirían que hay más en B, porque las bolas azules son más grandes que las rojas, lo que supone tomar en consideración aspectos no determinantes para la cardinalización[22].

[22] El reconocimiento de la equivalencia de colecciones equipotentes se corresponde con el reconocimiento de la equivalencia en magnitud cuando pasamos de las cantidades discretas a las continuas, es decir, con el establecimiento de las clases de equivalencia. Ver capítulo 10.

## Principio de no pertinencia del orden

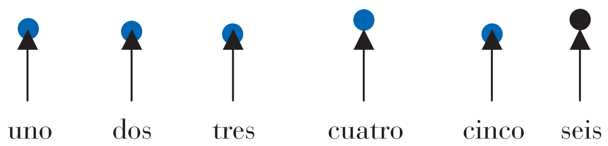
El número obtenido al contar una colección no depende del orden en el que se enumeran sus elementos. Los elementos de una colección pueden ser contados en el orden en que se desee, puede empezarse por donde se desee, el orden no es pertinente, siempre se obtendrá el mismo resultado.

Cuando al contar el niño respeta los cuatro principios enumerados hasta ahora: correspondencia término a término, orden estable, abstracción y no pertinencia del orden, se dice que hace un *conteo numerado*. Para reconocer que el niño hace un conteo, se requiere aún otro principio, quizás el más importante desde el punto de vista de la comprensión y significación de lo que supone el hecho de contar.

Los niños que según Gréco se encuentran en el estadio II (no conservación de la cantidad y conservación del número), en el que hay conservación de la cuotidad, respetan los cuatro principios anteriores, no así el siguiente principio. Otros autores, anglosajones fundamentalmente, utilizan la expresión «regla del último número pronunciado», para referirse a la conducta de muchos niños que responden a la pregunta ¿cuántos? con el último número contado, sin que esto implique la comprensión del principio de cardinalidad al que nos referiremos a continuación.

## Principio de cardinalidad o cardinalización

El número enunciado en último lugar no representa únicamente al elemento correspondiente, sino también al total de la colección. Así, seis no sólo es la palabra-número que en la enumeración corresponde a la bola negra, seis representa a la totalidad de la colección, es el cardinal de la misma. Según Fuson esta regla precede a la comprensión del principio cardinal, y podría tener su origen en la imitación de la actividad sociocultural de contar.




Los niños que aplican la regla del último número pronunciado contestan seis si se les pregunta cuántas bolas hay, y cuando se les pide que muestren los seis, señalan la bola negra.

La adquisición del principio de cardinalidad supone dar significación cardinal a los símbolos numéricos, y se produce entre los 4 y 5 años, dependiendo del nivel de estructuración de la cantinela en que se encuentre el niño, aspecto que abordaremos a continuación.

La opinión más extendida entre los investigadores es que las estructuras mentales subyacentes al conteo se construyen gradualmente, a medida que el niño desarrolla sus habilidades de conteo, si bien algunos de los principios, como el de no pertinencia del orden, parece que se alcanzan antes que otros, no así el de cardinalidad que es el más tardío. En todo caso, hay que señalar que la práctica del conteo por sí sola no es suficiente para adquirir la conservación del número, pero sí puede dar lugar a la conservación de la cuotidad.

## 5.5. Estructuración de la cadena numérica verbal

### 5.5.1. El sistema cognitivo que gobierna el tratamiento numérico

Como analizaremos más adelante, algunos autores (Mc.Closky, Caramazza, Basili) consideran que la organización cognitiva, que organiza el tratamiento numérico, comporta tres módulos:

$$\text{Un sistema de comprensión (C)} \begin{cases} \text{Designaciones escritas} \\ \text{Designaciones orales} \end{cases}$$

$$\text{Un sistema de producción (P)} \begin{cases} \text{Designaciones orales} \\ \text{Designaciones escritas} \end{cases}$$

$$\text{Un sistema de cálculo (Ca)} \begin{cases} \text{Conocimiento símbolos de las operaciones} \\ \text{Procedimientos de cálculo} \\ \text{Hechos numéricos archivados en M.L.T.}^{23} \end{cases}$$

Los dos primeros módulos, C y P, se subdividen a su vez en dos partes, una relativa a las designaciones escritas de los números, las cifras árabes, y otra relativa a las designaciones orales, la cantinela.

El módulo Ca distingue entre la comprensión de los símbolos de las operaciones numéricas, el manejo de procedimientos de cálculo (no sólo algoritmos, sino también técnicas artesanales o informales de cálculo), y la necesidad de disponer de hechos numéricos archivados en la memoria, de manera que para recuperar un resultado no sea necesario rehacerlo (por ejemplo, tener que hacer $3 + 3 + 3 + 3$ para encontrar $3 \times 4$).

[23] Los cognitivistas diferencian entre la memoria de trabajo, en la que se guardan momentáneamente los datos que necesitamos en un momento dado y que luego olvidamos, y la memoria a largo plazo, M.L.T., en la que archivamos informaciones que recuperamos cuando las necesitamos, por ejemplo, los resultados de las tablas de multiplicación.

Se hace una clara diferenciación entre las designaciones escritas y las designaciones orales, pues como vemos a continuación tienen una estructura distinta:

| Numeración escrita | Numeración oral |
|---|---|
| Sistema de numeración regular. | Irregular, sus irregularidades varían de una lengua a otra (once, doce, trece...). |
| Base 10. | Varias bases auxiliares (veinte, treinta..., ciento, mil, diez mil...). |
| Mismos símbolos y designaciones con independencia del idioma. | Cambian según la lengua, no solo en el nombre sino en la estructura[24]. |

**Actividad 4:** Confeccionar una lista de todas las irregularidades de la cantinela en español hasta el millón, poniendo en paralelo el nombre que correspondería si fuese regular, y el usado. Buscar también las reglas para generar las palabras-número en español.

Otros autores, como Dehane, hablan de un triple código:

– *Analógico:* permite representarse el orden de magnitud de los números, así como la aprehensión de la numerosidad.

– *Visual:* imagen visual de las cifras árabes que permite la lectura y escritura de los números.

– *Verbal auditivo:* cadena numérica verbal, dependiente del tratamiento lingüístico.

Estos códigos serían utilizados por el niño en función de la tarea, siempre con posibilidad de traducción de un código a otro.

Una descripción como la anterior permite, por ejemplo, dar cuenta de las diferentes patologías de aprendizaje que afectan, muy a menudo, solo a ciertos aspectos de los anteriormente citados, que pueden funcionar disociadamente unos de otros. Según lo anterior:

Está perfectamente justificado dedicar en la escuela un espacio específico para el aprendizaje de la cadena numérica verbal y no dejarla bajo la responsabilidad del alumno y de sus aprendizajes privados, ayudándole en el descubrimiento de las reglas de formación de las expresiones matemáticas verbales.

[24] Por ejemplo, en francés, 80 es concebido como 4 x 20 *(quatre-vingts)*, 90 como 80 + 10 *(quatre-vingts dix)*.

## 5.5.2. La adquisición de la cantinela

En todo caso, nos interesa saber cómo adquieren los niños los códigos visuales y auditivos, es decir, las designaciones orales y escritas de los números.

Sabemos que la construcción de la serie numérica verbal es laboriosa, comienza hacia los dos años y no termina hasta el final del primer año de Educación Primaria, si bien la edad y el tiempo de adquisición son muy variables de un niño a otro, dependiendo de factores como la interacción social y la práctica extraescolar.

Aunque los niños al principio recitan la cantinela, cuentan sin ningún significado cardinal. Tomando en consideración las aportaciones de Vigotsky sobre la relación entre pensamiento y lenguaje, habría que pensar que, en la medida en que el lenguaje se interioriza, esto permite comenzar la construcción inicial de la idea de cardinal, de manera que la cardinalidad queda posteriormente integrada en el conteo, pasándose de un recitado mecánico a una enumeración basada en la cardinalidad.

La mayoría de los trabajos parten del postulado de que el niño efectúa, casi de golpe, una estructuración del sistema verbal numérico a partir de la base 10, lo que se ha manifestado como dudoso en ciertos trabajos realizados con la numeración, inglesa y francesa, en las que al igual que en la española hay irregularidades, en nuestro caso en el 10 y el 15, lo que impide reestructurar dichos números a partir del 10; en el caso de la numeración japonesa, parece que la base 5 juega un papel importante durante un tiempo, lo que está en relación con el uso de los dedos como colecciones testigo. El hecho de usar estas colecciones testigo, los dedos en particular, es para autores como Brissiaud[25] una preparación para el cálculo pensado, que tiene a su vez como misión extender la red de relaciones numéricas que se archivarán en la M.L.T.

Sabemos que la serie numérica se construye a trozos:

– De 1 a 7, la serie se estructura con coordinación del carácter sucesivo y la iteración n + 1 (para encontrar el número que sigue sabemos que hay que añadir uno).

– De 8 a 15, se trata de una serie ordenada de términos equidistantes. Hay correspondencia entre cardinal y ordinal (el número que ocupa el undécimo lugar corresponde a una colección de cardinal 11). El niño no sabe usar la iteración para encontrar el siguiente de un número.

[25] Brissiaud, R.: *La enseñanza del cálculo*, Visor, Madrid, 1993.

– De 15 a 30, manteniendo durante mucho tiempo un mero carácter de orden serial, sin aritmetizar[26], sin reconocimiento de la relación entre iteración y orden. Así, para encontrar el siguiente de un número, los niños se ven obligados a comenzar el recitado de la serie desde 1.

Hay que pensar que la construcción de la serie numérica reposa sobre principios lógicos: esquemas de conteo perceptivo y figurativo, números contenidos unos en otros, primero implícitamente y después explícitamente, hasta constituir lo que Fuson[27] caracteriza como *serie numérica encajada, seriada, cardinalizada y unitizada*, de la que hablaremos más adelante.

### 5.5.3. Los distintos niveles de organización de la cantinela

Los resultados más interesantes se deben a la investigadora norteamericana Karen Fuson, que nos presenta una secuencia de desarrollo que toma en consideración tres aspectos: el nombre de los números, su estructuración y las prácticas de conteo asociadas. Distingue cinco niveles:

**I. *Nivel repetitivo.*** La cantinela es un todo: unodostrescuatrocincoseis... indiferenciado, las palabras-número forman parte de una secuencia que no puede romperse. **Los números carecen de individualidad.** No hay significación cardinal, ordinal o aritmética de ningún tipo. La serie puede ser recitada como cualquier otra cantinela infantil, aunque no haya ninguna colección que contar, fuera de todo contexto numérico. Cuando se cuenta en este nivel rara vez se respeta el principio de correspondencia término a término.

**II. *Nivel incortable.*** La cantinela se compone de palabras individualizadas, que solo pueden ser recitadas en escrupuloso orden. El recitado no puede empezarse en cualquier número, **la cadena es un todo incortable.** Hay ya, sin embargo, una cierta significación cardinal y ordinal del conteo, se tiene conciencia de que llegar más lejos en el recitado significa una mayor cantidad. El niño empieza a tener la posibilidad de realizar una correspondencia término a término, siempre empezando por uno, y con enormes dificultades para pararse en el recitado una vez contados todos los elementos de la colección, pues llevar el control de dónde pararse supone una carga cognitiva muy pesada. **La serie solo puede ser recitada partiendo de uno.** El niño puede empezar a resolver problemas sencillos, siempre verbales, de carácter aditivo y sustractivo. Puede

[26] Del hecho de que 8 se recite tres lugares después que el 5 no deducen que $8 = 5 + 3$, no establecen relaciones aritméticas entre los números de la serie en función del lugar que ocupan en la misma.

[27] Fuson, K.: «Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans», en Bideau, J.; Meljac, C. y Fisher, J. P. (eds.): *Les chemins du nombre*, Presses Universitaires de Lille, 160, Lille, 1991.

responder a la pregunta de cuál es el siguiente, pero para contestar debe comenzar el conteo por uno. Empieza a formarse la habilidad de poder recitar hasta el número deseado.

Esta fase puede durar mucho tiempo, y puede llegar hasta más allá de los cinco años, dependiendo de la frecuencia de utilización y del grado de ejercitación del niño.

**III. *Nivel cortable.*** Puede comenzar a contar empezando por cualquier número y puede pararse donde desee. Hay una mejor coordinación entre las nociones de sucesor y cardinalidad, y una clara relación ordinal entre los elementos de la cantinela. Empieza el conteo hacia atrás, aún con grandes dificultades y usando procedimientos muy pesados (por ejemplo, contar primero hacia delante y después reproducir la serie al revés), mezclando con frecuencia palabras-número de la secuencia hacia delante.

Hay una **gran flexibilidad en el uso de la cantinela,** y por tanto el niño dispone de medios más eficaces para resolver problemas aditivos verbales.

**IV. *Nivel numerable.*** Cada elemento de la serie tiene entidad propia, es una **cadena unitaria** en la que cada palabra tiene una entidad cardinal. Hay una fusión de las significaciones ordinales y cardinales. Se puede contar en ausencia de los objetos a contar. Aparecen dos nuevas habilidades: contar X a partir de un número Y, contar de X a Y para encontrar el número de palabras que separan X de Y, habilidades que también se dan en el conteo hacia atrás aunque con más errores.

**V. *Nivel terminal.*** La cadena se convierte en **bidireccional.** Hay una fuerte automatización de acceso y recuperación de los elementos de la serie, lo que permite contar con habilidad hacia adelante y hacia atrás, pudiendo cambiar muy deprisa de dirección. Hay posibilidades de obtener combinaciones aditivas, a través de composiciones, descomposiciones y reagrupamiento de términos, lo que facilita encontrar el resultado de adiciones y sustracciones y el desarrollo del cálculo pensado.

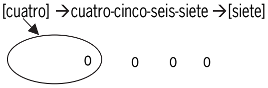
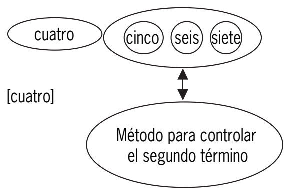
Se llega a la última etapa piagetiana de construcción de la serie, como **serie encajada, unitizada, bidireccional y cardinalizada[28].**

El cuadro de Fuson[29] resume todas las fases y competencias que tiene el niño en cada una de ellas.

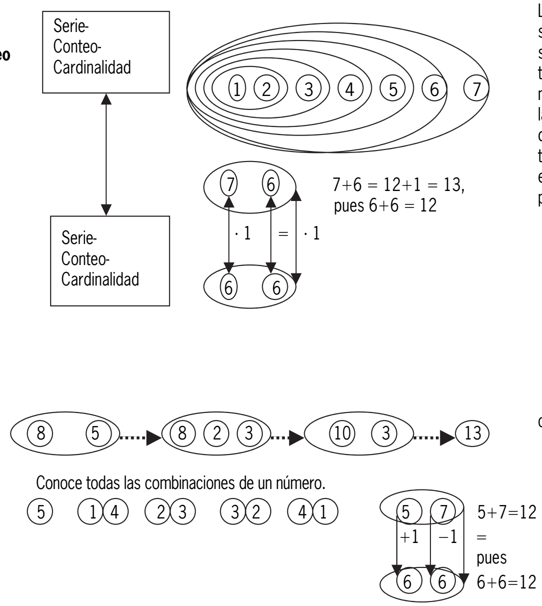
---

[28] El término «encajada» hace referencia al reconocimiento de la inclusión jerárquica de clases: $1 < (1 + 1) < (1 + 1 + 1) < (1 + 1 + 1) < \ldots$

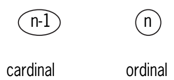
[29] *Op. cit.*, 174.

| Niveles | Significaciones | Estructuras conceptuales de la serie y relaciones entre las diferentes significaciones | |
|---|---|---|---|
| **Repetitivo** | Serie | unodostrescuatrocincoseissiete | Las palabras no se diferencian. |
| **Cadena incortable** | Serie Serie-Conteo | uno-dos-tres-cuatro-cinco-seis-siete<br>uno-dos-tres-cuatro-cinco-seis-siete<br>o o o o o o o | Las palabras se diferencian.<br>Las palabra se asocian a un objeto. |
| | Serie-Conteo-Cardinalidad | uno-dos-tres-cuatro-cinco-seis-siete →[siete]<br>o o o o o o o | Los objetos contados tienen un resultado cardinal. |
| **Cadena cortable** | Serie-Conteo-<br>Cardinalidad | [cuatro] →cuatro-cinco-seis-siete →[siete]<br><br> | Los términos se integran en el conteo de la suma; el primer término integrado está abreviado por el paso de la cardinalidad al conteo en la significación de las palabras-número. |
| **Cadena unitaria** | Serie-Conteo-Cardinalidad | <br> | La serie de palabras-número se transforma en entidades cardinales; se hace una correspondencia entre el segundo término integrado y otra presentación de este último. |

**Cadena bidireccional/ Verdadero conteo numérico**




La serie se convierte en una serie numérica unitizada seriada y encajada; los dos términos existen por sí mismos y son equivalentes a la suma; las relaciones entre dos estructuras término/ término/suma diferentes se establece; los términos pueden ser descompuestos.



## 5.5.4. Fases de aprendizaje de la cantinela

Los niños descubren enseguida que entre las palabras unas sirven para contar y otras no, de manera que rara vez utilizan series de palabras distintas, y muestran un gran interés por aprender, desde edades muy tempranas, la serie correcta de palabras-número que sirven para contar. El aprendizaje de la cantinela del 1 al 100 se desarrolla, generalmente, entre los 2 y los 7 años, y aunque hay variaciones de unos individuos a otros, aparecen ciertas regularidades en su aprendizaje.

De manera paralela a la organización de la cantinela en los niveles que acabamos de ver, Fuson distingue tres partes en la adquisición de la misma que coexisten durante mucho tiempo:

### Parte I, estable y convencional

Se corresponde con el recitado normal de la cantinela por un adulto. Siempre se repiten las palabras-número en el mismo orden, estable, y este orden se corresponde con el preestablecido, convencional: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... El tamaño de la serie recitada de manera estable y convencional crece en función de la edad, y se produce un aumento significativo en torno a los cuatro años y medio. Se constata, tal y como se ha venido diciendo, la gran diferencia que puede haber de unos individuos a otros, en función de las interacciones socioculturales, y de su escolarización o no. Esta parte va a ir aumentando y consolidándose, hasta constituir la única parte del recitado.

### Parte II, estable y no convencional

El individuo repite una parte de la serie siempre de la misma forma, estable, al menos en el 80 % de los casos, si bien en la parte de la serie recitada puede haber omisiones o cambios en el orden. Por ejemplo: 12, 13, 15, 16, 18, 17.

Parece que, con carácter bastante general, se da sobre todo en la serie de números que va del 10 al 19, cuando se está aprendiendo la cantinela hasta el 30 y los niños deben contar una colección bastante numerosa sin disponer aún de la cantinela memorizada, razón por la que parece que inventan una serie en la que integran los números que recuerdan haber escuchado a los adultos. Durante este periodo los niños no están aún en condiciones de extraer las regularidades del sistema de numeración oral, regularidades que solo se van a percibir netamente a partir del 20, pues no hay que olvidar que once, doce, trece, catorce y quince son irregulares.

### Parte III, no estable y no convencional

Las palabras-número recitadas cambian de una vez a otra, inestable, y constituyen una serie desordenada, con ausencias y repeticiones, no convencional.

Se trata de series poco estructuradas que pueden contener otras palabras distintas de las palabras-número, colores por ejemplo, aunque sin embargo no son del todo aleatorias. Así, son frecuentes series como 13, 16, 19.

Ejemplos de recitados por parte del mismo individuo:

$$\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6}_{\text{Parte I}} \ldots\ldots \underbrace{7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 19}_{\text{Parte II}} \ldots\ldots \underbrace{25, 28, 30, 42, 36, 50}_{\text{Parte III}}$$

1, 2, 3, 4, 5, 6 .............7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 19..............25, 28, 30, 42, 36, 50

1, 2, 3, 4, 5, 6 .............7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 19..............20, 36, 40, 54, 52, 60

1, 2, 3, 4, 5, 6 .............7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 19..............25, 36, 41, 37, 84, 65

Parte I — Parte II — Parte III

A lo largo del aprendizaje se produce una especie de deslizamiento, de manera que la parte I se va haciendo más grande en detrimento de la parte II, a la vez que la parte II se hace más grande a costa de la parte III. Cuando la serie está completamente aprendida y automatizada solo hay parte I. Este modo de adquisición sugiere que el aprendizaje de los números se hace término a término, al menos hasta el 20, lo que no es de extrañar dado el número de irregularidades, y la necesidad de aprender de memoria los números del 1 hasta el 15, pues no hay regla de formación para estos números.

El aprendizaje de la secuencia de los números hasta el 20 es, por tanto, fundamentalmente memorístico, en tanto que del 20 al 100 la memorización se ayuda de ciertos patrones que se repiten, ayudando las regularidades fonéticas a encontrar los errores del recitado. Sabemos también que el conjunto de unidades y el de decenas son adquiridos separadamente y con un periodo de tiempo entre ambos, y que existe una fuerte correlación entre el nivel de organización de la cadena verbal y las situaciones en que se emplea, muy particularmente en lo que se refiere a la resolución de problemas aditivos y sustractivos.

Los cinco niveles que siguen explican la evolución de los aprendizajes[30]:

– ***Adquisición término a término:*** los nombres se adquieren uno a uno, siguiendo la serie, aproximadamente hasta el 20.

– ***Control a través de la serie elemental:*** los errores cometidos, más allá del 20, son detectados gracias al conocimiento de la serie elemental. Así, se sabe que 25 va después de 24 porque 5 va después de 4.

[30] Gauderat-Bagault, L. y Lehalle, H.: «La généralisation des connaissances numériques avant et après 7-8 ans», en Bideau, J. y Lehalle, H.: *Le développement des activités numériques chez l'enfant.* Lavoisier, Paris, 2002.

– ***Conocimiento de un esquema con dos posiciones «x-número»:*** así, los números posteriores a 20 deben ir precedidos de 2 y seguir después la serie numérica elemental: 2**1**, 2**2**, 2**3**, 2**4**, 2**5**, 2**6**... Se desconoce, sin embargo, el léxico correspondiente (veintiuno, veintidós, etc.), y a veces se producen errores provocados por una generalización de la regularidad como: veintinueve, veintidiez, veintionce, veintidoce...

– ***Adquisición de la sucesión de las decenas:*** la adquisición del léxico correspondiente a las dece*nas* viene guiado por el conocimiento del esquema con dos posiciones que acabamos de ver, esquema que se ve reforzado por la escritura de la numeración árabe. X representa aquí el nombre de la decena: veinti..., treinta y..., cuarenta y..., cincuenta y..., etc.

La generalización abusiva de esta regla produce después errores del siguiente tipo: 108, 109, 200, 201..., al considerar la centena como una nueva decena.

– ***Sistematización de la sucesión de las decenas:*** conocimiento exacto del léxico y control efectivo de la secuencia comprendida entre 1 y 100.

## 5.6. Niveles numéricos y contextos de utilización del número

Como hemos venido diciendo, las competencias numéricas de los niños están muy contextualizadas, varían de unos niños a otros y dependen también del orden de magnitud de los números presentes, es decir del nivel numérico.

### 5.6.1. El conteo súbito o *subitizing*

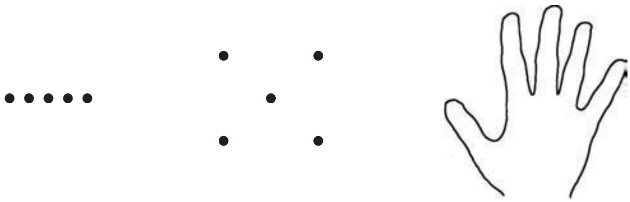
Existen varios procedimientos que permiten al ser humano determinar el número de elementos de una colección: el conteo súbito, la evaluación global y el conteo.

El término inglés *subitizing*[31] designa la operación que realizamos cuando en un golpe de vista, y sin necesidad de realizar un conteo, al menos de forma consciente, podemos decir con exactitud la cantidad de objetos de una colección, y todo ello en un tiempo muy corto, casi de manera instantánea.

La capacidad para realizar un conteo súbito está presente en los niños de edades muy tempranas, a partir de los 5 meses según algunos autores. Pero esta capacidad solo sirve para números pequeños. Durante mucho tiempo se mantuvo que el límite del conteo súbito estaba en 7, considerando que ésta era

[31] Del adjetivo latino *subitus* y del verbo *subitare*, que en latín medieval significaba «llegar de pronto»; en castellano «súbitamente».

la frontera entre dos mecanismos diferentes de aprehensión del número, pero algunos autores como Fischer[32] mantienen que el límite claro está en 3, y que después hay una discontinuidad entre 3 y 4. La posibilidad de extender el conteo súbito hasta 7 parece estar ligada al reconocimiento de los llamados patrones o configuraciones. Así, no es igualmente fácil reconocer que hay 5 en cada uno de los tres casos que siguen:



También es posible que haya un procedimiento mixto, subitizar-contar, consistente en subitizar una cantidad pequeña presente y contar a partir de ahí los elementos que quedan (hacer 5 + 2 para el caso del 7), con lo que el conteo súbito se convertiría en una capacidad susceptible de ser desarrollada y permitiría contar de manera más rápida colecciones relativamente importantes.

Si el límite estuviera en 3 como afirma Fisher, habría que extraer como consecuencia didáctica la conveniencia de buscar configuraciones que privilegiaran constelaciones de 3.

El uso de configuraciones o patrones para representar cantidades facilita su reconocimiento, así como las composiciones y descomposiciones de números.

Las configuraciones canónicas de los primeros números se corresponden con las constelaciones de un dado.

Los números que pueden ser reconocidos a través del *subitizing* se denominan ***números perceptivos o visuales.***

Las configuraciones de los números perceptivos juegan un papel importante durante mucho tiempo, y son utilizados en situaciones de equivalencia, adición y sustracción.

Están después los ***números habituales,*** que llegan normalmente hasta el 30. El número de días del mes, los alumnos de una clase, etc., están dentro de este segmento numérico. El aprendizaje de esta parte de la cantinela se produce con relativa facilidad y permite la observación de las primeras regularidades de la serie numérica.

---

[32] Fischer, J. P.: *Apprentissages numériques*, Presses Universitaires de Nancy, Nancy, 1992.

Los ***números familiares*** varían de un niño a otro, pues para unos son familiares y para otros no. Así, para un alumno el 84 puede ser familiar porque es el número del portal de su casa, o el 32 porque siempre coge ese autobús. Estos números dependen mucho del contexto y, como veremos a continuación, pueden ser usados dentro de un uso social o escolar, en contextos no numéricos. Hay que hacer notar que los números son aprendidos y reconocidos globalmente, de manera que un niño que reconoce y nombra el 32 desconoce que se trata de un número que tiene 3 decenas y 2 unidades.

Finalmente están los ***grandes números,*** a los que los niños dan una significación casi de carácter mágico. Cuando un niño en una conversación dice que su padre tiene «tres mil» coches miniaturas, y otro le contesta que el suyo «diez mil», y otro que «infinito», es fácil comprender que la significación cardinal dada a tales expresiones es simplemente «muchos», y que la palabra «infinito» es el límite pero no se sabe de qué.

La escritura de estos números solo será posible, con sentido, a partir de las actividades de cambios y agrupamientos que necesariamente hay que realizar en el ámbito de la numeración decimal, pues la memorización de nombres y escrituras debe dar lugar al aprendizaje de las reglas, en definitiva, a la interiorización de los algoritmos de las numeraciones oral y escrita.

Una variable didáctica que debe ser gestionada en las situaciones didácticas de aprendizaje del número es, sin duda, el tamaño de los números utilizados, pues va a hacer variar no solo las estrategias utilizadas por los alumnos, sino la posibilidad de que estos puedan resolver o no la situación.

**Ejemplo:**

Supongamos que se trata de saber cuántas canicas hay entre dos colecciones, una de 3 canicas y otra de 2. Una estrategia como **el recuento,** consistente en juntarlas todas y contar desde 1, es posible y fácil de llevar a cabo por alumnos de 4 años. Si se trata de dos colecciones de 15 y 4 canicas respectivamente, una estrategia como el recuento es pesada y larga, razón por la que pueden producirse muchos errores si se acude al recuento, en tanto que una estrategia como el **sobreconteo rápido,** consistente en partir de la cantidad mayor, 15, y contar 4 hacia delante: 16, 17, 18 y 19 es muy eficaz y segura. Ahora bien, esta estrategia ya no está al alcance de alumnos tan pequeños, y hay que esperar hasta los 6-7 años para que pueda ser resuelta por este procedimiento. Sin embargo, un sobreconteo para averiguar cuántas son 5 y 4 es factible para niños más pequeños, pues con ayuda de los dedos de las manos pueden representarse las cantidades correspondientes y llevar un control del conteo, ya sea para el **sobreconteo lento** (5, 6, 7, 8 y 9) o el rápido (6, 7, 8 y 9).

Hay que recordar también que según la teoría de situaciones, para que el alumno aprenda, las situaciones deben estar diseñadas de forma que el cambio de variables fuerce la construcción de estrategias nuevas, que no son otra cosa que los conocimientos que se quieren construir.

**Actividad 5:** En función de los distintos niveles de organización de la cadena numérica verbal (repetitivo, incortable...), deducir cuándo puede realizarse el recuento, el sobreconteo y el deconteo (por ejemplo, contar hacia atrás 3 desde 7 para hacer 7-3).

### 5.6.2. Contextos de utilización del número

Fuson[33] distingue siete contextos de utilización del número, que son progresivamente utilizados y comprendidos por los niños.

Tres contextos matemáticos:

– *Cardinal*, del que ya hemos hablado al tratar los principios de conteo.

– *Ordinal*, en el que el número hace referencia a un elemento dentro de una colección ordenada, describiendo la posición relativa de ese elemento dentro de la serie.

– *Medida*, en el caso de las colecciones de entidades discretas el cardinal no es otra cosa que su medida, por eso se dice que el número es una magnitud[34], pero, para las cantidades continuas (longitud, masa, capacidad, superficie, volumen, etc.), el número hace referencia al número de cantidades-unidad que «caben» en una cantidad dada. Esta concepción del número es para algunos autores como Vergnaud[35] de una gran importancia, considerándola como una de las ideas fundadoras del concepto de número.

Se sabe que las relaciones cardinales se construyen con anterioridad a las relaciones ordinales y a las de medida.

Dos contextos que tienen una componente social y utilitaria:

– *Secuencia*, por ejemplo, cuando el niño recita una cantinela como:

*Uno, dos, tres y cuatro,*
*Margarita tiene un gato*
*con las orejas de trapo.*

Es evidente que los números carecen de significación cardinal, y las palabras-número son aquí, únicamente, palabras buscadas para rimar.

– *Conteo*, cuando los niños recitan la cantinela en ausencia de toda actividad que tenga por objeto saber cuántos elementos hay en una colección, normalmente no hay ni siquiera objetos, el recitado se produce simplemente por el

[33] *Op. cit.*, 159.
[34] Ver el capítulo 10 correspondiente a la medida de magnitudes.
[35] Ver la teoría de los campos conceptuales en el capítulo 2.

placer de contar y aprender la serie numérica. Es una actividad del mismo tipo que recitar los días de la semana, los meses del año, las estaciones, una canción, un poema, etc.

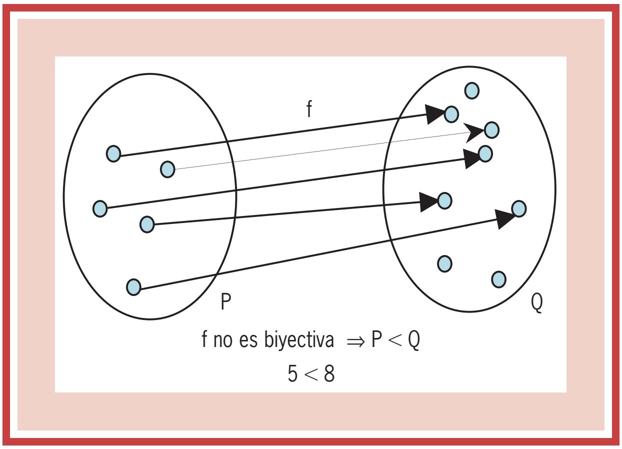
El séptimo contexto:

– *Simbólico*, cuando el número es utilizado para simbolizar o denotar algo: una línea de autobús, el número del carné de identidad, el número de una bola que ha salido en el bingo, el cupón premiado de la ONCE, el dorsal de un jugador, el logotipo de una cadena de televisión, un número de teléfono, etc.

No hay un único significado del número, por lo que construir el concepto de número supone descubrir, paulatinamente, las distintas significaciones, así como la relación entre ellas.

Como consecuencia didáctica de lo anterior, habría que extraer la necesidad de diseñar situaciones de aprendizaje del número que permitiesen descubrir los diferentes usos del número, sabiendo que algunas de estas situaciones se presentan de manera espontánea en la vida del niño, en tanto que otras no aparecen, por lo que, de manera expresa, deben ser introducidas en el aula.

Así, el descubrimiento de que el uso del número nos permite evitar correspondencias término a término, y es suficiente para comparar dos colecciones, no es evidente; supone deducir de la relación entre números una relación entre colecciones; en otras palabras, que los conjuntos y su medidas son homomorfos para la relación de orden. Es decir, que si no existe una correspondencia biyectiva entre una colección P y otra R, y solo puede construirse una correspondencia que sea solo inyectiva pero no suprayectiva, entonces se deduce que hay menos elementos en P que en R. Según el homomorfismo existente entre los



conjuntos y sus medidas, basta con comparar estas últimas, lo que nos evita hacer la correspondencia entre P y Q, lo que supone una gran economía de pensamiento y acción. Por otra parte, la comparación entre números no va a basarse únicamente en el lugar que estos ocupan en la serie numérica, sino que el descubrimiento de esta regla va a apoyarse en las actividades de comparación paralelas entre conjuntos, por una parte, y números por otra.

Obsérvese, pues, que hay más Matemáticas de lo que parece debajo de la afirmación inicial que parecía banal: «El uso del número nos permite evitar correspondencias término a término, y es suficiente para comparar dos colecciones».

Conviene pues desconfiar de una conceptualización del número basada en actividades en las que el alumno no usa el número para resolver una situación problemática, y se limita a dibujar flechas o poner etiquetas a los conjuntos.

**Actividad 6:** Buscar situaciones de la vida escolar, familiar o social, que se correspondan con los distintos contextos de uso del número.

## 5.7. La numeración

El estudio de la adquisición del código numérico escrito es un dominio poco estudiado. Los trabajos más importantes son los de Meljac[36], Perret[37] y El Bouazzaoui[38], algunos de cuyos resultados vamos a recoger a continuación.

El aprendizaje de la serie escrita se produce con posterioridad a la serie oral, y la distancia en el tiempo entre estos dos aprendizajes es tanto mayor cuanto menores son los números, de manera que para números grandes hay un aprendizaje prácticamente simultáneo de numeración oral y escrita. En el periodo de la Educación Infantil hay un claro predominio de la numeración oral, en tanto que los niños de estas edades solo escriben, leen y reconocen números aislados, con numerosos errores de orientación en las cifras, mediante un proceso de memorización y reproducción de signos. Y reconocen los números gracias a la ordenación de la serie, por lo que su identificación como elementos aislados, fuera de un orden, se hace más complejo.

[36] *Op. cit.*

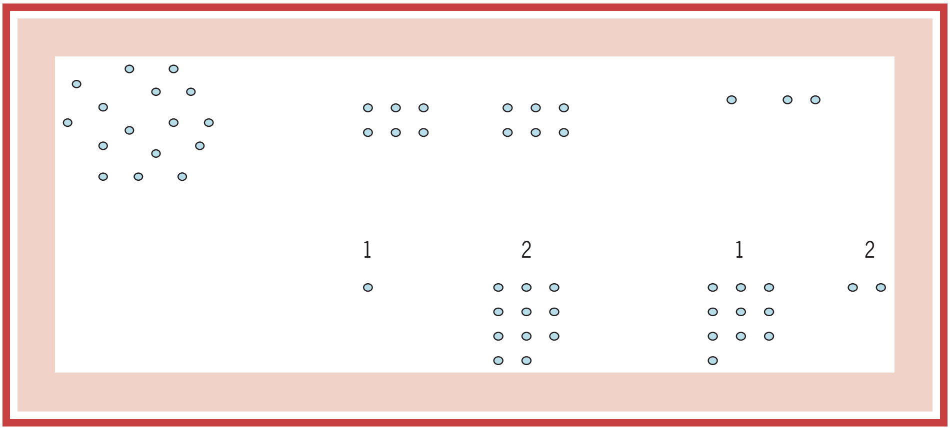
[37] Perret, J. F.: *Comprendre l'écriture des nombres*, Peter Lang, Berne, 1985.

[38] El Bouazzaoui, H.: *Études de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération*, thèse doctorale, Université de Bordeaux I, 1982.

Como ya hemos dicho, el paso de una decena a otra es el punto más delicado. Los mayores problemas están entre 60 y 100, con frecuentes confusiones entre 60 y 70, por razones fonéticas evidentes. Hay también confusión entre las decenas y las unidades, sin que la escritura correcta suponga necesariamente la comprensión del valor de posición.

Kamii ha puesto de manifiesto que escribir o leer un número es una cosa, pero comprender el significado preciso de cada cifra es otra muy distinta. Y esta significación, a la luz de los trabajos experimentales de Perret, sigue siendo problemática incluso a la edad de 9 años, en la que solo el 50 % de los niños tienen una buena comprensión de la numeración de posición, lo que puede explicar muchas de las dificultades de cálculo que tienen los escolares durante la Educación Primaria. Puede afirmarse que la lógica subyacente que emplean los alumnos para interpretar la escritura de posición es la misma que la utilizada para las primeras nueve cifras.

Por eso, cuando en la experiencia narrada por Kamii[39], una vez que los niños han cogido la cantidad de fichas correspondientes a la escritura 12, si se les pide que den a cada cifra del 12 la cantidad de fichas que corresponda, se obtienen cosas sorprendentes para la lógica de un adulto, como las siguientes:




En ese estudio que Kamii lleva a cabo encuentra cinco niveles en el aprendizaje de la numeración:

**Nivel I.** Las cifras árabes representan objetos de la vida real, estarían en un contexto no numérico.

[39] Kamii, C.: *El niño reinventa la aritmética*, Visor aprendizaje, 68, Madrid, 1985.

**Nivel II.** Buscan alguna correspondencia entre las cifras y alguna propiedad de tipo cualitativo de las cosas que están escritas en el mismo papel.

**Nivel III.** Si bien el número representa una cantidad de objetos, los números de dos cifras son un todo que no puede ser separado en cifras. La significación que se da a cada una de las cifras corresponde con la vista en el párrafo anterior.

**Nivel IV.** El número de dos cifras representa la totalidad de los objetos, y cada una de las cifras tiene entidad propia, que representa la cantidad correspondiente (el 3 de 13 significa 3, y el 1 uno), sin que se establezca una relación entre el valor de cada una de las cifras.

**Nivel V.** El valor de cada una de las cifras depende de su posición.

La tabla que sigue, tomada de Kamii, proporciona la relación entre edades y niveles:

| | Edades | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nivel | 4<br>N = 12 | 5<br>N = 15 | 6<br>N = 12 | 7<br>N = 17 | 8<br>N = 12 | 9<br>N = 12 |
| V | | | | 13 % | 18 % | 42 % |
| IV | | | 55 % | 56 % | 82 % | 50 % |
| III | 25 % | 62 % | 45 % | 31 % | | 8 % |
| II | 42 % | 31 % | | | | |
| I | 33 % | 7 % | | | | |

No hay, además, un recurso espontáneo en el sistema de numeración a la hora de expresar una cantidad de objetos, incluso cuando se domina la escritura de los números. Este hecho resalta la importancia de encontrar situaciones fundamentales que creen las condiciones de aprendizaje necesarias para provocar esta utilización espontánea, lo que nos lleva a los trabajos de ingeniería didáctica de El Bouazzaoui y Briand[40]. La primera sugiere una progresión de aprendizaje para alumnos de 6 años, basada en otra anterior, propuesta por el propio Brousseau, que consiste en lo siguiente:

– Introducir y construir los primeros números, de 1 a 5 ó 6, basándose en el reconocimiento global.

– Inventar un medio de reconocer que dos conjuntos son equipotentes cuando no se puede concluir directamente, lo que lleva a la construcción de otros números (comprendidos entre 6 y 12 ó 15).

[40] Brïand, J.: *L'énumeration dans le mesurage des collections*, thèse doctorale, Université de Bordeaux I, 1993.

– Encontrar otros números gracias al orden y la adición.

– Extender el conjunto de números conocidos y designarlos sirviéndose de la numeración de posición.

Los resultados de El Bouazzaoui se corresponden con los de Perret, en el sentido de que los niños utilizan preferentemente una numeración de tipo icónica, incluso cuando saben contar, que es abandonada en beneficio de la numeración decimal, apreciada como la más rápida. Ahora bien, cuando la presión del maestro decrece, los niños manifiestan la tendencia a servirse de nuevo de una numeración icónica. El uso de situaciones de comunicación en las que debe mandarse un mensaje numérico ha permitido a los alumnos aprender a escribir los números y aprender nuevos números, forzando el abandono de la numeración de carácter icónico.

La gestión de estas situaciones por parte del maestro es, sin embargo, muy delicada, pues aparecen grandes diferencias entre los alumnos, que están enmascaradas en la enseñanza tradicional.

Entre los resultados obtenidos por Perret hay que resaltar la constatación de que los conocimientos numéricos de los alumnos se ponen en juego en relación con tareas particulares; son por tanto saberes locales, islotes de conocimientos, que no están articulados los unos con los otros. Hay pues poca transferencia y generalización, lo que está en consonancia con la arquitectura cognitiva modular, de la que ya hablamos, y que hace pertinente la distinción entre conocimientos procedurales y declarativos.

Podemos concluir que la enseñanza precoz de la numeración[41], sobre todo usando distintas bases, tal y como se hizo durante mucho tiempo tanto en la Educación Infantil como en Primaria, no permite una construcción lógica y progresiva de la numeración decimal. Parece más deseable retrasar su aprendizaje, de manera que el alumno pueda comprender el sistema de reglas y cambios que implica la numeración decimal, y desde luego en ningún caso realizar este aprendizaje en la Educación Infantil.

## 5.8. Bibliografía

Baroody, A.: *El pensamiento matemático de los niños*, Visor, Madrid, 1988.

Bermejo, V.: *El niño y la aritmética*, Paidós, Barcelona,1990.

Bideau, J. y Lehalle, H. (dir.): *Le développement des activités numériques chez l'enfant*, Lavoisier, Paris, 2002.

[41] Para comprender las dificultades de todo orden que encierra la numeración decimal de posición, conviene leer: Chamorro, M. C.: «A la búsqueda de la numeración. De la filogénesis a la ontogénesis. Aspectos didácticos e históricos», en Chamorro, M. C. (ed.): *Números, formas y volúmenes en el entorno del número*, MECD, Madrid, 2004.

BIDEAU, J.; MELJAC, C., y FISCHER, J. P. (eds.): *Les chemins du nombre*, Presses Universitaires de Lille, Lille, 1991.

BRIAND, J. *et al.*: *Logiciel «Á nous les nombres 1»*, Profil, Paris, 1992. Existe versión castellana en Anaya.

BRISSIAUD, R.: *Comment les enfants apprennent à calculer*, Retz, Paris, 1989. Existe traducción española en Visor aprendizaje.

CHAMORRO, M. C.(coord): *Didáctica de las Matemáticas*, Educación Primaria, Pearson, Madrid, 2003.

—: (dir): *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*, MECD, Madrid, 2004.

HUGHES, M.: *Los niños y los números*, Planeta, Barcelona, 1987.

KAMII, C.: *El número en la educación preescolar*, Visor, Madrid, 1983.

—: *El niño reinventa la aritmética I y II*, Visor, Madrid, 1985 y 1992.

KAMII, C. y DE VRIES, R.: *La teoría de Piaget y la educación preescolar*, Visor, Madrid, 1983.

PERRET-CLERMONT, A. N.: *La construcción de la inteligencia en la interacción social*, Visor, Madrid, 1984.

RESNICK, L. y FORD, W.: *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Paidós-MEC, Barcelona, 1991.

VERGNAUD, G.: *El niño, las matemáticas y la realidad*, Trillas, México, 1990.

—: «Problemas aditivos y multiplicativos», en Chamorro, M. C.: *Los lenguajes de las ciencias*, MECD, Madrid, 2004.

VILETTE, B.: *Le développement de la quantification chez l'enfant*, Presses Universitaires du Septentrion, Paris, 1996.

# Anexo
# Construcción matemática del número natural

La idea de número es una idea primaria que lejos de ser sencilla encierra una gran complejidad matemática. El gran matemático David Kronecker expresaba esa complejidad con una frase que ha pasado a la historia: «Dios hizo los números naturales y el hombre hizo todo lo demás».

Una opción para construir los números naturales es seguir la vía conjuntista, a partir de la noción de equipotencia o coordinabilidad de conjuntos.

Definición: Sea U un conjunto y $P$(U) el conjunto de las partes de U. Se define en $P$(U)la siguiente relación:

$$\mathrm{A}\ R\ \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{f}: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}\ /\ \mathrm{f}\ \text{es biyectiva.}$$

Se dice entonces que A y B son **conjuntos equipotentes o coordinables.**

Se demuestra fácilmente que $R$ es una relación de equivalencia, como consecuencia, los elementos de $P$(U )/ $R$ se constituyen en clases de equivalencia.

En una clase de equivalencia estarán todos los elementos de $P(U)$ que sean equipotentes entre sí. Así, la clase del conjunto A, que denotamos por [A], será:

$[A] = \{X \in P(U) \: / \: X \text{ es coordinable con } A\}$

A esta clase de equivalencia la llamamos **cardinal de A:** c (A).

Los números naturales van a ser los números cardinales de cada una de las partes finitas de U (conjunto universal). Así:

$0 = c\,(\varnothing)$

$1 = [A]$ tal que A verifica que: si $x \in A \Rightarrow A - \{ x \} = \varnothing$

$2 = [B]$ tal que B verifica que: si $x \in B \Rightarrow B - \{ x \} = 1$

Construir la serie de cardinales hasta el 6.

Esta construcción apoyándose en la teoría intuitiva de conjuntos viene limitada por la paradoja de Russel, quien puso de manifiesto que considerar el conjunto de todos los conjuntos como un conjunto lleva a contradicción (el catálogo de todos los catálogos que no se mencionan a sí mismos, ¿es un catálogo?).

Por esta razón, se recurre a otras construcciones del número natural que sean más rigurosas, matemáticamente hablando, concretamente a construcciones axiomáticas.

**¿Qué es un sistema axiomático?**

En un sistema axiomático hay:

a) *Términos primitivos* de la teoría que vamos a construir, de naturaleza no especificada y cuya existencia se postula.

b) *Axiomas*, que son proposiciones relativas a los términos primitivos que se tienen por verdaderas (propiedades de estos que no se demuestran).

c) *Definiciones* de términos distintos de los primitivos.

d) *Teoremas*, que son propiedades que pueden deducirse usando las leyes de la lógica formal a partir de las definiciones y los axiomas.

## Axiomática de Peano

Siguiendo este modelo, el matemático Peano creó un sistema axiomático para construir formalmente el conjunto de los números naturales **N**. Este sistema es el siguiente:

– *Términos primitivos:*

Un objeto que se denota con el símbolo 1

Un conjunto $N \neq \varnothing$

Una función llamada *sucesor* o *siguiente*, simbolizada por s

– Axiomas:

$A_1$: $1 \in N$ (1 es un número natural)

$A_2$: la función sucesor s es una aplicación inyectiva de:

$$s: N \longrightarrow N - \{1\} \text{ y biyectiva de } s: N \longrightarrow N$$

(Todo número natural es siguiente de algún natural, a excepción del 1; es decir, todo número salvo el 1 es sucesor de otro).

> Razonar por qué todo número tiene un único sucesor, y por qué si dos números tienen el mismo sucesor, estos son necesariamente iguales.

$A_3$: *Principio de inducción completa.* Si M es un subconjunto de N que contiene a 1 y al siguiente de n, siempre que contenga a n, entonces $M = N$

Es decir, si $M \subset N$ es un conjunto que satisface:

$1 \in M$

$n \in M \Rightarrow s(n) \in M$, entonces $M = N$

En la versión que acabamos de exponer, el 0 no es un número natural, pero Peano hizo otra versión posterior que incluía al cero. Normalmente, si se quiere indicar que el 0 no se considera como número natural, el conjunto correspondiente se denota por:

$$N^* = N - \{0\}$$

## La adición y la multiplicación en N

Pueden ahora definirse las operaciones de adición y multiplicación de números naturales como sigue:

*Adición:*

1) $a + 0 = a \,,\ \forall\, a \in N$

$a + 1 = s(a) \,,\ \forall\, a \in N$

2) $a + s(b) = s(a + b),\ \forall\, a, b \in N$

*Multiplicación:*

$a \cdot 0 = 0 \,,\ \forall\, a \in N$

$a \cdot s(b) = a \cdot b + b \,,\ \forall\, a, b \in N$

Probar que la adición así definida verifica las propiedades conmutativa u asociativa, y que se verifica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

## El orden en N

En N puede definirse también una relación «<» de orden estricto, como sigue:

$$a < b \Leftrightarrow \exists\, x \in N \,/\, b = a + x$$

Probar que se trata de una relación de orden estricto en N que cumple las propiedades antisimétrica y transitiva. Demuestra también las propiedades que siguen:

$$n < s(n),\ \forall\, n \in N$$

Todo número es menor que su siguiente.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } a < b \Rightarrow a + c < b + c,\ \forall\, a, b, c \in N \\ \text{Si } a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d,\ \forall\, a, b, c, d \in N \end{array}\right\}\ \text{leyes de monotonía de la suma}$$

El conjunto N con la relación de orden ≤ se dice que está ordenado. Además, dados dos elementos x, y ∈ N, siempre se puede decir quién va antes, si x o y, es decir, $\forall\, x, y \in N,\ x < y \vee y < x$.

Se dice entonces que (N, <) **está totalmente ordenado,** y que < es un orden total. Además, todo subconjunto de N tiene primer elemento, es decir, un elemento que es menor que todos los demás, se dice entonces que **N está bien ordenado.**

Demostrar la afirmación anterior.

Definición: Se llama ordinal o **número ordinal** al tipo de orden de un conjunto bien ordenado.

**Por tanto, el conjunto de los números naturales con el orden usual es un número ordinal.**

## El número natural como síntesis de las nociones de cardinal y ordinal

Vamos a establecer ahora la conexión entre el modelo axiomático de Peano y la definición conjuntista de cardinal, de manera que se defina qué es un número natural, evitando las contradicciones mostradas por Russell. Y para ello, en lugar de tomar como cardinal toda la clase de equivalencia, que no sería un conjunto, tomamos tan sólo un conjunto perteneciente a la clase. El criterio para la elección del conjunto va a venir determinado por la necesidad de respetar la inclusión jerárquica de clases, es decir, que si tengo 6, también tengo 5, y si tengo 5, también tengo 4, etc. Por tanto, es necesario que el conjunto que represente al 5 esté incluido en el conjunto que represente al 6.

De acuerdo con esta idea, si hemos definido ya 5 como un conjunto con cinco elementos, definiríamos 6 como sigue: $6 = \{5\} \cup 5$. En general, si llamamos $X^+$ al sucesor de X, el siguiente se definiría como:

$$X^+ = X \cup \{X\}$$

La serie de los primeros números naturales quedaría así:

$1 = 0^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$

$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing \cup \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$

$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

Construir los números 4 y 5 y verifica que $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset 4$...

Falta por asegurar que siempre puede construirse, de esta manera, el siguiente de un número, para lo que hace falta enunciar un nuevo axioma:

*Axioma del infinito*: existe un conjunto que contiene al cero y al sucesor de cada uno de esos elementos.

Dado un conjunto A, decimos que es un conjunto de sucesores:

$$\text{Si } 0 \in A \wedge \forall\, x \in A \Rightarrow x^+ \in A$$

Llamamos conjunto de los números naturales al mínimo conjunto de sucesores. Veamos que el mínimo conjunto de sucesores, al que llamaremos W, cumple los axiomas de Peano:

$A_1$: $0 \in W$

$A_2$: si $x \in W$, entonces $x^+ \in W$, por ser W un conjunto de sucesores.

$A_3$: W ha sido definido como el mínimo.

Como W cumple los axiomas de Peano, podemos considerar que W = N.

Definimos ahora la noción de ordinal.

Decimos que un conjunto A es un **ordinal** si cumple lo siguiente:

– Está total y estrictamente ordenado (es decir, dados dos elementos de A, siempre se puede decir quién va antes y quién después).

– Toda parte no vacía de A tiene primer elemento según la relación de orden anterior (se dice que está bien ordenado).

Vamos a probar que la relación dentro de los números naturales cumple las propiedades antisimétrica y transitiva que caracterizan a una relación de orden estricto.

Tal y como hemos construido los números naturales:

Si m es anterior a n, entonces $m \in n$ y $m \subset n$

$$\text{Si} \left.\begin{array}{c} m \in n \\ \wedge \\ n \in m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} m \subset n \\ \wedge \\ n \subset m \end{array}\right\} \Rightarrow m = n, \text{ luego } \in \text{ es antisimétrica.}$$

$$\text{Si} \left.\begin{array}{c} m \in n \\ \wedge \\ n \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} m \subset n \\ \wedge \\ n \subset s \end{array}\right\} \Rightarrow m \subset s \Rightarrow m = n, \text{ luego } \in \text{ es transitiva.}$$

Por tanto, todo número natural está total y estrictamente ordenado, es decir, es un ordinal.

Un número natural es por tanto la síntesis de un cardinal y un ordinal.

CAPÍTULO 6

# La construcción de los primeros conocimientos numéricos

Luisa Ruiz Higueras

## Contenidos

*El concepto de número no se reduce ni al proceso de conservación, ni a la actividad de cardinación, ni a la resolución de una determinada clase de problemas, ni a procedimientos algorítmicos, ni a la comprensión y manipulación de signos sobre el papel. Pero es de este conjunto de elementos diversos de donde emerge, con la ayuda del entorno familiar y escolar, uno de los edificios cognitivos más impresionantes de la humanidad.*

Gerard Vergnaud[1]

## 6.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos didácticamente la construcción de los primeros conocimientos numéricos en la Escuela Infantil. Estos conocimientos tienen una característica muy singular: se trata de saberes *naturalizados*. Socialmente consideramos que los números naturales nos vienen dados, que han existido siempre tal y como los conocemos. Identificamos un número asociándolo de modo espontáneo a su nombre: veinte, seis, diez, setenta, como un objeto más de nuestro entorno. Las actividades de contar o de designar los números parecen formar parte de la naturaleza humana y, socialmente, se considera que, para realizarlas, no hay «nada que saber»[2]. La mayoría de nosotros las llevamos a cabo de manera automática, con gran naturalidad, no cuestionándonos las condiciones de su realización. Son acciones evidentes, transparentes, y basta con realizarlas.

Sabemos que los niños, desde que son muy pequeños, pueden distinguir y comparar cantidades (muchos, pocos, mas que, menos que, tantos como...). Cuando comienzan a hablar, utilizan los nombres de los números, aunque no necesariamente ligados a la noción de cantidad y a la cardinación de colecciones. Es en la Escuela Infantil donde deben iniciar, institucionalmente, la construcción de los primeros conocimientos numéricos. Por ello, desde la Didáctica de las Matemáticas, se considera necesario generar situaciones que les permitan llevar a cabo tareas de comparación, igualación, distribución, reparto, cardinación, ordenación, etc., de colecciones, donde el número y la numeración adquieran sentido y funcionalidad.

[1] Vergnaud, G., en Fayol, M. *L'enfant et le nombre*, Delachaux et Niestlé, Paris, 1990, p. 13.

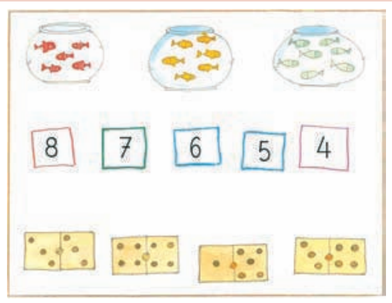
[2] La configuración de toda una estructura numérica, junto con los principios de un sistema que permitió su designación, tuvo su origen en la matemática babilónica, más tarde se amplió con las aportaciones de la matemática griega. La notación decimal hindú surgió en la escuela matemática de Bagdad en el año 770 y, alrededor del año 825, se comenzó a difundir a través de la obra del matemático árabe Al Khwarizmi. A principios del siglo XII, esta obra fue traducida al latín por Gerardo de Cremona y Robert de Chester, miembros de la escuela de traductores de Toledo, introduciéndose, de este modo, el sistema de numeración decimal en Europa.

En este capítulo llevaremos a cabo un análisis didáctico de estos objetos matemáticos en el contexto de la Escuela Infantil y, en consecuencia, adaptaremos los ejemplos y actividades a este nivel escolar. Esto no supondrá una circunscripción limitadora, ya que el marco teórico del que partimos facilita la generación de un modelo de enseñanza-aprendizaje de los conocimientos numéricos que, partiendo de situaciones propias para niños de 3 años, permite perfectamente ampliarlas, hacerlas evolucionar y adecuarlas a los primeros años de la escuela primaria.

Para adentrarnos en el capítulo, proponemos llevar a cabo una lectura detenida del ejemplo 1.

**Ejemplo 1[3]:**

**Situación escolar:** Tomamos una ficha de un manual para alumnos de Educación Infantil que están iniciando su relación escolar con el número natural. En ella se pide que asignen, a cada una de las colecciones presentadas, el número de objetos.




Para responder a esta tarea, los alumnos deben proceder a contar los elementos de cada colección y la última palabra-número pronunciada considerarla como su cardinal. Posteriormente, deben asignar el signo que corresponde a esta palabra-número y unirla adecuadamente a las colecciones.

Supongamos que algún alumno en lugar de asignar a la colección de peces amarillos el cardinal correcto, 6, le asigna 7. Cualesquiera que sean las razones por las que el alumno ha cometido este error, lo que sí podemos constatar es que el ejercicio, por sí mismo, no le «dice» al alumno que su respuesta ha sido incorrecta.

Este ejercicio no produce una «retroacción» que permita al alumno evaluar por sí mismo si ha llevado a cabo con éxito su tarea o si ha fracasado, por lo tanto, debe esperar el juicio del profesor para saber si su solución ha sido correcta o no. Este ejercicio, si bien es necesario en un momento dado del aprendizaje del alumno, para determinar si ha adquirido la escritura correcta de los números, no puede asimilarse a una situación de aprendizaje constructivo del número.

**Situación familiar:** Si pedimos a un niño de cuatro años que lleve a cabo una tarea tan cotidiana como es la de colocar en la mesa los platos para la comida, puede poner en funcionamiento varios procedimientos:

– Toma un plato en la cocina para su madre y lo lleva a la mesa, luego vuelve, toma otro para su padre y lo lleva a la mesa, vuelve, toma otro para su hermano y lo lleva a la mesa y así sucesivamente, con todos los miembros de la familia.

– Toma muchos platos de una vez y los lleva a la mesa, así asegura que tendrá para todos.

– Prevé un plato para su madre y lo toma, otro para su padre y lo toma, otro para su hermano y lo toma, etc., luego junta todos y los lleva a la mesa.

*Continúa*

[3] Adaptación de Briand, J. y Chevalier, M. C.: *Les enjeux didactiques*, Hatier, París, 1995, p. 18.

*Continuación*

Esta situación familiar, sin carácter didáctico, ya que no tiene intención de enseñar ningún conocimiento, pone en juego, sin embargo, saberes matemáticos: la correspondencia término a término, o bien la construcción de una colección coordinable a una dada, *sin la presencia* de esta última. En este último caso, el número, formulado o no, es la solución al problema que debía resolver el niño, ya que le ha permitido prever, es decir, «anticipar» la necesidad de un plato para su madre, otro para su padre, otro para su hermano, etc., antes de llevarlos efectivamente a la mesa.

Si analizamos la tarea propuesta y los procedimientos que pone el niño en funcionamiento, observamos que:

– No necesitará la aprobación de un adulto para saber si ha tenido o no éxito en su tarea.

– Puede constatar él mismo su error y modificar su estrategia.

Esta situación permite al niño determinar por sí mismo si ha tomado o no los platos necesarios para que cada miembro de su familia tenga uno, ya que le devuelve «retroacciones», es decir, le informa sobre la validez o no de su procedimiento.

A diferencia del ejercicio escolar propuesto en la ficha anterior, el concepto de número se construye en un contexto donde es funcional: sirve para resolver problemas reales.

Ante las dos situaciones anteriores, podríamos formularnos las siguientes cuestiones:

¿Cómo generar situaciones-problema en la Escuela Infantil en las que el número no sea simplemente «mostrado», sino que aparezca como solución óptima a problemas reales?

¿Se pueden modificar las prácticas escolares sobre la enseñanza de los primeros conocimientos numéricos para que los alumnos los construyan con toda su significación?

Para comprender didácticamente las respuestas que podemos dar a estas cuestiones, conviene que nos acerquemos brevemente a diferentes modelos de enseñanza del número y la numeración, ya que implican una consideración muy diferente de estos conocimientos. Este análisis previo nos ayudará a llevar a cabo una reflexión sobre qué es el número natural, o en qué consiste la numeración.

## 6.2. Objetivos

– Estudiar y analizar, desde el punto de vista matemático y didáctico, la noción de número natural y de su designación.

– Aproximarnos a diferentes modelos de enseñanza del número y de la numeración para determinar cómo la institución escolar ha considerado, y considera en la actualidad, estos conocimientos matemáticos en la Escuela Infantil.

– Construir, bajo una hipótesis constructivista por *adaptación al medio*, la situación fundamental para la cardinación de una colección y para la ordenación de los objetos de una colección, determinar sus variables didácticas para generar una familia de situaciones didácticas derivadas de ella.

– Analizar las situaciones que pueden dar significación a los primeros conocimientos numéricos en la Escuela Infantil.

– Determinar y analizar los procedimientos que pueden emplear los niños en la resolución de los problemas anteriores, así como la actividad matemática que desarrollan con ellos.

– Llevar a cabo análisis didácticos de situaciones de enseñanza-aprendizaje del número y de su designación.

– Analizar errores cometidos por los niños en relación con estos conocimientos matemáticos e identificar sus causas.

## 6.3. La enseñanza de los conocimientos numéricos en la Escuela Infantil. Breve reseña histórica

Un breve análisis de la evolución que, en los tres últimos períodos históricos se ha seguido en los programas y manuales escolares de la Escuela Infantil en relación con los primeros conocimientos numéricos, nos va a servir como iniciación al análisis didáctico que llevaremos a cabo a lo largo de este tema. Este estudio, relativo a procesos de *transposición didáctica*, nos permitirá determinar cómo la institución escolar ha considerado estos objetos matemáticos, los cambios que han sufrido, las consecuencias que se han derivado en cuanto a la enseñanza y al aprendizaje, los conceptos matemáticos sobre los que se han sustentado, etc., con objeto de situar, justificar y dar sentido a las propuestas de enseñanza que presentaremos más adelante.

Para mejor comprender la posición y el sentido de los conocimientos numéricos que figuran actualmente en los programas escolares conviene llevar a cabo una breve revisión de su evolución a través de diferentes épocas.

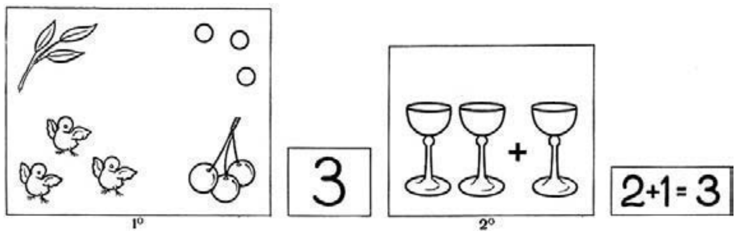
**Período de 1953 a 1971**

Los programas anteriores al año 1971 proponen, como objetivo primordial de la «*escuela de párvulos*», enseñar la recitación y la escritura de la serie de los primeros números, así como su composición y descomposición. De hecho, los contenidos matemáticos de este nivel se designaban como: «el cálculo en la escuela de párvulos».

Nombrar, escribir y leer los números. Manejo de cifras, cálculo de sumas y restas en primeras e incipientes relaciones numéricas, cálculo rápido. Composición y descomposición de los primeros números. Tratamiento monográfico de cada uno. Representaciones: reales, imaginativas, gráficas, abstractas.

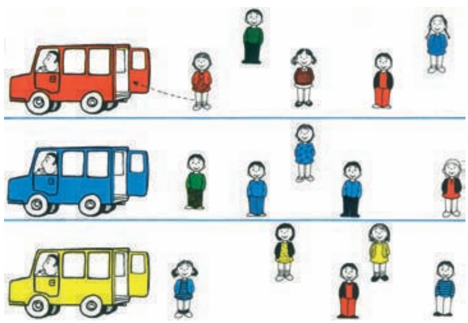
Aplicarlo a la solución de problemas reales. Solución por vía deductiva de toda relación matemática (Medina)[4].

En los textos escolares los números se presentaban uno tras otro comenzando por la unidad. Todo número se formaba a partir del anterior, por iteración de la unidad, mostrando siempre colecciones de objetos. La ostensión era el modelo de presentación empleado por excelencia:




Medina (1955): Fichas para la «adquisición del concepto de número 3».

La hipótesis implícita de aprendizaje que los autores asumían era fundamentalmente empirista: el aprendizaje se basa en la experiencia, graduando adecuadamente los pasos desde lo más simple a lo más complejo. Para aprender basta observar, reproducir y repetir.



*Relación de pertenencia. Propiedad característica de conjuntos. Ficha escolar-nivel infantil (Barcanova, 1982).*

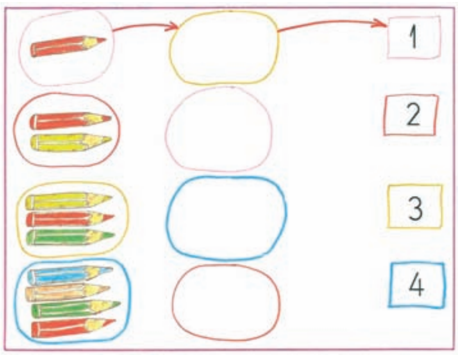
A partir del año 1971, los nuevos programas para la reforma educativa, fuertemente influenciados por

[4] Medina, A.: *Educación de Párvulos*, Labor, Barcelona, 1955, p. 251.

las teorías de Piaget y por las *matemáticas modernas*, llevan a cabo la implantación de la teoría de conjuntos en la enseñanza. Según se ha señalado en el capítulo 4 se propuso por primera vez en los programas de «Educación Preescolar» la enseñanza de conocimientos denominados «prenuméricos», es decir, conocimientos considerados como preparatorios para la construcción del número: conjuntos, correspondencias, aplicaciones, clasificaciones, seriaciones, ordenaciones, etc.

*Correspondencias:* A cada animal su comida.
*Ficha escolar-nivel infantil (S.M., 1984).*

En 1973 se aprobaron la Orientaciones Pedagógicas con las directrices oficiales para la *Educación Preescolar* en las que se proponían actividades para «clasificar y ordenar colecciones, para adquirir la idea de conjunto e introducir funcionalmente la idea de número mediante conjuntos coordinables» (BOE, 186, 1973, pp. 1490).




Conjuntos coordinables. Número natural.
Ficha escolar: nivel infantil (S.M., 1984).

Los alumnos llevarán a cabo operaciones con conjuntos[5], consideradas como preparatorias para la construcción del número. Así, las correspondencias, aplicaciones, clasificaciones, ordenaciones se designarán como saberes prenuméricos.

[5] «La noción de colección pasó del lenguaje metamatemático al lenguaje matemático, y tomando, generalmente, el nombre de "conjunto" pasó a la enseñanza desde los niveles más inferiores de la educación» (Orús, 1992, p. 168).
Orús, P.: *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effects d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*, Tesis, Université de Bordeaux I, 1992.

> El número es una propiedad de los conjuntos, por lo que es lógico que el niño se familiarice con los conjuntos antes que con los números [...]. Cada número natural es el cardinal de una familia de conjuntos, de todos los que son coordinables entre sí[6].

El sistema de enseñanza por medio de las orientaciones curriculares hacía corresponder la actividad del sujeto con las nociones matemáticas subyacentes:

| **Actividad del sujeto** | **Nociones matemáticas subyacentes** |
|---|---|
| Conjuntos. Operaciones con conjuntos. | Teoría de conjuntos. Operaciones. |
| Familias de conjuntos. | Partición. Relaciones de equivalencia. |
| Asociación entre elementos de conjuntos.<br>Seriaciones de los elementos de un conjunto. | Correspondencias, aplicaciones biyectivas entre conjuntos. |
| | Relación de orden.<br>Ordinal. |
| **Número natural** | |

Posteriores modificaciones de estos programas constituyeron los denominados *programas renovados* para la Educación Preescolar (1981), en los que, de nuevo, se promueve la concepción de número natural como *cardinal de conjuntos coordinables*.

> Es, por lo tanto, imprescindible, antes de llegar a la idea de número, que el niño realice actividades de formación de conjuntos, correspondencias entre conjuntos, clasificaciones, hasta llegar a la coordinabilidad de conjuntos [...]. Tanto las seriaciones como las clasificaciones son tipos de experiencias a realizar en el período prenumérico.

Como vemos, la organización de los saberes matemáticos en la Escuela Infantil, desde los años setenta, respondía a la teoría de Piaget[7] sobre la construcción del número: «... la serie de los números se constituye así, como síntesis operatoria de la clasificación y de la seriación».

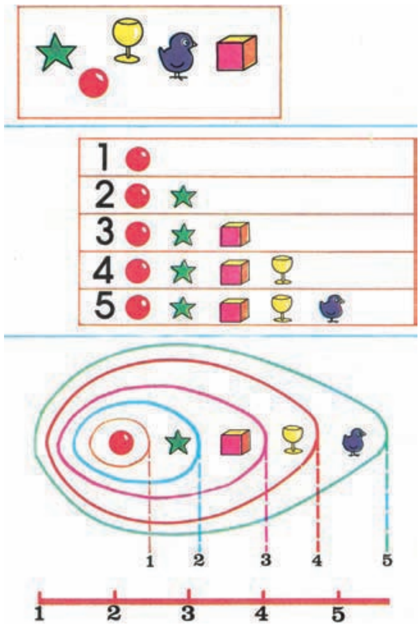
Esta afirmación de Piaget significa que la noción de número, en niños de 6-7 años, está caracterizada por un éxito en las tareas que conllevan un dominio lógico de:

- La inclusión de clases.
- Las relaciones asimétricas y, en especial, la de la transitividad.

---

[6] Programas Renovados, Ministerio de Educación y Ciencia, 1971, pp. 59-63.

[7] Piaget, J. y Szemiska, A.: *La génese du nombre ches l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Neuchatel, 1941, p. 6.




*Inclusión «jerárquica de clases» Ficha escolar-nivel infantil (S.M., 1983).*

Pero, según afirma Brissiaud[8] (2000, p. 26) «Piaget está verdaderamente equivocado, porque el dominio lógico de cada una de estas tareas se adquiere mucho más tardíamente, hacia los 10-11 años; el éxito que pueden tener los alumnos de 6-7 años en las mismas es localmente empírico[9], según se ha quedado probado en investigaciones tales como las de Markman (1978), Boston y Deliége (1975)[10]».

Los Diseños Curriculares (1992)[11] pretendieron transformar el paisaje prenumérico en la enseñanza. De hecho, no hacen referencia explícita a ningún ti-

[8] Brissiaud, R.: «Compter à l'école maternelle? Oui, mais…», *Grand N Spécial Maternelle*, vol. I, 2000, pp. 21-36.

[9] Cuando los niños juegan con cubos encajables o cuando, al recoger el material de clase, son capaces de colocar las tijeras en la caja de las tijeras, los lápices en la caja de los lápices, etc., se evidencia un caso típico de *efecto Jourdain* (ver capítulo 2).

[10] Markman, E. M.: «Empirical versus logical solution to part-whole comparaisons problems concerning classes and collections», *Child Development*, 49, 1978, pp. 168-177.

[11] En los DCB actualmente en vigor (1993), los conocimientos matemáticos de la Escuela Infantil constituyen el área de Expresión matemática y se ubican dentro del ámbito de Comunicación y representación, junto con las restantes áreas de expresión: Lingüística, Corporal, Plástica y Música.

po de conocimiento designado como prenumérico. Cabe señalar que en las fichas y materiales escolares emanados de esta reforma han desaparecido totalmente actividades como las señaladas en las figuras anteriores.

En relación con los aspectos estrictamente numéricos, estos Diseños Curriculares enfatizan especialmente la actividad de contar en el proceso de construcción del número:

> Los niños pequeños aprenden pronto a contar [...]. Este factor debe tenerse en cuenta para favorecer la construcción de la noción de cantidad y de serie numérica, así como valorar y apreciar su utilidad. También ha de tenerse en cuenta para abordar algunas operaciones sencillas que impliquen añadir, quitar, repartir, en los juegos y problemas que se presentan en la vida cotidiana.
>
> DCB, Educación Infantil, 1993, p. 60

En suma, si comparamos los períodos anteriores, observamos que, antes de 1971, los conocimientos numéricos en la Educación Infantil estaban asociados exclusivamente al ámbito del cálculo, se estudiaban los números uno tras otro por iteración sucesiva de la unidad y, con ocasión del estudio de cada número, se precisaban las reglas de escritura, las convenciones, etc. En las décadas de los años setenta y ochenta, se consideraban como saberes que habían de construirse una vez consolidados los denominados «conocimientos prenuméricos» (clasificación, orden, correspondencia, etc.). En la actualidad, se privilegia explícitamente la actividad de contar como base para la construcción de los primeros conocimientos numéricos. ¿Qué concepción del número natural promueve esta presentación? Es evidente que los manuales escolares se apoyan en un conocimiento social, como es el contar, y promueven una concepción del número natural que Freudenthal[12] (1983) denomina como *counting-number*, frente a la concepción *cardinal-number*.

Si bien las orientaciones didácticas facilitadas por los diseños curriculares insisten en el modelo de aprendizaje constructivista, los manuales escolares inducen un aprendizaje basado fundamentalmente en la ostensión, la observación, la recepción y la repetición. Modelo sustentado en un empirismo sensualista.

En este sentido, la presentación que actualmente se lleva a cabo en los textos escolares tiene mucho en común con la llevada a cabo en el primer período histórico que hemos estudiado. Ante este retorno, Brousseau[13] (1996) considera que:

> ... la insuficiencia de conocimientos didácticos ha dejado al sistema educativo en la incapacidad de generar razonablemente sus reformas [...]. En los años 70 y 80 se diversificaron las

[12] Freudenthal, H.: *Didactical Phenomenology of Mathematiocal estructures*, Reidel P. C., Dordrecht, 1983, p. 86.

[13] Brousseau, G.: «La memoire du système educatif et la memoire de l'enseignant», *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, IREM, Paris VII, 1996, p. 101-115.

situaciones de enseñanza de los números, tratando de darles un sentido más rico y más completo. El conteo acompañaba al aprendizaje, pero no era su guía y su esencia. En la actualidad, se ha visto volver, como una avalancha, el aprendizaje de los números solo por medio del conteo. Rechazo este retorno triunfal de métodos antiguos, esta contra-reforma debida a fenómenos de obsolescencia y al ritmo demasiado lento de los progresos en didáctica, ya que se ha instaurado sin un debate serio y eliminando de la cultura de los profesores conocimientos útiles y costosamente adquiridos.

**Actividad 1:** Consulte varios manuales escolares de Educación Infantil y, en relación con el número y la numeración, estudie:

- Modelo seguido en la presentación de los primeros números y de la numeración.
- Concepción del número que promueven.
- Representaciones y esquemas que se emplean.
- Ejemplos y actividades que se proponen.
- Modelo de aprendizaje en el que, implícitamente, se sustenta la enseñanza que inducen.

Es conveniente utilizar, como herramientas de análisis, los modelos de aprendizaje explicados en el capítulo 1 de este libro.

Esta breve aproximación a la *transposición didáctica* del número, de singular importancia en las Matemáticas escolares, nos ha permitido constatar que, en el análisis didáctico, no podemos considerar *transparente* el conocimiento matemático cuya enseñanza y aprendizaje queremos gestionar. Es muy necesario llevar a cabo una reflexión sobre la concepción de número natural que es necesario movilizar en el medio escolar, cuáles serán sus características o sus posibles restricciones, si los alumnos podrán construir con sentido el número, o bien solo aplicarán los conocimientos que previamente les ha facilitado el maestro.

## 6.4. Consideraciones didácticas en relación con la enseñanza y el aprendizaje del número y la numeración

Los análisis precedentes nos han mostrado que, a lo largo de los años, se han llevado a cabo propuestas didácticas diferentes para introducir en la Escuela Infantil los conocimientos numéricos. Antes de proponer otros modelos, estimamos conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones didácticas:

• El número y la numeración son objetos culturales, utilizados cotidianamente en el medio familiar y social. Es ingenuo no tener esto en cuenta en la enseñanza y hacer como si el niño no conociera absolutamente nada relacionado con el dominio numérico al llegar a la escuela. Debemos tener en cuenta los conocimientos previos de los alumnos, enriquecer sus prácticas iniciales y sus procedimientos primitivos en torno al número y a su designación.

• Para diseñar el proceso de enseñanza, no podemos servirnos únicamente de la definición matemática de número natural y de las reglas del algoritmo de «contar», tenemos necesidad de determinar un conjunto de situaciones que permita a los niños, desde la Educación Infantil, encontrar las «razones de ser» del número y la numeración. Será preciso, pues, estudiar formalmente las funciones del número y de su designación, y así construir un conjunto de situaciones donde la cardinación y la numeración jueguen una función precisa y tengan significación.

• Si bien en matemáticas número y numeración son objetos bien distintos (el número no depende del modo como lo designamos), creemos, sin embargo, que esta distinción no es suficiente para considerar las funciones específicas de cada uno de ellos en la enseñanza de modo aislado. No podemos pensar que el número pueda aprenderse en los primeros niveles escolares independientemente de la numeración.

Estudios de epistemología y de Didáctica de las Matemáticas como los de El Bouazzaoui[14] (1985) o Quevedo[15] (1986), dirigidos por Brousseau, ponen de manifiesto, cómo las nociones de número y numeración están íntimamente ligadas. Las relaciones entre números y numeración son dialécticas. La numeración nos permite hablar de los números y representarlos, en consecuencia, debe hacerlo de una forma cómoda, eficaz y económica. Su función es designar (enunciar y escribir) los números y modelizar las propiedades de los números.

Así pues, no consideramos adecuado hablar *a priori* de funciones de la numeración y del número de forma independiente. Por ello, consideramos necesario crear situaciones que permitan describir el funcionamiento adecuado e idóneo del número junto con su designación.

• Las situaciones que pueden dar significación al número y la numeración serán aquellas que den respuesta a la pregunta: *¿Para qué tenemos necesidad del número y de su designación?*

[14] El Bouazzaoui, H.: *Étude de situations scolaires des premiers enseignements des nombres et de la numeration*, tesis, Université de Bordeaux, 1985.

[15] Quevedo de Villegas, B.: *Les situations et le processus dans l'apprentissage des nombres*. D.E.A., Université de Bordeaux, 1986.

## 6.5. ¿Para qué tenemos necesidad del número y de su designación?

Desde la Escuela Infantil, consideraremos fundamental proponer a los alumnos situaciones que les permitan construir con sentido las funciones[16] del número y de la numeración.

La funciones esenciales del **número** en este nivel educativo son:

– Medir una colección: asignar un número natural a una colección.

– Producir una colección: operación inversa a la anterior.

– Ordenar una colección: asignar y localizar la posición de los elementos de una colección.

Las nociones de número y de numeración, como hemos afirmado anteriormente, están íntimamente ligadas. La numeración, acción de enunciar y de escribir los signos con los que denotamos los números, mantiene una relación dialéctica con el número: sirve para expresar y dar sentido a los números y, además, es un medio para modelizar las propiedades de los números. Trabajar con el número implica la necesidad de recurrir a su representación oral o escrita.

Los niños, antes de ingresar en la escuela, han mantenido múltiples relaciones con la numeración[17], ya que esta existe tanto dentro como fuera de la escuela. Producto cultural, objeto social de uso cotidiano, los códigos de nuestro sistema de numeración se ofrecen a la exploración infantil desde las páginas de los libros, las camisetas de los futbolistas, las listas de precios, los calendarios, las cintas métricas, las direcciones de las casas, los teléfonos, etc. En esta etapa, cuando los niños se relacionan con las primeras estructuras numéricas, la escritura del número se asocia al número mismo, de tal manera que con frecuencia se confunden una con otro.

La **numeración** constituye un medio que permite:

**a.** Expresar la *medida* de una colección:

● ● ● ● ● ⟶ 5 galletas

Con este medio de expresión, los niños podrán resolver problemas en los cuales sea necesario:

[16] Nos hemos apoyado en los trabajos de El Bouazzaoui y Quevedo de Villegas antes mencionados.

[17] Para ampliar conocimientos didácticos relativos a la numeración, recomendamos leer los apartados 8 y 9 de Ruiz Higueras, L.: La construcción del número y de la numeración, en Chamorro, C. (ed.): *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson, Madrid, 2003, pp. 95-131. Chamorro, C.: *A la búsqueda de la numeración. De la filogénesis a la ontogénesis: aspectos didácticos e históricos*, en Chamorro, C. (coord.): *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*, MEC, Madrid , 2004, pp. 95-123.

- *Verificar la conservación de una colección:* dada una única colección en dos momentos diferentes o en dos posiciones diferentes, determinar si se trata de la misma colección.
- *Administrar una colección:* a partir de una determinada colección podemos dar cuenta de los cambios que ha sufrido en el transcurso de un cierto tiempo. Se trata de *relatarlos* adecuadamente. Algo parecido al pastor de un rebaño de ovejas que debe saber cuántas ovejas le han sido confiadas, cuántas han muerto, cuántas han nacido, etc., mientras han estado a su cargo.
- *Recordar una cantidad:* recordar en un instante $t_2$ una cantidad que conocíamos o bien una cantidad de la que disponíamos en un instante $t_1$ ($t_1 < t_2$).
- *Recordar una posición:* permite evocar el lugar de un objeto en una sucesión ordenada.
- *Reproducir una cantidad:* construir una colección coordinable a una colección dada, en presencia de esta última.
- *Comparar dos colecciones* A y B desde el punto de vista de la cantidad de objetos que tiene cada una.
- *Repartir una cantidad:* llevar a cabo la *división o reparto* de una colección en colecciones equipotentes (o no).
- *Anticipar los resultados de una operación:* se trata de *anticipar*[18] la acción concreta, es decir de construir una solución que nos pueda dispensar incluso de la manipulación de los objetos reales, bien sea porque los objetos no están disponibles, bien porque son demasiado numerosos y sería costosísima su manipulación. La designación del número nos permite también tener la posibilidad de *anticipar* resultados en el caso de situaciones no presentes o incluso no realizadas (es decir, simplemente evocadas), pero de las que disponemos de ciertas informaciones.

**b.** *Producir* una colección: la designación del número nos permite producir una colección cuyo cardinal conocemos. Sería la operación inversa de *medir* una colección. Conviene distinguir la *reproducción* de una colección de su producción. La primera se hace en referencia a una colección que sería, de algún modo, el modelo a copiar. La segunda se hace conociendo la medida de una colección: «*Dame 5 galletas*».

**c.** O*rdenar* una colección: la designación los objetos de una colección por medio de los ordinales (primero, segundo, tercero, etc.) nos permite controlar el orden de la misma y determinar con precisión el lugar ocupado por cualquier objeto.

Basándonos en las funciones anteriores, señalaremos, para el nivel de Educación Infantil, algunos grandes tipos de problemas que permiten dar sentido a los procedimientos numéricos y a las designaciones orales o escritas de los números utilizados. En relación con estos tipos de problemas podremos construir diferentes situaciones didácticas para proponerlas a los alumnos.

[18] El sentido del término *anticipación* ha sido explicado ampliamente en el capítulo 1 de este libro.

### 6.5.1. Problemas de referencia para la construcción de situaciones de enseñanza

La presentación y clasificación de estos problemas no pretende adaptarse a los modelos de estructuras aditivas o multiplicativas, se trata más bien de facilitar una descripción de algunas situaciones escolares fundamentales para la iniciación a la construcción del número y su designación.

– Problemas que permiten:
  - Verificar la conservación de una colección.
  - Recordar una cantidad.
  - Administrar una colección.

– Problemas que ponen en juego dos colecciones[19]:
  - Construir una colección equipotente a otra.
  - Comparar dos colecciones.
  - Completar una colección para que tenga tantos elementos como otra.
  - Combinar dos colecciones.

– Problemas de referencias ordinales: para *situarse* en relación con otros niños, en relación con objetos o situaciones, para tener referencias en cuanto a su posición o a la posición de los objetos en una serie, etc.

– Problemas de *división o reparto* de una colección en colecciones equipotentes (o no), conociendo bien el número de partes a realizar (caso de una distribución, por ejemplo), o bien el valor de una parte (hacer paquetes, por ejemplo), teniendo en cuenta que se trata de controlar o de *anticipar* el resultado del reparto.

– Problemas en los que es necesario llevar a cabo *transacciones* entre objetos de valor diferente (por ejemplo, para obtener una carta roja es necesario dar tres cartas verdes, y para obtener una carta verde es necesario dar tres azules, etc., o bien cambios entre monedas, o situaciones de compra/venta, etc.), en particular cuando deben *anticipar* o controlar los resultados finales de estas situaciones.

Estas situaciones, si se plantean no únicamente como situaciones de acción, sino como situaciones de formulación y comunicación[20], permiten construir con sentido la necesidad no solo del número sino de su designación, es decir, de la numeración, tanto oral como escrita.

[19] En un principio comenzaremos por dos colecciones, ampliando sucesivamente a más colecciones.

[20] Las situaciones didácticas de acción, formulación/comunicación están explicadas en el capítulo 2 de este libro.

**Variables didácticas:** son variables de la situación que, gestionadas por el maestro/a, provocan cambios cualitativos en los procedimientos del alumno, es decir, modificaciones en su aprendizaje. Si actuamos sobre ellas podremos provocar adaptaciones y nuevos aprendizajes.

En el caso del *número* y la *numeración* es posible variar en las distintas situaciones:

– El campo numérico (tamaño de la colección, tamaño de los números, etc.).

– Los objetos de las colecciones (manipulables, fijos, representados, listados, etc.).

– La ubicación de las colecciones: próximas y visibles para el niño, o bien, ausentes, evocadas.

– La disposición espacial de los objetos (alineados, agrupados, encasillados, en desorden...).

– El tamaño del espacio en donde se desarrolle la situación: microespacio, mesoespacio, macroespacio (no comporta la misma actividad contar los árboles de un jardín que las canicas que hay en una cestita).

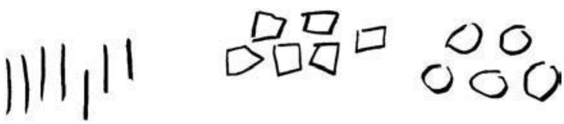
– Las reglas y consignas utilizadas por el maestro/a.

## 6.6. Procedimientos que pueden emplear los niños para resolver los problemas

Debemos reconocer los *procedimientos* que el niño puede poner en acción para resolver los problemas anteriores, ya que todo procedimiento siempre es el indicador de la existencia de conocimientos matemáticos. Dado que existen numerosos procedimientos, y de diversa categoría, desde los más costosos hasta los más óptimos y económicos, interesa poder identificarlos *a priori* y así determinar los conocimientos matemáticos que ponen en funcionamiento los alumnos cuando los emplean.

Podemos señalar, entre otros, los siguientes:

**a. Correspondencia término a término:** permite a los niños construir una colección equipotente a una colección dada (en presencia de ella), comparar dos colecciones presentes, efectuar distribuciones o repartos. Pueden también utilizar este procedimiento en situaciones de comunicación: dibujando la colección, haciendo palotes, señales, evocando la cantidad sobre sus dedos, etc. Las designaciones gráficas que emplean son analógicas:



Estas designaciones se pueden considerar como «numeraciones» primitivas, ya que permiten representar una colección de elementos a través de una codificación muy rudimentaria.

**b. Correspondencia «subconjunto» a «subconjunto»:** se emplea por algunos niños en las mismas tareas anteriores, cuando el tamaño de las colecciones aumenta (en lugar de establecer correspondencias uno a uno, toma varios elementos de la colección a la vez).

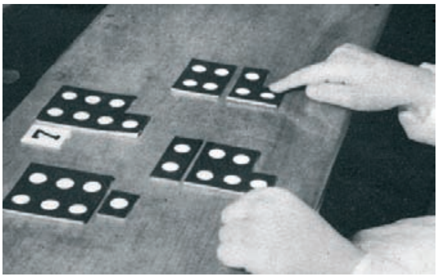
Estos dos procedimientos los suelen utilizar los alumnos como:

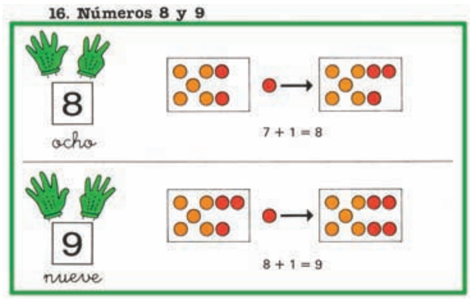
– Procedimientos iniciales, o de partida, que permiten comenzar a resolver un problema. Por ejemplo, cuando se le pide a un niño que construya una colección equipotente a una dada, él podrá, al principio, proceder a través de una correspondencia término a término.

– Procedimientos de control que permiten a los niños verificar si ha realizado correctamente una determinada tarea pedida.

**c. Estimación puramente visual:** se emplea por algunos niños en el caso de una configuración particular de objetos que pueda compararse con otra colección presente, o bien evocada mentalmente. Este procedimiento suele ser muy poco fiable en relación con los anteriores.

**d. «Subitizar»:** capacidad de enunciar muy rápidamente el número de objetos de una colección, por simple percepción global (sin necesidad de contar sus elementos). Se trata del reconocimiento inmediato del número de elementos, en el caso de pequeñas colecciones, subitizar (conteo súbito, *subitizing* en inglés, *subitus* en latín).






*Los dominós, los dedos de las manos y otras constelaciones permiten a los niños subitizar en pequeñas colecciones, facilitando la composición y descomposición de los primeros números.*

**e. Contar los elementos de una colección:** para llevar a cabo el algoritmo de contar es necesario:

**$c_1$:** Distinguir dos elementos diferentes de la colección, bien por un carácter distintivo o por su posición.

$c_2$: Reconocer la pertenencia o no de todos los elementos a la colección que se quiere contar, es decir, su propiedad característica.

$c_3$: Elegir un primer elemento.

$c_4$: Enunciar la palabra-número (o bien el sucesor del precedente en la serie numérica).

$c_5$: Poder conservar la memoria de esa elección.

$c_6$: Poder determinar el subconjunto de elementos no elegidos, o distinguir un elemento elegido de otro no elegido (no designar dos veces el mismo elemento).

$c_7$: Determinar para cada elemento elegido un sucesor en el conjunto de elementos no elegidos.

$c_8$: Saber que se ha elegido el último elemento.

$c_9$: Enunciar el siguiente nombre-número de la serie numérica.

$c_{10}$: Saber cuándo se ha terminado la tarea.

En consecuencia, el procedimiento de contar implica:

– Saber *enumerar*[21] los elementos de una colección.

– El conocimiento de la serie de los números (secuencia numérica).

– Asignar correctamente a cada objeto de la colección el nombre de un término de la secuencia numérica (correspondencia biunívoca).

Para *cardinar* una colección por medio del conteo, además de las acciones anteriores, es preciso asignar al último elemento contado una doble significación, por un lado, distingue al último objeto y, por otro, representa la cantidad de todos los objetos de la colección («el cinco», «los cinco»).

El contar permite comparar las colecciones de objetos sin establecer correspondencia directa entre ellos: la secuencia numérica sirve de intermediaria. El conteo junto con el *principio de cardinalidad*[22] constituyen la primera actividad de medición, son el fundamento y el origen sobre los que se apoya la noción de número[23].

---

[21] La actividad de enumerar los objetos de una colección está descrita en el capítulo 4 de este libro.

[22] Los principios para la cardinación de colecciones se han estudiado en el capítulo 5 de este libro.

[23] Lebesgue afirma que los números dan cuenta de una operación de medida que los produce: «A partir de constataciones llevadas a cabo en poblaciones primitivas se confirma la hipótesis de que los hombres han llegado a contar cuando querían comparar dos colecciones; es decir, comparar dos colecciones con una misma colección tipo, la colección de palabras que constituían una cierta secuencia». Lebesgue: *La mesure des grandeurs*, Blanchard, París, 1975, p. 3.

**Actividad 2:** Una vez estudiadas las actividades de «contar» y «enumerar» una colección de elementos, determine la diferencia entre ambas.

**f. Recontar:** cuando se adjunta a una colección otra, los niños pueden proceder para la determinación del cardinal de la colección final, contando todos los elementos, es decir, volviendo al principio (por ejemplo: «cinco y tres: una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho»).

**g. Descontar:** procedimiento inverso del anterior, el niño cuenta hacia atrás a partir de un número dado.

**h. Sobrecontar:** cuando se adjunta a una colección otra (o a un número otro número), la estrategia del «sobreconteo» supone conocer y saber enunciar la serie de los números a partir de uno dado (por ejemplo: «nueve más tres: diez, once, doce»).

**i. Procedimientos mixtos:** establecer correspondencias por paquetes o bloques de elementos, constitución de dichos paquetes y utilización de expresiones, bien orales, o escritas de tipo aditivo (por ejemplo, dada una colección de 19 elementos, los niños podrían decir que hay 5 y 3 y 5 y 4 y 2).

**j. Procedimientos de «cálculo»:** pueden utilizar algunos conocimientos numéricos, bien memorizados, o bien algunas técnicas de cálculo, descomposiciones, transformaciones, etc., donde ponen en funcionamiento propiedades de los números naturales y de la numeración.

Por ejemplo:

$5 + 7 = (5 + 5) + 2 = 10 + 2 = 12$ ;

$8 + 6 = 8 + (2 + 4) = (8 + 2) + 4 = 10 + 4 = 14$ ;

$13 + 9 = 13 + (10 - 1) = (13 + 10) - 1 = = 23 - 1 = 22$

La resolución de problemas permitirá a los niños pasar de los procedimientos más costosos y menos fiables a los más económicos y pertinentes, desarrollando ampliamente la actividad de cardinación de colecciones.

**Actividad 3:** En las siguientes situaciones, diseñadas para que los niños de Educación Infantil lleven a cabo la actividad de enumeración de una colección, determine las variables didácticas que puede gestionar el maestro/a, los procedimientos posibles que pueden poner en funcionamiento los niños para resolverlas y las diferencias entre estas situaciones y una situación de conteo.

**Enumeración de colecciones: «Juego de las huchas»**
Disponemos de una colección de vasos de plástico opacos en los que hemos hecho una ranura en la base. Los colocamos boca abajo y pedimos a los niños que tomen botones de una cestita e introduzcan un botón y solo uno, en todos y cada uno de los vasos.

**Enumeración de colecciones: «Juego de las cajitas de cerillas»**
Disponemos de una colección de cajas de cerillas en las que hemos hecho una ranura en un lateral. Pedimos a los niños que tomen cerillas de una cestita e introduzcan una y solo una, en todas y cada una de las cajas.

Observación: El hecho de que los vasos y las cajas sean opacos impide el control visual continuo en el desarrollo de la actividad de enumeración, es decir, no podemos conocer con una sola mirada, en el transcurso de la actividad, lo que hemos realizado y lo que nos queda por realizar.

**Actividad 4:**

A partir de las dos situaciones anteriores (juego de las huchas y juego de las cajitas de cerillas), suponga que la maestra exige a los niños/as, en su resolución, no mover los vasos (o las cajitas de cerillas) del lugar que ocupan sobre la mesa.

¿Qué razones matemáticas justifican esta exigencia de la maestra?

¿Qué conocimiento matemático permite construir a los niños/as esta situación (con la restricción añadida)?

¿Qué posibles estrategias pueden poner los niños/as en funcionamiento para resolver la situación?

**Actividad 5:**

Teniendo en cuenta los procedimientos que los niños pueden poner en funcionamiento para la cardinación de una colección, podemos formularnos las siguientes cuestiones:

¿Puede un niño llevar a cabo la cardinación de una colección sin saber contar?

¿El saber contar asegura el dominio de la cardinación de cualquier colección?

¿Podría un niño, que conoce la secuencia numérica hasta **n,** *no dominar* la cardinación de una colección de **p** objetos, siendo $\mathbf{p} < \mathbf{n}$?

¿Podría un niño, que sabe contar hasta **n,** *determinar* el cardinal de una colección de **p** objetos, siendo $\mathbf{p} > \mathbf{n}$?

## 6.7. Situación fundamental para la cardinación de una colección mediante la actividad de contar

El conocimiento de los primeros números naturales se manifiesta por el conteo. En la vida diaria, todo el mundo sabe lo que es contar: se trata de una actividad totalmente naturalizada, que conocemos y dominamos sin ninguna dificultad. Socialmente, el contar es algo que se hace, no es algo que se explica. En el apartado anterior hemos descrito la actividad de contar, ahora vamos a determinar un modelo de situación-problema que nos permita reproducir las actividades de contar y cardinar en la escuela.

Construir una *situación fundamental*,[24] para que a través de la actividad de contar determinemos el cardinal de una colección, supone definir una clase de situaciones con un cierto número de variables didácticas que, al tomar distintos valores, permita generar un conjunto de problemas característicos del contar. Serán problemas en los que contar constituya su solución óptima y que debe resolver alguien que no posee este conocimiento: que no sabe contar.

Esta *situación fundamental* se puede modelizar con el siguiente juego: dada una cierta cantidad de objetos (por ejemplo, botes de pintura), pedimos a un niño que vaya a otro lugar, desde el que no ve los objetos anteriores, a buscar otro tipo de objetos (por ejemplo, pinceles) y que, en un solo viaje, traiga aquellos que necesite para poner un solo pincel en cada bote sin que sobre ni falte ninguno. «Diremos que alguien sabe contar –en el sentido de la teoría de situaciones– cuando es capaz de realizar correctamente esta tarea y, aún más, cuando es ca-

[24] La noción de *situación fundamental* se ha estudiado en el capítulo 2 de este libro.

paz de pedirle a alguien la cantidad exacta de pinceles que necesita y controlar si ha llevado a cabo estas acciones correctamente» (Brousseau, 1995, p. 12)[25].

Esta *situación fundamental* describe una actividad humana concreta, no un método de enseñanza. Está claro que, en cuanto modelo de actividad, también puede ser utilizado en la enseñanza. Pero su función principal es dar cuenta de las distintas actuaciones que designamos culturalmente como acciones de contar, y de las condiciones que se requieren para realizar dichas actuaciones. Por ejemplo, cuando alguien recita la serie numérica «uno, dos, tres...», no está resolviendo el problema de la situación fundamental, solo está realizando uno de los «pasos» posibles. Si además de recitar señala con el dedo cada uno de los botes de pintura, estará más cerca de las estrategia ganadora. Si también sabe detenerse en el último número enunciado se habrá acercado aún más, etc.

Para generar los distintos tipos de problemas que designamos habitualmente como «problemas de contar», basta con modificar el valor de las variables de la situación: podemos considerar, por ejemplo, que hay un número muy reducido de botes (4 o 5) o, al contrario, un número muy alto (alrededor de 25 000); podemos suponer que los pinceles están al lado de los botes o muy alejados; que no tenemos acceso a ellos, sino que se venden por paquetes de 50; que en lugar de botes y pinceles se trata de pollitos (en continuo movimiento) y anillas (para colocárselas), que la colección está formada por objetos muy distintos o tan iguales como los lados de un dodecaedro regular; que la colección se ubica en un macroespacio: los árboles de un bosque, o por el contrario, en un microespacio: glóbulos rojos, plaquetas, etc.

**Situación fundamental que permite movilizar el número natural-cardinal**

Una persona debe ir a buscar, en una sola vez, una colección $C_2$ equipotente a una colección de referencia $C_1$. Las colecciones $C_1$ y $C_2$ están visibles y disponibles simultáneamente en el momento de la validación, pero no en el momento de la construcción. Es decir, mientras la persona construye $C_2$ no puede ver $C_1$.

## 6.7.1. Tipos de situaciones

Tomando como base la *situación fundamental* definida anteriormente, el profesor/a de la Escuela Infantil puede diseñar toda una serie de situaciones a-didácticas mediante una gestión adecuada de sus variables didácticas, apoyándose en un modelo de aprendizaje constructivista por *adaptación al medio*[26]. A continuación se proponen varios tipos:

- **Situaciones de autocomunicación.** El propio niño/a dispone de la colección de referencia $C_1$ y va a buscar en una sola vez una colección equipotente $C_2$.

[25] Brousseau, G.: «Didactique des sciences et formation des professeurs», en Comiti, C. (Ed.): *Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants*, IUFM de Grenoble, Grenoble, 1995.

[26] Este modelo de aprendizaje se ha estudiado en el capítulo 1 de este libro.

• **Situaciones de comunicación oral.** El profesor dispone de una colección de referencia $C_1$ y *pide oralmente* a un niño $A_1$ que vaya a buscar justo los objetos necesarios de otra colección $C_2$ para construir una colección equipotente a $C_1$ («Quiero que me traigas *en un solo viaje* las canicas necesarias para que en cada uno de los vasos de esta bandeja haya una»).

La comunicación también se puede llevar a cabo entre dos niños ($A_1$ y $A_2$).

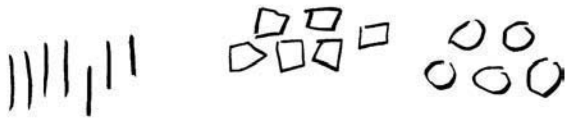
El recurso al «conteo» se considera como el procedimiento óptimo para que el niño resuelva este problema. Como, normalmente, no surge de modo espontáneo en los niños, supone un aprendizaje muy importante en este nivel educativo.

• **Situaciones de comunicación escrita.** Un niño $A_1$ dispone de una colección de referencia $C_1$ y *pide por escrito* a otro niño $A_2$ que vaya a buscar justo los objetos necesarios de otra colección $C_2$ para construir una colección que tenga tantos elemento como $C_1$.

La resolución de este problema necesita:

**a.** Que $A_1$ formule un mensaje en el que pueden figurar:

– Marcas tales como:



que muestran la puesta en funcionamiento de la propiedad de invariancia de la cantidad: la equipotencia entre dos colecciones no depende de la naturaleza de los objetos (principio de abstracción[27]).

– Escritura del dígito que represente el cardinal de la colección $C_1$: por ejemplo: 7.

– Escritura sucesiva de los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

– Otras (como se puede comprobar en la actividad 10).

**Ejemplo 2:**

**Situación didáctica para la actividad de contar: el número como memoria de la cantidad**

**Objetivos:**

– Utilizar el número para medir una cantidad y producir una cantidad.
– Utilizar los números como instrumentos eficaces para *memorizar* una cantidad.
– Construir diferentes procedimientos de «cardinación» de colecciones.
– Construir la actividad de contar como el procedimiento más eficaz y económico para la cardinación de colecciones.
– Construir «mensajes» para designar los números en una actividad de comunicación.

*Continúa*

[27] Este principio se ha estudiado en el capítulo 2 de este libro.

*Continuación*

**Situación: El juego del autobús**[28]

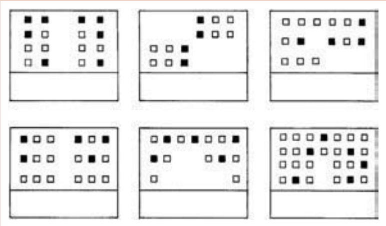
**Material:**

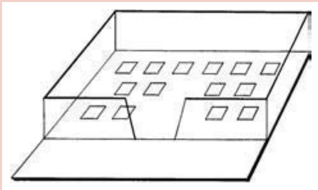
– Un soporte formado por dos partes, una parte libre sobre la que se pondrán, en un primer momento, los «pasajeros» y otra parte sobre la que están dibujadas las plazas del autobús (con asientos libres y ocupados).

– Pequeños muñecos o fichas (serán los pasajeros del autobús).

– Hojas recambiables que representan la distribución de las plazas del autobús.

En esta actividad es necesario que, en la clase, el lugar donde se encuentran los «pasajeros» esté suficientemente alejado del lugar de los «autobuses», para que, en el momento en el que los niños estén tomando los «pasajeros» no puedan ver las plazas del autobús.





**Consignas:**

*1.ª fase:* Debéis ir a buscar justo los pasajeros necesarios, solo los necesarios, ni más ni menos, para completar las plazas libres del autobús.

*2.ª fase:* Debéis ir a buscar, en una sola vez, justo los pasajeros necesarios, solo los necesarios, ni más ni menos, para completar las plazas libres del autobús.

*3.ª fase:* Debéis pedirme por escrito, en un mensaje, los pasajeros que necesita vuestro autobús.

**Variables didácticas:**

– Número de cuadrados (plazas del autobús), elegido en función de las competencias que tengan los niños.

– Disposición espacial de los cuadrados.

– Número de viajes que pueden dar los niños para tomar los pasajeros.

– Exigencia o no de escribir un mensaje para pedir los pasajeros (tipo de comunicación).

**Procedimientos posibles de los alumnos:**

– Correspondencia uno a uno (en uno o en varios «viajes» al lugar donde se encuentran los pasajeros).

– Correspondencia subconjunto a subconjunto.

– Emplear los dedos de las manos como colección equipotente a la dada.

– Determinar un número a partir de:
  - La estimación visual y global de la colección.
  - La subitización.
  - Contar los elementos de la colección.
  - Contar subcolecciones y emplear varios números: «Dame 2 y 3 y 4».

– Dibujos de palotes o signos gráficos que representen analógicamente los asientos del autobús.

– Expresiones escritas de los numerales de la colección.

– Otros.

[28] Adaptación de la situación propuesta en Ermel: *Aprentissages numeriques*, Hatier, París, 1990, p. 90.

### Ejemplo 3: Iniciación a las escrituras aditivas de los números

**Situación: «La marioneta» (nivel 4 o 5 años)**

Se trata de una situación de comunicación entre un alumno/a y una marioneta manipulada por el maestro/a. Normalmente los profesores la llevan a cabo con un grupo de 5 a 8 alumnos, aunque la tarea la deba realizar cada niño individualmente.

**Consigna:** Dada una cantidad n > 9 de platos, los niños deben formular un mensaje escrito para pedir a una marioneta que les dé los vasos necesarios para tener tantos como platos.

Los platos están distribuidos de forma arbitraria sobre una mesa de la clase.

La marioneta no puede hablar, y solo sabe interpretar mensajes escritos con cifras del 1 al 9. Dispone de una gran pila de vasos para poder dar a los niños los que le pidan en sus mensajes.

**Objetivos:**

– Conducir a los alumnos a producir una escritura aditiva para designar el número de elementos de una colección bastante más numerosa que las que normalmente manejan.

– Conseguir que los niños pasen de una percepción de las colecciones unidad por unidad a una percepción por agrupamientos.

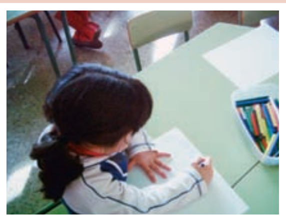
**Validación de los procedimientos empleados por los alumnos:**

Esta situación es autovalidante, es decir, los propios niños pueden determinar por sí mismos si su mensaje ha sido correcto. Basta con comprobar si son equipotentes entre sí la colección de platos y la colección de vasos que les ha dado la marioneta.

**Actividad 6:**

**Situación: «La marioneta» (nivel 5 años)**

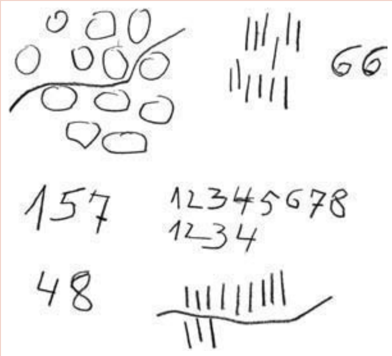
**Consigna de la profesora:** La marioneta solo sabe leer mensajes con las cifras: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Debéis escribir un mensaje para pedir a la marioneta «tantos vasos como platos hay sobre esta mesa de la clase» (n = 12 platos).



*Continúa*

*Continuación*

Los alumnos elaboraron los siguientes mensajes:




**Tareas de análisis didáctico:**

a) Observa detenidamente las diferentes producciones de los niños y determine:

– Las representaciones y códigos empleados para designar el cardinal de la colección.

– La pertinencia y el costo de cada una de ellas.

– Las diferencias, desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos que ponen en funcionamiento, entre las formulaciones empleadas por los niños en la resolución.

– La institucionalización que debe llevar a cabo la maestra para que los alumnos no confundan «157» con «1 más 5 más 7».

b) Suponga que modificamos la situación anterior:

– Dada una colección de 15 platos, debemos pedir por escrito a la marioneta los vasos necesarios para tener tantos como platos.

– «La marioneta solo sabe leer las cifras: 1, 2, 3, 4, 5, 6».

¿Qué tipo de mensajes tendrían que formular los niños para que la marioneta les diese los vasos?

¿Qué conocimientos matemáticos necesitan movilizar para resolver correctamente esta situación?

c) Determine las variables didácticas de la situación «La marioneta».

Establezca una correspondencia entre las variables didácticas y las estrategias de resolución que deben poner en funcionamiento los niños/as.

Justifique la razón de los cambios de variable en relación con los aprendizajes que provoca este cambio en los alumnos.

**Ejemplo 4: Situación didáctica que permite movilizar el número como *memoria* de la cantidad y *memoria* de la posición (nivel 4 años)**

**Objetivos:**

– Utilizar el número para medir una cantidad y producir una cantidad.

– Utilizar los números como instrumentos eficaces que permiten *memorizar*:

- Una cantidad.
- La posición de objetos en una cuadrícula.

*Continúa*

*Continuación*

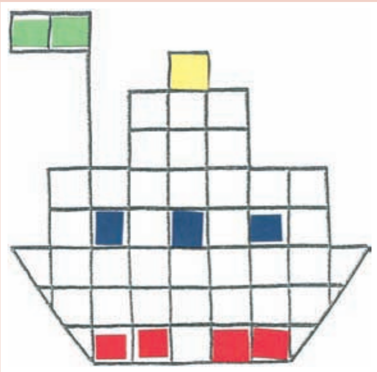
– Construir diferentes procedimientos de «cardinación» de colecciones.

– Construir la actividad de contar como el procedimiento más eficaz y económico para la cardinación de colecciones.

– Construir «mensajes» para designar los números en una actividad de comunicación.

– Construir estrategias que permitan determinar la posición de objetos utilizando el carácter ordinal del número.

**Situación: Juego de «El barquito»**



**Material:**

– Un cartel con un barquito, según el modelo adjunto (los cuadraditos se han rellenado con pegatinas de diferentes colores).

– Una ficha con un barquito, cuya cuadrícula estará totalmente en blanco, para cada alumno.

– Cajas que contienen pegatinas de colores.

El cartel del barquito se ubica sobre una mesa en un extremo de la clase. Los niños necesariamente deben desplazarse para verlo y poder construir sus estrategias de solución, pero una vez que están en su mesa, no pueden ver el cartel.

El lugar donde se encuentran las pegatinas debe estar suficientemente alejado del lugar donde está el cartel de «El barquito», para que, en el momento en el que los niños estén comprando las pegatinas no puedan ver la configuración del barquito.

**Consignas:**

*1.ª fase:* Debéis ir a buscar las pegatinas necesarias, solo las necesarias, ni más ni menos, para completar vuestro barquito. Debe quedar como el del cartel.

*2.ª fase:* Debéis ir a buscar, en una sola vez, justo las pegatinas necesarias, solo las necesarias, ni más ni menos, para completar vuestro barquito.

*3.ª fase:* Debéis pedirme por escrito, en un mensaje, las pegatinas que necesitáis para vuestro barquito.

**Variables didácticas:**

– Número de cuadrados rellenos, elegido en función de las competencias que tengan los niños.

– Disposición espacial de los cuadrados.

– Número de viajes que pueden hacer los niños para tomar las pegatinas.

– Exigencia o no de escribir un mensaje para pedir las pegatinas.

**Procedimientos posibles de los alumnos:**

– Correspondencia uno a uno (en uno o en varios «viajes» al lugar donde se encuentran las pegatinas).

– Correspondencia subconjunto a subconjunto.

*Continúa*

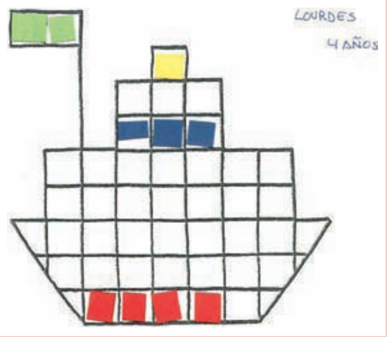
*Continuación*

- Emplear los dedos de las manos como colección equipotente a la dada.
- Determinar un número a partir de:
  - La estimación visual y global de la colección.
  - La subitización.
  - Contar los elementos de la colección.
  - Contar subcolecciones y emplear varios números: «Dame 2 y 3 y 4».
- Dibujos de palotes o signos gráficos que representen analógicamente las pegatinas.
- Expresiones escritas de los numerales de la colección.
- Otros.

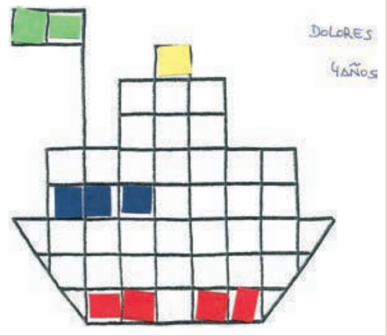
**Actividad 7: Análisis didáctico de producciones de los niños en la resolución de la situación «El barquito» (nivel 4 años)**

Veamos los «mensajes» que han formulado varios alumnos para comprar las pegatinas necesarias para decorar su barquito y los barquitos que han construido.

**A. Lourdes:**

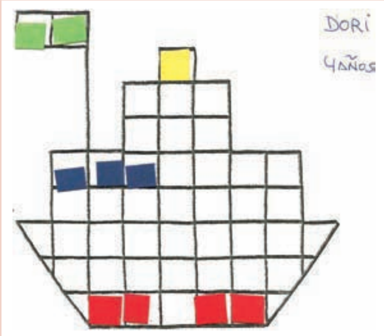

**B. Dolores:**



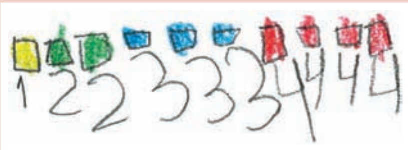

*Continúa*

*Continuación*

**C. Dori:**




**D. Antonio:**




**E. David:**

Los niños/as presentan a la maestra y a otro niño un mensaje escrito donde indican las pegatinas necesarias para rellenar el barquito.

**Se pide:**

– Hipótesis de aprendizaje que se asumen en esta situación de enseñanza.

– Conocimientos que deben movilizar los niños en su resolución.

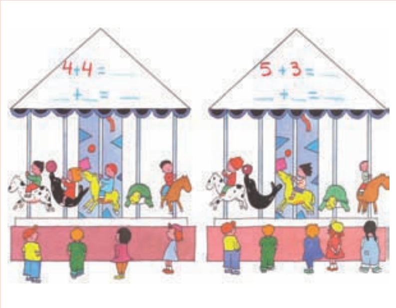
– Análisis didáctico de los mensajes que han formulado los niños por escrito.

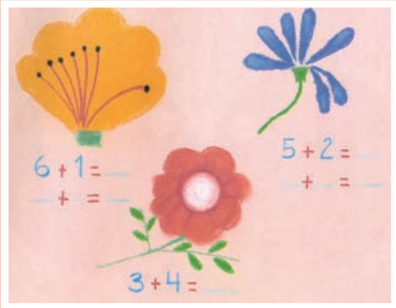
– Fases de acción, formulación-comunicación, validación.

– Sabiendo que el número y su designación (la numeración) tienen funciones de: «memoria de la cantidad», que permite evocar una cantidad sin que esté presente (aspecto cardinal), y de «memoria de la posición», que permite evocar la posición de un objeto en una sucesión ordenada (aspecto ordinal), analice los «barquitos» producidos por los niños. ¿Qué respuesta pueden obtener los niños/as del «medio»?

**Actividad 8:**

Dadas las siguientes fichas de trabajo de Educación Infantil.




**Se pide:**

– Determinar los conocimientos matemáticos que deben movilizar los niños para resolverlas.

– ¿Pueden validar los niños de forma autónoma sus respuestas?

– Analizar las diferencias entre estas tareas escolares y la situación de «La marioneta».

– Tras estudiar en el capítulo 1 de este libro las características del modelo empirista de aprendizaje y del modelo constructivita «por adaptación al medio», explicar razonadamente las hipótesis de aprendizaje sobre las que se sustentan:

- Las tareas que figuran en estas dos fichas escolares.
- La situación de «La marioneta».

**b.** Que $A_2$ sepa interpretar el mensaje que ha escrito $A_1$ y sea capaz de producir una colección, tomando los elementos necesarios de $C_2$ a partir de una escritura codificada.

## 6.8. Situación fundamental que permite ordenar los objetos de una colección, haciendo intervenir el «número natural en su concepción ordinal»

En el apartado anterior hemos presentado la situación fundamental que permite construir el número natural en su aspecto cardinal. Ahora, describiremos un modelo de situación-problema que nos permita movilizarlo en su aspecto ordinal.

Al igual que en el caso anterior, socialmente, ordenar es algo que se hace, no es algo que necesariamente se explica. Construir una *situación fundamental*,[29] para que a través de la actividad de ordenar se pueda determinar con toda precisión el lugar, la posición que ocupa un objeto en una serie, supone definir una clase de situaciones con un cierto número de variables didácticas que, al tomar distintos valores, permita generar un conjunto de problemas característicos de la actividad de asignación de ordinales a los objetos de una colección. Serán problemas en los que el número en su aspecto ordinal constituya su solución óptima y que debe resolver alguien que no posee este conocimiento: que no sabe utilizar los números ordinales.

**Situación fundamental que permite movilizar el número natural-ordinal**

Dada una colección de objetos, entre los que se ha establecido una relación de orden, designada como serie de referencia $S_1$, elegimos un objeto de la misma. Una persona debe determinar con toda precisión la posición de un objeto que ocupe la misma posición en otra serie $S_2$ isomorfa a la serie de referencia $S_1$. Las series $S_1$ y $S_2$ están visibles y disponibles en el momento de la verificación de la validez de la solución empleada, pero no en el momento de la construcción de estrategia de resolución.

El sujeto, para determinar el lugar preciso que ocupa un objeto en una serie, debe utilizar como estrategia óptima el número natural en su aspecto ordinal[30].

**Ejemplo 5:**

Las cuatro situaciones que siguen son casos particulares de la situación fundamental anterior:

1. Dada una colección de 12 vasos de plástico opacos alineados (boca abajo), colocamos, a la vista del niño, una moneda bajo uno cualquiera de ellos. Informamos al niño de que, cuando volvamos del recreo, le preguntaremos dónde está la moneda (en esta situación $S_1 = S_2$ ).

2. Presentamos ante los niños un tren con 10 o 15 vagones idénticos. Ante la vista de los niños, adherimos una pegatina bajo uno de los vagones. El tren hará un recorrido por la clase y, al cabo de un tiempo, preguntaremos a cada niño en qué vagón está la pegatina (en esta situación $S_1 = S_2$ ).

3. Disponemos de 12 cajas de cerillas idénticas y dispuestas en forma alineada. Ocultamos un objeto en cada una de ellas. Abrimos una caja y mostramos al niño el objeto que contiene. Le decimos que, a la vuelta del recreo, con todas las cajas cerradas, debe determinar con toda precisión la caja que contiene el objeto mostrado anteriormente (en esta situación $S_1 = S_2$ ).

4. Disponemos de un tren $T_1$ con 10 vagones, decorado cada uno de ellos con una pegatina diferente y ubicado en un extremo de la clase. Damos al niño el siguiente material:

*Continúa*

[29] Recordamos que la noción de *situación fundamental* se ha estudiado en el capítulo 2 de este libro.

[30] Existen objetos de la serie, como el primero y el último, o los inmediatos a estos, que pueden ser identificados por simple percepción visual sin el recurso a los ordinales.

*Continuación*

Una caja que contiene pegatinas idénticas a las que decoran el tren $T_1$.

Otro tren $T_2$ con el mismo número de vagones, pero sin decorar.

El niño debe tomar una pegatina de la caja al azar, ir al tren $T_1$, observar el vagón que tiene esa misma pegatina y, posteriormente, pegarla en el vagón análogo del tren $T_2$. Cuando el niño trabaja en el tren $T_2$, no tiene a la vista el tren $T_1$.

Para validar de forma autónoma la acción llevada a cabo, el niño puede comparar los dos trenes, ubicando uno junto al otro.

### 6.8.1. Tipos de situaciones

Tomando como base la *situación fundamental* definida anteriormente, el profesor/a de la Escuela Infantil puede diseñar toda una serie de situaciones a-didácticas mediante una gestión adecuada de sus variables didácticas. A continuación se proponen varios tipos:

- **Situación de autocomunicación.** Es el propio niño quien observa el lugar ocupado por el objeto en la serie de referencia $S_1$ y quien debe volver a localizarlo con precisión, bien en la misma serie o bien en otra análoga $S_2$.

Para resolver esta situación el niño necesita localizar el objeto, identificando correctamente su puesto en la serie de referencia $S_1$ y, posteriormente, en $S_2$.

- **Situación de comunicación oral.** Un niño $A_1$ elige un objeto en la serie de referencia $S_1$ y debe *comunicar oralmente* a otro niño $A_2$ las informaciones necesarias para que pueda localizar el objeto que ocupa la misma posición en otra serie $S_2$.

La resolución de este problema precisa que $A_1$ formule oralmente un mensaje donde describa con precisión el lugar que ocupa el objeto elegido en la serie $S_1$ y que $A_2$ , una vez interpretado este mensaje, localice un objeto en $S_2$ con la misma posición.

- **Situación de comunicación escrita.** Un niño $A_1$ elige un objeto en la serie de referencia $S_1$ y debe *comunicar por escrito* a otro niño $A_2$ las informaciones necesarias para que pueda localizar el objeto que ocupa la misma posición en otra serie $S_2$.

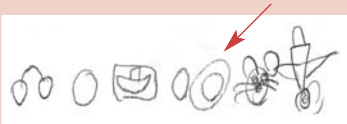
La resolución de este problema necesita que $A_1$ designe por escrito el lugar que ocupa el objeto elegido en la serie de referencia $S_1$ y que $A_2$ interprete este mensaje correctamente. Por ejemplo, $A_1$ podría reproducir icónicamente toda la serie $S_1$, identificando con una señal el puesto del objeto en cuestión. El procedimiento óptimo comportaría la utilización de los ordinales.

**Ejemplo 6:**

En una clase de Educación Infantil (4 años) se propuso la siguiente situación:

Disponemos de 6 cajas de cerillas idénticas y dispuestas de forma alineada. Introducimos un objeto en cada una de ellas y las cerramos. Abrimos una caja y mostramos a un niño $N_1$ el objeto que contiene. Pedimos a $N_1$ que escriba un mensaje, para que otro niño $N_2$ pueda determinar con precisión la caja que contiene dicho objeto (todas las cajas deben estar cerradas).

Algunos niños que intervinieron en esta actividad produjeron mensajes como este:



En este mensaje se observa que los niños no emplean los numerales, sino que reproducen analógicamente toda la serie y marcan el objeto con una señal. Producciones como esta nos muestran que han de poner en funcionamiento:

– Una relación de equipotencia entre la serie formada por las cajas de cerillas y la serie formada por los dibujos.

– La propiedad transitiva de la relación de equipotencia, ya que relacionan entre sí la serie de referencia con la serie de los dibujos y, de nuevo, esta última con la serie de referencia.

Otros niños produjeron mensajes como este:


Aquí se muestra que emplean los numerales para identificar la posición de los objetos en la serie dada. Con estas designaciones no buscan responder a la cuestión ¿cuántos elementos tiene la serie?, sino a la pregunta ¿cuál es el lugar ocupado por un objeto determinado? Este es el objetivo de la situación propuesta.

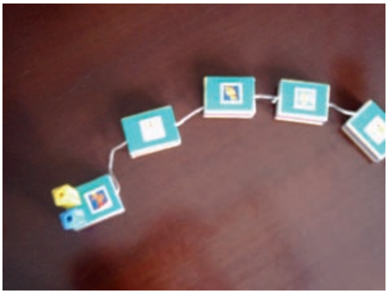
**Actividad 9:**

**Material:**

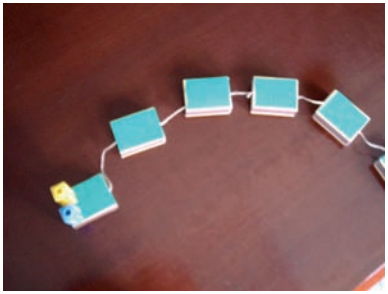
Dos trenes $T_1$ y $T_2$ (construidos con cajitas de cerillas) con el mismo número de vagones cada uno. En $T_1$ cada vagón está decorado con una pegatina (diferente para cada vagón) y en $T_2$ los vagones no están decorados. Cada uno de los trenes está ubicado en un extremo de la clase, de tal modo que, cuando los niños trabajan en el tren $T_1$, no pueden ver $T_2$.

*Continúa*

*Continuación*



$T_1$



$T_2$

**Consigna:**

La maestra/o llama a dos niños $N_1$ y $N_2$. Al niño $N_1$ lo ubica junto al tren $T_1$ y le señala un vagón en dicho tren. Pide a $N_1$ que escriba un mensaje, para que otro niño $N_2$ (que no ve el tren $T_1$), mediante la interpretación de este mensaje, pueda localizar con toda precisión, en el tren $T_2$, el vagón correspondiente.

a) Determine justificadamente:

– Conocimientos matemáticos que deben movilizar los niños para resolverla.

– Variables didácticas de la situación.

– Estrategias posibles que pueden emplear en su resolución.

– Estrategias de «validación autónoma» que pueden poner en funcionamiento los niños/as.

– Hipótesis de aprendizaje sobre las que se sustenta.

– ¿Podemos afirmar que esta situación se constituye en «criterio y fuente» de aprendizaje?

b) Consulte manuales escolares o cuadernos de fichas de nivel infantil:

– Busque varias tareas que demanden poner en funcionamiento «los ordinales».

– Analice las diferencias entre estas tareas y la situación anterior.

**Actividad 10: «El número para ordenar»**

Presentamos dos situaciones escolares cuyo objetivo es «el aprendizaje del sentido ordinal del número», tras su lectura, conteste a las cuestiones de análisis didáctico que se formulan:

*Continúa*

*Continuación*

**Situación 1:**


Se trata de una situación escolar en la cual el maestro presenta la ficha adjunta, para que los niños cumplimenten los espacios vacíos con los nombres de los niños que aparecen arriba alineados.

– Teniendo en cuenta las hipótesis de aprendizaje estudiadas en el capítulo 1, ¿qué modelo de aprendizaje se adopta de modo implícito en esta tarea escolar?

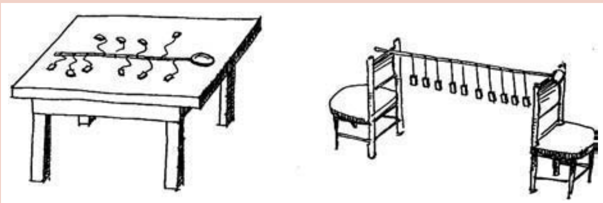
– ¿Se trata de una presentación ostensiva de los ordinales?

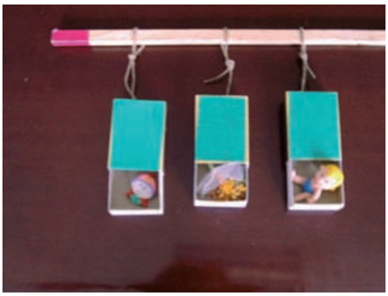
– ¿Qué trabajo queda bajo la responsabilidad de los niños en la tarea escolar propuesta?

– Si el niño no «rellena» bien la ficha, ¿qué medios tiene para informarse de su error?

**Situación 2:** Una mañana, la maestra presenta a los niños un bastón orientado sobre el que están atadas varias cajitas de cerillas. En el interior de cada una hay colocado un objeto familiar para los niños (que puedan identificarlo y designarlo con facilidad).

**Consigna:** Vamos a colocar este bastón con las cajitas abiertas sobre una mesa. Todos podréis ver el contenido de las cajas. Al terminar la jornada, las cerraremos y, mañana, con las cajas cerradas, debéis decirme el contenido de cualquiera de ellas. Si acertáis, ¡habréis ganado!





*Detalle del bastón con las cajitas.*

*Continúa*

*Continuación*

A la mañana siguiente, el bastón se situará entre dos sillas con todas las cajitas cerradas. Cuando un niño quiera jugar, la profesora tomará una caja cualquiera y él debe decir el objeto que hay en su interior. La profesora abrirá la caja, y si coincide, habrá ganado. En caso de error, la profesora abrirá también la caja que corresponde al objeto designado por el niño, para que identifique correctamente el lugar que ocupa.

**Cuestiones:**

– ¿Qué modelo de aprendizaje se ha adoptado en esta situación de enseñanza?

– ¿Qué conocimientos matemáticos deben movilizar los alumnos para resolver correctamente la tarea?

– ¿La propia situación puede «informar» al niño sobre el éxito o el error cometido en su designación?

– ¿Qué variables didácticas puede gestionar la profesora?

– ¿Cuál es la función de los desequilibrios cognitivos que genera esta situación en los alumnos?

– Señale las diferencias, desde el punto de vista didáctico, entre las dos situaciones propuestas.

### Ejemplo 7: El valor «relativo» de los elementos de una colección

**Situación: Juego de «El banquero»**

**Descripción:**

Se trata de un situación en la que los niños deben practicar cambios regulares entre fichas de diversos colores. El maestro divide la clase un grupos de 4 niños (a uno de ellos lo designará secretario del grupo) y jugarán entre los grupos. Designa a un niño para que haga las funciones de «banquero».

**Material:**

– Fichas de 4 colores diferentes: blancas, azules, rojas y verdes.

– Uno o dos dados con puntos (de 1 a 6).

**Consigna:**

Un niño de cada grupo tira el dado y pide al banquero tantas fichas rojas como puntos hay en la cara del dado, el secretario anota los puntos obtenidos en cada tirada. Cada grupo juega al menos 6 veces. Cuando cada grupo tiene bastantes fichas rojas, pueden comenzar a hacer cambios con el «banquero».

El maestro indica las reglas para hacer los cambios:

– n fichas rojas las podemos cambiar por una verde.

– n fichas verdes las podemos cambiar por una azul.

– n fichas azules las podemos cambiar por una blanca.

**Objetivos:**

– Conocer que el valor de una colección no depende necesariamente del número de elementos de esta colección.

*Continúa*

*Continuación*

– Practicar reglas de «cambios fijos», que provocan recursividad en el juego.
– Conocer el valor «relativo» de los elementos de una colección.
– Iniciar tareas que conduzcan hacia la numeración posicional.

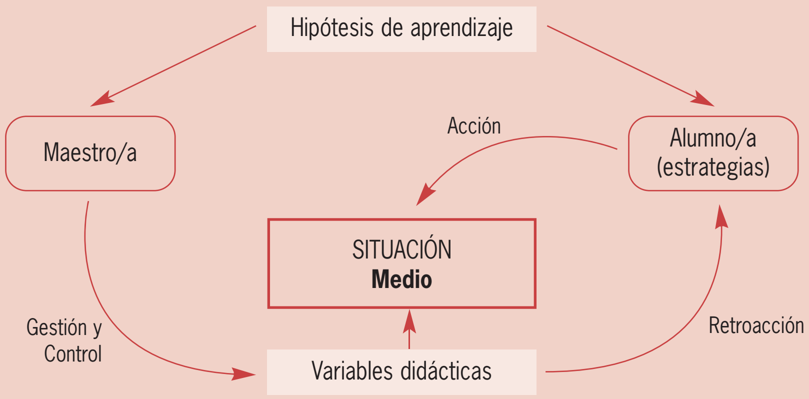

Después de varias jugadas y, tras haber efectuado diferentes cambios, el maestro preguntará: ¿qué grupo ha ganado?

Para determinar el ganador no basta con «contar» el número de fichas que tiene cada grupo, sino que es necesario reconocer el «valor relativo» de cada ficha.

Por ejemplo, como nos muestra la foto superior, en dos tiradas, un equipo obtuvo tres fichas rojas y otro equipo obtuvo una roja y una verde. El maestro preguntará: ¿cuál de los dos equipos es el ganador?

**Actividad 11:**

Tomando como referencia las situaciones de los juegos de «El barquito», «El banquero» y «La marioneta», presentadas anteriormente, analice y explique justificadamente cada uno de los elementos del siguiente esquema y sus diferentes relaciones.




## 6.9. Bibliografía

BRIAND, J.; LOUBET, M. y SALIN, M. H.: *Apprentissages Mathématiques en maternelle*, Hatier, Paris, 2004.

BRISSIAUD, R.: *El aprendizaje del cálculo*, Visor, Madrid, 1989.

RUIZ HIGUERAS, L.: «La construcción del número y la numeración», en Chamorro, C. (ed.): *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson, Madrid, 2003, 95-131.

ERMEL: *Aprentissages numeriques*, Hatier, París, 1991.

IFRAH, G.: *Historia Universal de las cifras*, Espasa-Forum, Madrid, 1997.

KAMII, C.: *El aprendizaje del número*, Aprendizaje-Visor, Madrid, 1984.

MARTÍN, F.: *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle*, Scérén. CRDP Aquitaine, Bordeaux, 2003.

VERGNAUD, G.: *El niño, las Matemáticas y la realidad*, Trillas, México, 1991.

CAPÍTULO 7

# Aritmética informal

M.ª del Carmen Chamorro

## Contenidos

**La aritmética informal**

*Cada uno de nuestros pensamientos, cada uno de nuestros cálculos, son el resultado de la activación de circuitos neuronales especializados implantados en nuestro cortex cerebral. Nuestras construcciones matemáticas más abstractas son el fruto muy acabado de la actividad coherente de nuestro cerebro y del de millones de otros que, antes que nosotros, han labrado y seleccionado las herramientas matemáticas.*

STANISLAS DEHAENE
*La Bosse des maths*

## 7.1. Introducción

Hablar en los niveles de Educación Infantil de cálculo o aritmética puede parecer una osadía, si bien al añadirle el adjetivo de informal empezamos a comprender que en realidad se trata, como veremos, de algo muy distinto.

Un número bastante elevado de alumnos de Educación Primaria se sirve durante mucho tiempo de sus competencias en conteo para resolver situaciones aritméticas que demandarían un cálculo, lo que pone de manifiesto que la aritmética formal que se practica en la escuela aparece como artificial y falta de sentido para muchos de ellos. Por otra parte, el carácter fuertemente contextualizado de los conocimientos numéricos hace que coexistan procedimientos de distinta índole, descritos en este capítulo, y que sólo al final de un largo recorrido de aprendizaje aparezcan conceptos generales como por ejemplo la adición.

Además, el abuso del cálculo escrito, y los algoritmos que lleva aparejados, en detrimento del cálculo pensado y mental, es un freno para que muchos alumnos utilicen procedimientos, que, aunque rudimentarios, les permiten resolver con éxito situaciones de su vida extraescolar. El trabajo de los sucesivos profesores consistirá, entre otras cosas, en ir transformando poco a poco, sin que en ningún caso se pierda el sentido, y procurando que el alumno sienta la necesidad, esos procedimientos rudimentarios en otros más estandarizados y potentes. En todo caso, hay que saber que el alumno utilizará procedimientos de solución que se basan en el cálculo a medida que avanza en su aprendizaje, y que elaborarlos lleva tiempo por el carácter no automático y fuertemente contextualizado que caracteriza el tratamiento numérico.

En este capítulo, hemos querido proporcionar elementos teóricos que permiten relacionar los procedimientos de cálculo con los de conteo, haciendo un exhaustivo análisis de las estrategias de resolución que utilizan los alumnos de la Escuela Infantil, de manera que las capacidades precoces de muchos alumnos sean explotadas y valoradas en relación con la edad y la tarea que se va a resolver. Los *conocimientos en acto* que muchos alumnos ponen en juego son un valioso apoyo para la elaboración, más adelante, de conocimientos explícitos, que serán a su vez el punto de partida para la construcción de nuevos objetos de saber.

Hemos dedicado bastante espacio al problema de la constitución de repertorios y hechos numéricos, pues sin ellos no se puede pretender avanzar en cálculo. Recurrir al juego es siempre una buena estrategia en Educación Infantil, y el aprendizaje de los hechos numéricos se adapta extraordinariamente bien a las situaciones de juego, ya sea individual o grupal, competitivo o no. El lector encontrará, por tanto, múltiples sugerencias de juegos, ya sean específicos o adaptación de juegos tradicionales, para trabajar las relaciones numéricas elementales, así como seguir trabajando la conceptualización del número. Un juego son mil juegos si sabemos jugar con las variables didácticas, lo que es vital en Educación Infantil, donde los conocimientos numéricos varían mucho de unos niños a otros, por lo que el lector deberá ejercitarse en transformar los juegos propuestos en otros que se adapten a supuestos de partida distintos: edad, nivel, periodo del curso, conocimientos previos, dificultades específicas, etc.

Por último, deseamos resaltar la importancia que tiene el creer en las capacidades de los niños, que nunca dejan de sorprendernos, por lo que no debemos subestimar sus posibilidades, que deben ponerse constantemente a prueba, presentándoles actividades con desafíos nuevos en lugar de rutinarias actividades que solo exigen la capacidad de repetir. Despertar el interés por las Matemáticas entre los más pequeños es relativamente sencillo, pues su innato afán por explorar situaciones nuevas y enfrentarse a retos conecta con algunas de las características que distinguen el trabajo en Matemáticas.

## 7.2. Objetivos

– Conocer los procedimientos que pueden usar los alumnos de Educación Infantil para resolver cuestiones numéricas.

– Analizar el papel de los distintos tipos de conteo en relación con las situaciones que se van a resolver y el cálculo que se va a realizar.

– Hacer un repertorio de las estrategias aditivas y sustractivas que usan los niños de estas edades.

– Presentar situaciones didácticas para la introducción de la adición.

– Proporcionar pautas para el diseño de actividades que permiten la memorización de repertorios.

– Favorecer el sentido del cálculo, alentando el desarrollo de procedimientos informales propios.

– Destacar el importante papel del cálculo pensado y mental.

– Proporcionar elementos para la evaluación del cálculo en Educación Infantil.

## 7.3. Capacidades aritméticas precoces

### La conservación de la desigualdad

Cuando en el final de apartado 5.3.2., se habló de las distintas cuestiones suscitadas por la conservación de las cantidades discretas, hicimos mención de un estudio de Gréco que ponía de manifiesto la capacidad de los niños para apreciar, desde edades muy tempranas, las transformaciones de aumento y disminución que sufre una colección, y cómo, para cambiar una desigualdad numérica, es necesario añadir o quitar elementos. Este hecho está en consonancia con lo que sostiene Vergnaud en su teoría de los campos conceptuales, vista en el capítulo 1, y ello por dos motivos:

– Porque el número (como cardinal y como medida) y las transformaciones aditivas y sustractivas forman parte del mismo campo conceptual, el campo conceptual de las estructuras aditivas, implican por tanto esquemas de acción y de pensamiento en estrecha relación y a veces similitud.

– Porque la única manera de que el niño encuentre sentido a la noción de número, y lo utilice funcionalmente, es partiendo de situaciones que den lugar a comparaciones y transformaciones de colecciones discretas. Razón por la cual, en la segunda parte de este capítulo propondremos situaciones didácticas para trabajar la aritmética elemental.

Gelman fue una de las primeras autoras en poner de manifiesto las capacidades precoces de razonamiento que tienen los niños sobre transformaciones numéricas. Así, mostró que los niños de 2 años son capaces de discriminar, tanto cantidades pequeñas (números perceptivos) como las transformaciones que afectan a la cantidad de las que solo afectan la apariencia perceptiva. El enfoque de Gelman ha sido contestado por autores que opinan que la aritmética precoz, de la que esta autora habla, es en realidad un cálculo basado en la utilización de la correspondencia término a término. Estos autores mantienen que no basta con adicionar y sustraer para adjudicar competencias aritméticas a los niños, es necesario coordinar adición y sustracción en relación con un invariante.

Si recordamos lo que se dijo en el capítulo 1 sobre los campos conceptuales, lo anterior vendría a significar que comprender:

$$A \cup B = C \;\Rightarrow C - A = B \;\wedge\; C - B = A$$

que, en términos numéricos de cardinales, supondría coordinar como facetas del mismo hecho numérico las tres igualdades que siguen:

$$a + b = c \Rightarrow c - a = b \wedge c - b = a$$

comprendiendo que si dos partes dan un todo, cuando al todo se le quita una parte, se obtiene la otra. Desde un punto de vista didáctico:

> Los hechos numéricos relacionados entre sí deben ser enseñados de forma simultánea.

pues así se refuerzan y encuentran sentido pleno. Por tanto, si estamos trabajando que 3 y 4 son 7, hay que ver que si a 7 se le quitan 4 se obtiene 3, y que si se le quita 3 se obtiene 4.

Todos los autores coinciden sin embargo en señalar que hay dos mecanismos fundamentales sobre los que reposa la cuantificación preverbal en los niños:

- Un mecanismo de aproximación en el que el número viene influido por la forma.
- Un mecanismo de cálculo limitado para numerosidades pequeñas.

También parece haber acuerdo sobre el hecho de que hablar de capacidades aritméticas antes de los 5 años es cuanto menos arriesgado, y se insiste en el papel tan importante que juegan la correspondencia término a término en los procesos de cuantificación, sobre todo en la adquisición del conteo. Por eso:

> La correspondencia término a término podría ser el proceso a partir del cual se estructuran aritméticamente la significación cardinal de los números y la comprensión exacta de la adición y la sustracción[1].

## 7.4. Competencias aritméticas y cantinela

### 7.4.1. Consideraciones previas

#### Conceptos relacionados

Las dificultades encontradas por los niños en la adquisición del número van a interferir rápidamente con las dificultades propias del sistema de numeración

[1] Villete, B.: «Processus de quantification chez le jeune enfant: peut-on parler d'une arithmétique précoce?», 99, en Bideau, J. (dir.): *Le développement des activités numériques chez l'enfant*, Lavoisier, Paris, 2002.

y las operaciones que le acompañan. Por ello, lo que sigue debe ponerse necesariamente en relación con lo ya expuesto sobre el número y la numeración en el capítulo 5.

## El conflicto sociocognitivo

Otra consideración que queremos hacer es que, si bien algunas de las cuestiones que abordaremos solo tienen pleno sentido en la Educación Primaria, el profesor de Educación Infantil debe saber cuáles son los retos con los que sus alumnos habrán de enfrentarse, y en qué medida los conocimientos que el niño adquiere en su paso por la Escuela Infantil son imprescindibles para los aprendizajes numéricos posteriores. Además, si nos colocamos en la posición vygotskiana, y en la de aquellos que consideran que el conflicto sociocognitivo es un motor para el aprendizaje, el progreso del alumno va a depender de las muchas interacciones que el profesor sea capaz de generar:

– Primero con la propia situación, buscando y diseñando situaciones que permitan el aprendizaje a-didáctico (ver capítulo 2).

– Después con los otros niños, explotando la interacción entre pares y la aparición del conflicto sociocognitivo, verdadera fuente de progreso.

Muchos niños son capaces de aprender observando la conducta de otros, por lo que el trabajo o el juego en grupo, por su potencial para generar conflictos que enfrentan puntos de vista opuestos, debe usarse siempre que se pueda.

## El papel del lenguaje

Tampoco hay que olvidar que las actividades numéricas discurren en paralelo con el uso del lenguaje (recuérdese lo que se dijo en el apartado 5.5.1. sobre la arquitectura de los conocimientos numéricos), y que éste interviene de manera crucial en la numeración oral. Sabemos que incluso desde un punto de vista neurológico el nombre de las cifras y los números, las formas lexicales y los procedimientos de producción e identificación de números, y los hechos numéricos, se localizan en el área del lenguaje del hemisferio izquierdo del cerebro. La adquisición del código verbal tiene por tanto una gran importancia, pues, además, parece que el aprendizaje del código de numeración árabe depende estrechamente de este código verbal.

## La creación de contextos

Ya hemos dicho antes que los aprendizajes numéricos, a estas edades, están muy contextualizados, pero, además, ningún aprendizaje numérico puede llevarse a buen término si no es a través de situaciones que permitan esa contextualización. La situación ideal debe corresponder a la creación de situaciones que permitan eliminar la distancia entre el saber de la escuela y el saber de la vida que aparece en contextos no escolares.

Así, es habitual ver cómo en la escuela el aprendizaje de los números se organiza, sin que haya un criterio científico o didáctico para ello, según el orden de magnitud: del 0 al 5, del 5 al 10, del 10 al 15, o según enunciados del tipo: los números hasta el 10, los números hasta el 20, etc., cuando los niños a los que se dirigen estas enseñanzas hace mucho que utilizan números mayores en su vida cotidiana: edad de sus padres, número de la calle en la que viven, autobús en el que van habitualmente con sus padres, día del mes, etc., situaciones en las que los números están contextualizados. No hay que olvidar, sin embargo, que en la escuela deben proponerse situaciones en las que no solo los números adquieran sentido, sino que representen, sin ambigüedad alguna, cantidades continuas o discretas o situaciones que reenvíen a un orden.

### 7.4.2. Procedimientos y dominio de la cantinela

La noción de procedimiento está muy ligada a las operaciones elementales. Así, para calcular 2 + 14 el alumno puede proceder de diferentes maneras:

– Aplicar el algoritmo de la adición.

– Utilizar un hecho numérico almacenado en M.L.T.[2] y dar el resultado de manera inmediata.

– Hacer un sobreconteo rápido partiendo de 14.

– Hacer un sobreconteo lento partiendo de 2.

– Hacer un recuento partiendo de 1.

Algunos de esos procedimientos no son nunca enseñados de manera expresa, y otros son ignorados a pesar de que los niños se sirven de ellos fuera de la escuela en las situaciones cotidianas. También, aunque parezca sorprendente, pasa mucho tiempo hasta que un buen porcentaje de alumnos se sirve de la adición, bien usando hechos numéricos o bien el algoritmo, y siguen usando el sobreconteo, e incluso el conteo, usando los dedos hasta bien entrada la Educación Primaria. Además, dependiendo de la cultura, se penaliza, por ejemplo, el uso de los dedos, o se privilegia la enseñanza de algún método, caso del sobreconteo en Japón.

Se trata, por tanto, de diferentes procedimientos que no tienen el mismo nivel de complejidad, por lo que su utilización por los niños estará en relación con sus capacidades numéricas, sin olvidar, en ningún caso, la necesidad que tienen los niños pequeños de representarse las situaciones numéricas con ayuda de objetos y soportes concretos.

Según Fuson[3], la construcción por parte de los niños de relaciones de complejidad creciente entre la serie numérica, el conteo y las significaciones car-

[2] Ver el apartado 5.5.1.

[3] *Op. cit.*, 173.

dinales de los nombres de los números, requiere coordinaciones, y son justamente estas las que van a permitir resolver situaciones de adición y de sustracción.

Hemos visto que la construcción de la cadena numérica verbal pasa por diferentes niveles de construcción: repetititvo, cadena incortable, cadena cortable, cadena unitaria, cadena bidireccional, y no en todos los niveles es posible el conteo, y menos aún el cálculo. Solo a partir del nivel cortable los alumnos pueden contar a partir de cualquier número, momento en el que la significación de la serie y del conteo confluyen y puede aparecer el sobreconteo, desde su variante más elemental de *doble conteo*[4] al sobreconteo rápido que supone el uso implícito de la propiedad conmutativa (ver apartado 5.5.3).

En el último nivel, en el que la serie numérica aparece como *seriada, cardinalizada, encajada, bidireccional y unitizada*, los niños construyen la relación entre dos situaciones diferentes: término/término/suma, y empiezan a aparecer las estrategias[5] de cálculo pensado para hacer más sencillas las adiciones y sustracciones.

Por otra parte, se necesita que el niño haya adquirido el sentido cardinal del número, para que pueda utilizarlo en situaciones de adición y sustracción

Parece razonable distinguir entre las capacidades de cálculo que tienen los niños dependiendo de los niveles numéricos descritos en el apartado 5.6.; así, con números pequeños los problemas de conservación son resueltos fácilmente, cuantificando las colecciones después de la transformación. Los cuantificadores y operadores se desarrollan mucho tiempo antes de que aparezca la conservación. Los niños tienen necesidad de representarse las transformaciones de adición y sustracción, tanto con números pequeños como grandes, antes de buscar una regla que traduzca los problemas de conservación añadiendo o quitando.

Para números más grandes, por ejemplo 8 + 9, aumenta el número de errores, frente a por ejemplo 2 + 3, debido fundamentalmente al procedimiento de conteo usado, que se hace largo y pesado, de manera que los niños tienen que retener varias informaciones a la vez en la memoria de trabajo, que se ve por tanto muy sobrecargada. Los niños mayores, de 3.º o 4.º de Educación Primaria, cambian la estrategia del conteo por la recuperación de hechos numéricos archivados en la M.L.T. (memoria a largo plazo), razón por la que resuelven la cuestión de manera más rápida y segura.

[4] Para hacer 4 + 3 el niño lleva la doble cuenta, de ahí el nombre, de lo que debe contar y por dónde va pasando:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 | 6 | 7 |
| | 1 | 2 | 3 |

[5] En la obra ya citada de Fuson puede consultarse el desarrollo de todas las estrategias de adición y sustracción basadas en el conteo.

## 7.5. La memorización de hechos numéricos

Se ha constatado que si bien los niños muy pequeños son muy sensibles a las transformaciones aditivas, y a los 4 años pueden resolver pequeños problemas aditivos y sustractivos verbalmente o con un material concreto, tienen, por el contrario, dificultades para memorizar los hechos numéricos. Esta memorización transcurre a lo largo del periodo que va del primer curso al último de Primaria, apreciándose el mayor progreso en torno a los 12-13 años.

Concretamente, se han encontrado tres métodos distintos utilizados por los alumnos de Educación Infantil y Primer Ciclo de Educación Primaria, para resolver adiciones: el recuento, el sobreconteo rápido o no, y el uso de la descomposición (por ejemplo: $7 + 8 = 7 + 7 + 1$). Los procedimientos encontrados en alumnos de 2.º a 4.º de Primaria son básicamente los mismos para la adición, mientras que para la sustracción usan: el deconteo (14, 13, 12 para 15-3), el conteo hacia delante (12, 13 para 13-11), estrategias (16-6-1 para 16-7), heurísticos (14-10 son 4, más 5, son 9; para 14-5, 10 es el doble de 5).

En los cuadros que siguen[6] se detallan las estrategias usadas por los alumnos en la resolución de problemas aditivos y sustractivos:

| Estrategia | Descripción | Ejemplo |
|---|---|---|
| Conteo: contar con los dedos a partir de 1. | Cada número del problema se representa con los dedos. Después el niño cuenta los dedos, empezando por 1. | Para resolver 3 + 4, el niño cuenta 3 dedos en una mano, después 4 en la otra. A continuación, recuenta todos los dedos empezando por 1. |
| Conteo: conteo verbal a partir de 1. | El niño cuenta mentalmente comenzando por 1. | Para hacer 3 + 4, efectúa mentalmente 1, 2, 3, después 4, 5, 6, 7. |
| Conteo: conteo verbal empezando por el primer número. | El niño inicializa un contador interno para el primer operador, después incrementa mentalmente el contador en pasos de 1, y así tantas unidades como estén contenidas en el segundo número. | Para resolver 3 + 4 el niño hace: (3), 4, 5, 6, 7. |

*Continúa*

[6] Lemaire, P. *et al.*: «Le développement des stratégies en situation de résolution en problèmes arithmétiques», en Bideau, J. (dir.): *Le développement des activités numériques chez l'enfant*, Lavoisier, Paris, 2002, pp. 199-200.

*Continuación*

| Estrategia | Descripción | Ejemplo |
|---|---|---|
| Mínimo: conteo verbal empezando por el mayor de los dos números (= minimizar el número de pasos a contar) | El niño inicializa un contador interno con el mayor de los dos números, después incrementa este contador en pasos de 1, tantas unidades como haya contenidas en el menor de los dos números. | Para resolver 3 + 4, el niño hace: (4), 5, 6, 7. |
| Descomposición: cálculo a partir de hechos numéricos derivados | Uno de los dos operandos se descompone en dos números, de manera que uno de los dos números dé justamente 10 una vez añadido al otro operando. El otro número es añadido entonces a esta suma. | Para resolver 8 + 4, el niño hace: 4 = 2 + 2; 8 + 2 = 10; 10 + 2 = 12. |
| Recuperación: recuperación en memoria | El niño recupera directamente la solución almacenada en la memoria. | Para hacer 8 + 4, responde directamente 12. |
| Adivinanza | El niño dice haber adivinado la solución. | |

El inventario de las estrategias utilizadas por los niños en la resolución de problemas sustractivos se muestra en la tabla siguiente:

| Estrategia | Descripción | Ejemplo |
|---|---|---|
| Contar los objetos | Cada número del problema se representa por objetos. Los objetos que representan el número que hay que sustraer se quitan. Los objetos que quedan constituyen la respuesta. | Para resolver 4 − 2, el niño junta 4 objetos y quita 2. Los 2 objetos restantes constituyen la respuesta. |
| Añadir objetos | El número sustraído se representa por objetos. Después, el niño añade tantos objetos como sea necesario para formar el número del que se sustrae. | Para resolver 4 − 2, el niño toma 2 objetos, después añade 2 para obtener 4. Los 2 objetos añadidos indican la respuesta. |
| Emparejar | Dos hileras de objetos representando cada una una de las cantidades que constituyen los operandos. Los objetos de una hilera se emparejan con los de la otra. Los objetos restantes indican la diferencia. | Para hacer 4 − 2, se disponen 4 objetos enfrentados a 2 objetos. Los 2 objetos no emparejados indican que la diferencia es 2. |

*Continúa*

*Continuación*

| Estrategia | Descripción | Ejemplo |
|---|---|---|
| Contar con los dedos | El niño levanta tantos dedos como indica el número del que hay que quitar, después baja tantos dedos como indica el número a sustraer. | Para hacer 4 − 2, el niño levanta 4 dedos, después baja 2 y cuenta los dedos que quedan levantados. |
| Contar a partir del número del que hay que sustraer | El niño cuenta verbalmente, en sentido creciente (incremento), a partir del número que va a sustraer. Se para cuando ha alcanzado el número del que hay que restar. La cantidad de números contados indica la diferencia. | Para hacer 4 − 2, el niño cuenta: (2), <u>3</u>, <u>4</u>: la respuesta es 2. |
| Contar hacia atrás a partir del número del que hay que sustraer | El niño cuenta hacia atrás (disminución) a partir del número del que hay que quitar. Se para cuando la disminución es igual al número que hay que sustraer. La cantidad de números contados es la respuesta. | Para hacer 4 − 2, el niño cuenta: (4), <u>3</u>, <u>2</u>, e indica 2 como respuesta. |
| Recuperación en memoria | Recupera directamente la solución almacenada en la memoria. | Para hacer 4 − 2, el niño recupera directamente 2 de la memoria. |

Si se estudian con detalle las dos tablas anteriores, en las que los procedimientos van de menor a mayor complejidad, se verá que proporcionan una progresión que permite situar la evolución del cálculo de un alumno, a la vez que se ve cómo una estrategia puede ser mejorada por la siguiente.

A excepción de la memorización de dobles, que se realiza de una manera directa, los niños continúan durante mucho tiempo usando el conteo para encontrar los hechos aditivos más simples, por lo que autores como Fuson proponen la enseñanza sistemática del conteo y sobreconteo, tanto para la adición como para la sustracción. La excepción es la memorización de dobles, que se realiza de una manera directa y con bastante facilidad. Otros autores, y nosotros compartimos su opinión, se decantan más por la enseñanza de estrategias ($8 + 7 = (8 + 8) - 1$, $16 - 9 = (16 - 10) + 1$), combinada con el aprendizaje directo de dobles y complementos a 10. Por otra parte, si se toma en consideración que adición y sustracción forman parte del mismo campo conceptual (Vergnaud), los hechos numéricos deberían ser aprendidos, como hemos dicho anteriormente, por familias ($5 + 3 = 8$, $8 - 5 = 3$, $8 - 3 = 5$).

La memorización de hechos numéricos que trabajan una sola cantidad a la vez, por ejemplo todas las descomposiciones aditivas del 8, son, a juicio de algunos autores tiempo perdido, pues este trabajo requiere coordinar dos puntos de vista sobre esta cantidad, la totalidad y la suma de las partes, y puesto que una de ellas se da por adelantado, el 8, no tienen sentido. En los repertorios aditivos con huecos se debe alternar el lugar ocupado por el hueco, de manera que las expresiones puedan ser leídas en términos de igualdad.

El papel de las configuraciones o patrones numéricos, de los que ya hablamos en el apartado 5.6.1., en el aprendizaje de hechos numéricos se ha revelado como un recurso utilizado de forma precoz por los niños, que los usan con anterioridad y en situaciones equivalentes a la adición y sustracción. En todo caso, se recomienda el uso del cálculo, aunque sea en un dominio numérico restringido, desde los primeros aprendizajes en la Escuela Infantil.

> El uso del sobreconteo constituye un elemento previo y necesario para el desarrollo del cálculo.

Ya hemos dicho que muchos autores recomiendan que sea enseñado de manera expresa, sin necesidad de esperar a que los niños lo descubran.

Se sabe que los principales disfuncionamientos que afectan a la memorización de los hechos numéricos son de dos tipos:

– Los que corresponden a la utilización de estrategias inmaduras (no relacionar los hechos numéricos entre sí), a menudo asociadas a déficit de conteo o de cálculo (por ejemplo si los números son grandes) y de la memoria de trabajo (que puede encontrarse, por ejemplo, saturada en un momento dado por un exceso de carga mental).

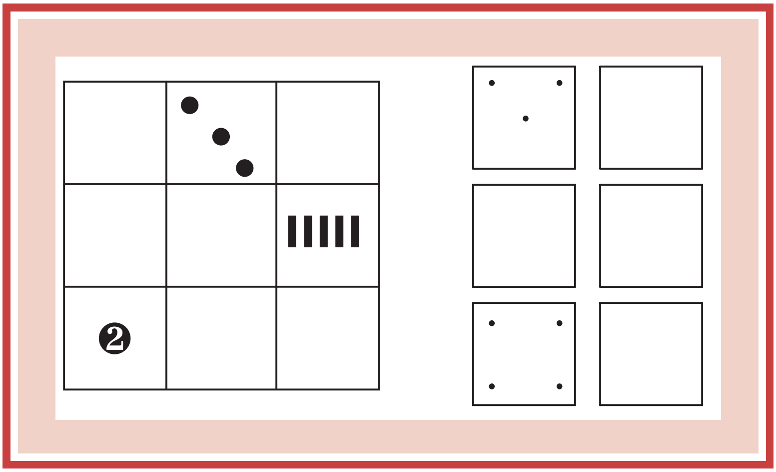
– Los que corresponden a dificultades persistentes para recuperar los hechos numéricos, asociados fundamentalmente a la velocidad de conteo (interferencias entre las demandas de almacenamiento y de tratamiento) y a la memoria de trabajo (poca capacidad para almacenar datos durante un corto periodo de tiempo, capacidad que aumenta con la edad).

### 7.5.1. Actividades para trabajar la memorización de los repertorios

Aunque en el capítulo dedicado al juego se tratará de manera más extensa, nos parece interesante dedicar aquí un espacio a las distintas actividades que pueden ser usadas para familiarizar al alumno con los repertorios aditivos, y por tanto sustractivos.

Entendemos que obligar a los niños a memorizar los hechos numéricos, las llamadas habitualmente tablas, bien escribiéndolas o por un procedimiento de recitado, tiene poco sentido. Es un hecho admitido por cualquiera que la utilización sistemática de ciertos números, teléfonos, matrícula, DNI, etc., lleva a su memorización de forma involuntaria; se trata, por tanto, de explotar el gusto que experimentan los niños pequeños cuando *juegan* con los números, y propiciar situaciones en las que ganar tiene mucho que ver con la buena o mala memorización que el niño ha conseguido de los hechos numéricos, buscando juegos variados que fuercen, de una u otra forma, esa memorización.

Pueden utilizarse *juegos de loto* que permiten el trabajo individual. Un juego de loto es básicamente un juego de asociaciones, en el que hay que hacer corresponder imágenes iguales o relacionadas, o, en nuestro caso, escrituras o representaciones equivalentes de los números:



**Actividad 1:** Diseñar un juego de loto en el que se trabaje la correspondencia entre la numeración oral y la escrita.

Es evidente que pueden usarse patrones o configuraciones diferentes, bien con puntos, como en los dados y el dominó, bien usando los dedos de la mano, para representar los números, mezclar numeración oral y escrita y usar distintas operaciones, por lo que variando todas estas posibilidades, junto con el dominio numérico que se va a trabajar, pueden obtenerse muchos juegos diferentes. Nunca se tiene que perder de vista que las escrituras numéricas deben responder a los objetivos matemáticos buscados, y que el juego es una excusa para alcanzarlos con más facilidad.

***El dominó*** y los juegos de sociedad habituales, tales como las cartas, o el bingo, son también de gran ayuda. Las reglas pueden ser las habituales, o pueden modificarse en función de la utilización que se quiera hacer, si bien hay que respetar ciertas reglas. Así, no debe olvidarse que para que un dominó funcione debe tener 28 fichas correspondientes a siete familias diferentes; lo que no es obligatorio es que esas familias vayan del 0 al 6, como en el juego de sociedad, o del 4 al 10 como en la figura que sigue:

| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 · 2+2 | | | | | | |
| 5 | 10-5 · 5-1 | de 5 a 10 · 3+2 | | | | | |
| 6 | 12-6 · de 6 a 10 | 2+4 · 10-5 | de 6 a 12 · 3+3 | | | | |
| 7 | 2+5 · 8-4 | 14-7 · de 5 a 10 | 6+1 · 10-4 | de 7 a 14 · 3+4 | | | |
| 8 | de 8 a 16 · 4 | 5+3 · 8-3 | 16-8 · de 4 a 10 | 3+5 · 10-3 | 2+6 · 4+4 | | |
| 9 | 18-9 · 3+1 | 4+5 · 9-4 | de 9 a 18 · 1+5 | 7+2 · de 3 a 10 | 3+6 · 10-2 | 8+1 · 5+4 | |
| 10 | 5+5 · 1+3 | 6+4 · 4+1 | 7+3 · 4+2 | 8+2 · 5+2 | 9+1 · de 2 a 10 | 4+6 · 10-1 | 2+8 · 3+7 |

**Actividad 2:** Diseñar un dominó en el que se busque la automatización de repertorios aditivos simples a partir de la suma de dobles.

También es posible cambiar las reglas de juego, de manera que en lugar de colocar dos fichas que tengan el mismo número juntas, puedan colocarse por ejemplo las que sumen una cantidad dada, 6 en el ejemplo que sigue:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 · 4 | 2 · 5 | 1 · 3 | 3 · 2 | 4 · 6 |

***Los juegos de cartas*** son también de gran utilidad, y admiten múltiples reglas de juego. Unos los más interesantes son los juegos de parejas o familias, que consisten en poner juntas cartas de la misma familia, por ejemplo todas las descomposiciones aditivas de un número, o la expresión canónica de un número y una expresión aditiva (por ejemplo, 7 y 5 + 2), gana quien más cartas empareje o quien se quede con menos cartas en la mano después de haberse descartado de las parejas.

***Los juegos de batalla*** además de trabajar distintas expresiones y descomposiciones numéricas, lo que depende evidentemente de las escrituras que pongamos en las cartas, obligan a utilizar la comparación numérica, y por tanto los niños se ven obligados a buscar estrategias para decidir qué carta es más grande. Juegan un mínimo de dos jugadores y un máximo de cuatro (si el número de jugadores es grande, el número de comparaciones que se pueden hacer es mayor y el juego se hace lento y pesado además de más dificultoso). Los alumnos pueden tirar a la vez, o lo que es más interesante, por turnos, pues esta manera de jugar permite al jugador buscar estrategias para ganar, lo que no ocurre cuando tira la carta al azar; el que tira la carta mayor se lleva todas las cartas; si dos o más jugadores tiran una carta del mismo valor, hay batalla entre esos jugadores, que deben tirar una segunda carta, o más si fuera preciso, hasta poder decidir quién se lleva el montón de cartas por haber tirado la carta mayor.

Ejemplo de partidas:

| | | |
|---|---|---|
| 3 + 3 | 4 | 2 + 1 |
| 5 + 1 | 3 + 2 | 6 |

Gana el jugador que ha tirado la carta 3 + 3.

Hay batalla entre el jugador que ha tirado la carta 5 + 1, y el que ha tirado la 6, por lo que ambos jugadores deben tirar una segunda carta:

| | |
|---|---|
| 2 + 2 | 3 |

El jugador que ha tirado la carta 2 + 2 se lleva las cinco cartas.

**Actividad 3:** Realizar un inventario de los juegos de cartas habituales que puedan utilizarse para trabajar los repertorios aditivos, modificando para ello, si es necesario, las reglas del juego.

En los ***juegos de objetivo*** se fija un número que es el objetivo que se tiene que alcanzar con un número determinado de cartas. Supongamos, por ejemplo, que hay que obtener 20 con 4 cartas, juegan 3 alumnos, cada uno de los cuales recibe 4 cartas al azar de un total de 18:

| Número de la carta | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de cartas | 3 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 |

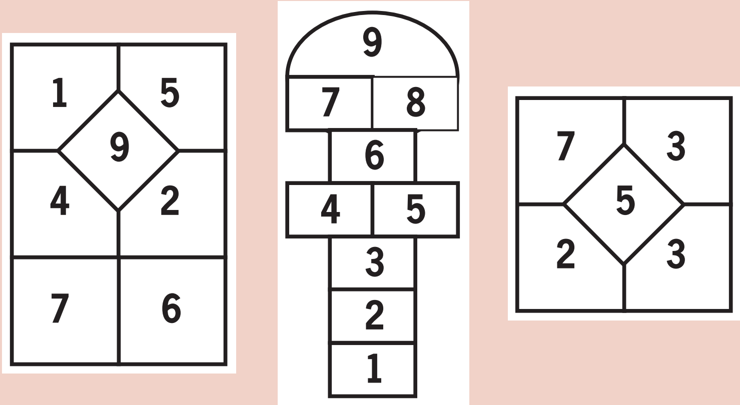
Se extienden las cartas sobre la mesa; por turnos cada alumno coge una carta hasta completar 4. Se muestran las cartas y se busca, usando papel y lápiz, si alguien ha alcanzado el objetivo, y en caso contrario quién se ha acercado más. El objetivo del juego es practicar la adición de números pequeños usando una codificación escrita.

Aunque el juego es para alumnos de primer curso de Primaria, se puede actuar sobre numerosas variables: escritura y dominio numérico de las cartas, número de cartas que se reciben, tamaño del objetivo, posibilidad de representar el número de la carta por una colección de fichas, utilización de la calculadora, uso de cartas comodines (esta posibilidad hace usar, implícitamente, la suma con huecos), etc., y adaptar así el juego para alumnos de Educación Infantil.

**Actividad 4:** Adaptar el juego del objetivo anterior para alumnos de 4 y 5 años.

Todos los ***juegos*** que se jueguen ***con dos dados,*** que pueden llevar las cifras habituales u otras (por ejemplo pueden llevar solo las cifras 1, 2 y 3, cada una de ellas en dos caras, en escritura numérica o con la configuración habitual de puntos), y en los que se gane la cantidad de fichas, gomets, chapas, etc., que sumen los dos dados, ponen en juego situaciones de adición. Si los dados son de distinto color, uno puede hacer perder y otro ganar, y dar lugar a una sustracción para encontrar el resultado de la jugada. Si estamos en una pista graduada, como por ejemplo en el juego de la oca, un color puede significar avanzar y otro retroceder. Todos estos juegos van a ayudar a dar sentido a las operaciones de adición y sustracción, asociándolas a situaciones diversas: aumento, disminución, avance, retroceso, lo que más tarde va a revelarse como imprescindible para la resolución de los distintos tipos de problemas aditivos.

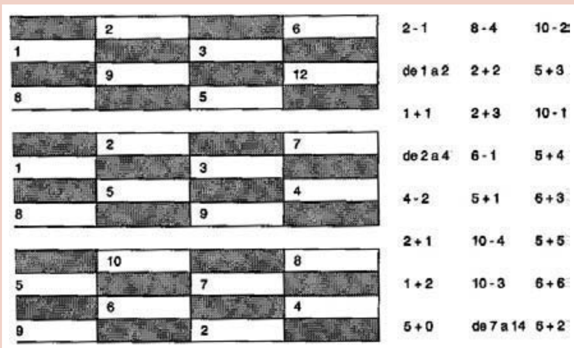
***Las rayuelas,*** juego habitual del patio de recreo, dan también la oportunidad de explotar una variante numérica jugando una especie de juego de puntería. El juego consiste en tirar una piedra plana de manera que caiga en una de las casillas de la rayuela, se gana la cantidad marcada en la casilla en la que ha caído la piedra o tejo; si el tejo queda entre dos casillas, es el jugador el que elige la casilla ganadora, si cae fuera de la rayuela, el jugador gana 0 puntos; se van anotando las jugadas en una hoja de papel para que no se olviden y poder hacer verificaciones posteriores, se juega en grupos de 3 ó 4 alumnos; gana el grupo que haya obtenido más puntos con un lanzamiento por jugador.




Son variables didácticas: el número de jugadores (cantidad de números a adicionar), los números escritos en las casillas (nivel numérico), la posibilidad o no de materializar en fichas lo obtenido en cada jugada (uso del conteo o del cálculo).

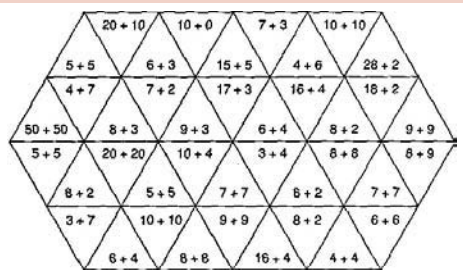
Una variante interesante del juego se produce cuando para ganar hay que obtener un número mayor o menor que uno dado de antemano, lo que obliga a los niños a ir recalculando en función de las jugadas y buscar una cantidad determinada en cada lanzamiento, en lugar de jugar al azar.

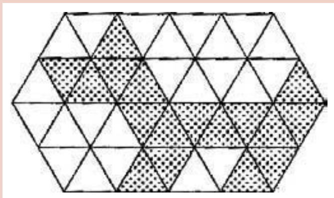
***El bingo*** no es a nuestro juicio utilizable en Educción Infantil, pero sí en Primaria. Las reglas del juego son las habituales; se van sacando números, que pueden estar escritos con expresiones aditivas o sustractivas, y se van marcando en el cartón si se tienen; el que antes rellene el cartón hace bingo y gana.



**Actividad 5:** Diseñar un bingo que trabaje el complemento a 10. Un número **a** se dice que es el complemento a 10 de otro **b**, si a + b = 10.

***Los coloreados*** y juegos de pachwork tradicionalmente han formado parte de los juegos y pasatiempos de los tebeos infantiles, por lo que basta con adaptarlos al objetivo matemático buscado. Coloreando de marrón todas las casillas en las que el resultado de la suma no termina en cero, y en amarillo todas aquellas cuyo resultado termina en cero, se obtiene la silueta de un perro:



El ejemplo, tomado de Ermel[7], permite ver cómo las escrituras han sido escogidas con un objetivo matemático claro: adicionar números de una y dos cifras, reconocer descomposiciones de decenas completas y sumar decenas.

**Actividad 6:** Dibujar un coloreado con al menos tres colores, y por tanto tres reglas de coloreado, que sirva para automatizar la suma de dobles, las distintas descomposiciones del 20 y la propiedad conmutativa de la suma.

[7] Ermel: *Apprentissages numériques*, CP, INRP-Hatier, Paris, 1991, 183.

# 7.6. Situaciones didácticas para la introducción de la adición

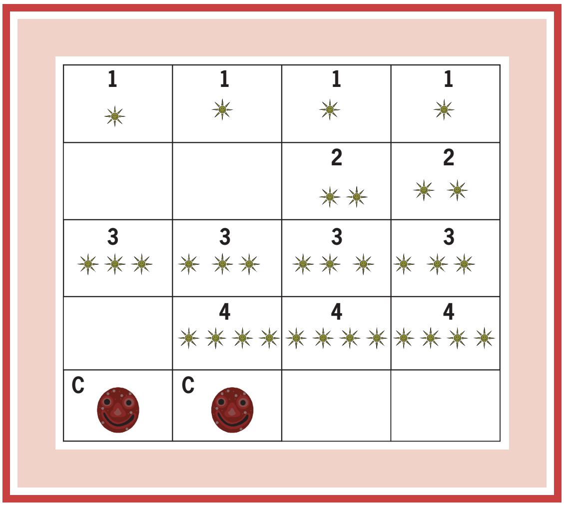
Algunas de las situaciones que propondremos están tomadas de Ermel[8] y de la obra de Francette Martin, cuya lectura recomendamos. Se trata, casi siempre, de situaciones que se trabajan en grupos reducidos de hasta 4 alumnos, y que forman parte de una serie de actividades, presentadas como situaciones problemas o juegos, que presentan algún desafío para el niño, y que requieren una búsqueda por su parte, pues de lo contrario no habría aprendizaje; estas actividades se retoman y abordan durante varios meses, hasta que los niños son capaces de ganar siempre. Todo educador de Educación Infantil sabe lo importante que es ser paciente y respetar los ritmos individuales de descubrimiento de cada niño.

## Juego del número marcado

*Edad*: 4 y 5 años.

*Material*: 14 cartas y 2 comodines.

Las cartas dependen del número escogido, el número marcado antes de empezar el juego. Así, si el número fijado es 6, las cartas, que pueden llevar solo el número, el número y la constelación correspondiente, o el número y la configuración de dedos podrían ser las siguientes:




[8] Ermel: *Apprentissages numériques. Grande section de maternelle*, INRP-Hatier, Paris, 1990.

*Desarrollo*

Se reparten dos cartas a cada jugador, el resto queda formando un montón en la mesa. En ningún momento del juego, el jugador puede tener más de dos cartas en la mano. Se juega por turnos.

Cada jugador, A, puede pedir al siguiente, B, la carta que necesita para hacer el número marcado (6 en nuestro caso), y éste debe entregarla si la tiene. En este caso, el jugador A marca 6 y gana, acabándose la partida. Si B no la tiene, A se descarta de una carta y coge en su lugar una del montón, pasando el turno al jugador B.

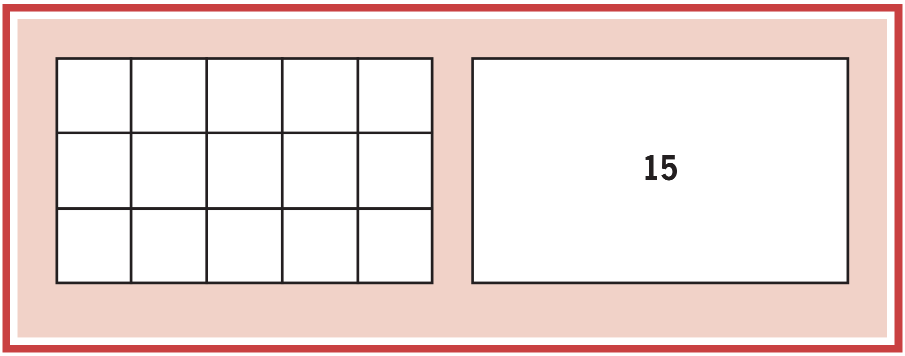
Son variables del juego: el número marcado, el número de cartas de cada tipo, las escrituras de las cartas, la existencia o no de comodines.

En nuestro caso, el juego trabaja la comparación de números, las distintas descomposiciones aditivas del 6, así como la automatización de sumas sencillas. Si el número marcado fuese mayor, por ejemplo 16 (para lo que hay forzosamente que cambiar las cartas del juego), la actividad va a permitir la aparición del sobreconteo como una buena estrategia para encontrar la suma de las dos cartas.

## Juego de sobres y papeles doblados[9]

*Edad:* 4, 5 y 6 años.

*Material*: 200 fichas de igual tamaño, 40 sobres, con un número del 1 al 10 marcado en el exterior (4 sobres por número) y papeles en los que están dibujadas cuadrículas como las siguientes:




[9] Martin, F.: *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle*, CRDP Aquitaine, Bordeaux, 2003, 59-60.

Las fichas deben poder colocarse dentro de cada celda. El papel debe estar doblado de manera que al exterior solo sea visible el número 15 en nuestro caso, pero la cuadrícula no (evidentemente, el número de casillas se corresponde con el número marcado).

Juegan 4 jugadores. Los papeles están extendidos encima de la mesa y sólo los números son visibles.

*Consigna*

«En la mesa tenéis varios sobres con fichas, la maestra coge un sobre, el 7 por ejemplo, lo abre y cuenta una a una las fichas: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Coge ahora otro sobre, el 2, lo vacía en la mesa y cuenta las fichas: 1 y 2.

En la mesa hay también papeles doblados con números. Coge el papel 8 y lo abre, muestra la cuadrícula que hay dibujada y cuenta las casillas: 1, 2..., 8.

Coged dos sobres y mirad bien sus números, las fichas las sacaréis más tarde. **Sin sacar las fichas,** debéis buscar el papel que tenga el número que corresponda a todas vuestras fichas. Después lo abriréis para ver la cuadrícula. Solo entonces podréis vaciar los sobres y comprobarlo. Si poniendo una ficha sobre cada casilla, **no sobra ninguna ficha, y ninguna casilla está vacía, habréis ganado.** Si quedan casillas vacías o sobran fichas es que no habéis escogido el número adecuado y habéis perdido».

Como se ve, el juego está diseñado para encontrar la suma de dos números conocidos, los que están escritos en los sobres, buscando el papel correspondiente. Se trata de una situación de acción que requiere como conocimientos previos el saber asignar un número a una colección ayudándose del conteo. Las colecciones de fichas sirven como representación material de la cantidad correspondiente a un número.

Una variable didáctica, fundamental en esta situación, es el hecho de tener que anticipar cuál es el «buen número» que conviene a la colección resultante de juntar las colecciones de los dos sobres, y eso sin tener acceso a la colección unión. Obsérvese que si la colección unión estuviese disponible, la situación podría ser resuelta usando simplemente como estrategia la correspondencia término a término; por eso, para bloquear esta estrategia y forzar el uso de la adición, el papel debe cogerse antes de juntar las colecciones.

La validación es interna, pues el niño puede saber, sin necesidad de la sanción externa del adulto, si ha ganado o no, para ello basta con que despliegue el papel para hacer aparecer la cuadrícula, y proceder por correspondencia uno a uno a rellenar las casillas, viendo si sobran o faltan fichas o si se cumplen las condiciones para ganar.

En el análisis *a priori* de la situación es necesario hacer una previsión de las estrategias posibles que el niño puede utilizar:

– Representar cada colección con los dedos y contar después el total. La estrategia funciona bien para números pequeños, en tanto que es compleja y provoca muchos errores para números cuya suma sobrepase 10, pues solo hay diez dedos. Por tanto, una manera de bloquearla en niños más mayores es usar números más grandes.

– Conteo de fichas imaginarias, punteando con el dedo cada una de las fichas que supuestamente habría en el sobre correspondiente a la unión. Esta estrategia solo funciona bien para números pequeños, o cuando puede hacerse un sobreconteo rápido con un segundo número muy pequeño.

– Sobreconteo. Se cuenta la primera colección con los dedos, y se continúa con la segunda. Algunos alumnos más avanzados parten directamente del número de una de las colecciones, usando los dedos para contar a partir de ahí la segunda. Ayudándose del calendario de la clase, para hacer 5 + 3, algunos niños van marcando con el dedo hasta llegar al primer número: 1, 2, 3, 4 y 5, a partir de ahí siguen avanzando tantos lugares como indica el segundo número. 1, 2 y 3, el resultado es el número al que se ha llegado en el calendario: 8 (obsérvese que este método, más que un sobreconteo, es en realidad un doble conteo ayudándose con el calendario).

**Actividad 7:** Diseñar actividades previas más sencillas que sean preparatorias para el juego anterior. Imagine variantes del juego anterior que puedan servir como actividades de refuerzo.

He aquí una de las once variaciones que la autora presenta del juego anterior:

### Cartas número y redondeles negros

*Edad:* 4, 5 y 6 años.

*Material:* cartas con un número del 1 al 10 en una de sus caras, y en la otra una colección de redondeles negros dibujados según el número correspondiente. Fichas situadas en un lugar alejado de la mesa de juego.

*Consigna y desarrollo*

Juegan 4 ó 5 niños. Las cartas número se disponen en la mesa de manera que el número sea visible. Cada niño coge dos o tres cartas, y «debe ir a buscar, en un solo viaje, la cantidad de fichas necesarias para poder poner una ficha encima de cada uno de los redondeles negros de las cartas, sin que falten fichas o sobren redondeles».

El juego está diseñado para asociar a una colección unión un número. Se requiere que el alumno sea capaz de anticipar la cantidad requerida, si bien la actividad puede ser resuelta con éxito sin necesidad de utilizar la suma.

**Actividad 8:** Estudiar las variables didácticas de la situación y las estrategias asociadas. ¿Por qué las fichas están lejos de la mesa? ¿Qué habría que modificar para que el alumno no pudiese usar el conteo?

## La carrera hasta 10

*Edad:* 3, 4, 5 y 6 años.

*Material:* una caja de fichas (alrededor de 30), cartones numerados del 1 al 4. Una caja para guardar las fichas ganadas.

*Consigna y desarrollo*

Juegan de 2 a 4 jugadores sentados en torno a una mesa. En el centro de la mesa se disponen los cartones boca abajo, con los números no visibles. Cada jugador, por turnos, saca una carta que deja descubierta delante de él, coge el mismo número de fichas y las guarda en su caja. El primer jugador que completa 10 fichas debe anunciarlo, verificando los otros jugadores que es cierto. Este jugador devuelve sus cartas a la mesa, gana un punto y sigue jugando. Si un jugador saca una carta que le hace sobrepasar 10, debe devolverla a la mesa y pasar su turno al siguiente jugador. El juego se termina tras un número de jugadas anunciado previamente, o cuando un jugador ha alcanzado un número determinado de fichas.

Este juego, cuyo objetivo es saber asociar una colección a un número y el cálculo de sumas de números del 1 al 4, admite muchas variantes que permiten adaptar el juego a diferentes niveles de desarrollo. Así, pueden variarse: los números de las cartas (del 1 al 10), el objetivo que se quiere conseguir (8, 12, 15...), la escritura de las cartas (usar constelaciones, clásicas o no para los números), la posibilidad de disponer de las fichas de la caja o no, el uso de algún material, como el ábaco abierto y arandelas para rellenar los alambres, etc.

**Actividad 9:** Estudiar las variables enunciadas más arriba y explicar cuáles determinan necesariamente un cambio de estrategia, y cuáles cambian los objetivos del aprendizaje.

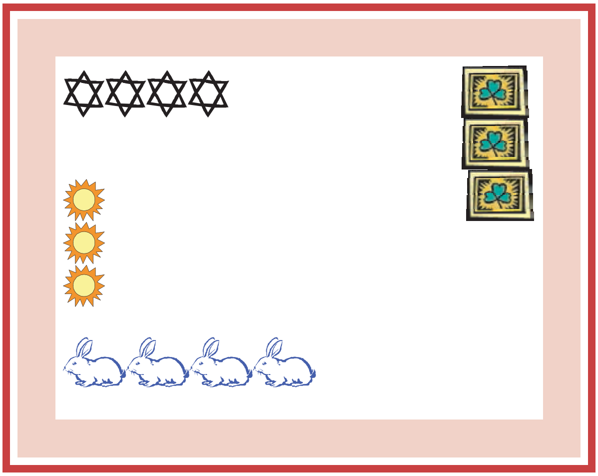
## Las felicitaciones de Navidad

*Edad*: 5 y 6 años.

*Material*: cartulinas con dibujos hechos con gomets, de los que solo está dibujada la silueta, con un máximo de 4 gomets de cada tipo. Cajas con gomets de los mismos tipos que los usados en los dibujos. Papel para los mensajes.

*Desarrollo y consigna*

Con motivo de la Navidad, los niños van a hacer felicitaciones para sus padres. La maestra distribuye a cada alumno una cartulina con un modelo que hay que realizar con gomets. Los niños trabajan en grupos de 4 en actividad de taller.



En un primer momento, cada niño debe encargar, mediante un mensaje escrito, el número de gomets que necesita y de qué tipo. Esta actividad de codificación, puede dar lugar a mensajes del tipo: 4 , 3 , 3 , 4  y es necesaria para la segunda parte.

En la segunda parte de la actividad, cada alumno recibe un mensaje en el que se le indica los gomets que puede usar y de qué tipo, para hacer su felicitación, por lo que se trata de una actividad de descodificación.

Después, un alumno de cada grupo debe hacer el pedido de gomets para todo el grupo.

En esta situación hay en realidad varias situaciones. La primera de ellas y la primera parte de la segunda tratan aspectos relativos a la simbolización, que son de gran interés en Educación Infantil, en tanto que la última parte es una situación propicia para el uso del sobreconteo y la adición de números pequeños.

Obsérvese que si en la consigna no se dice nada más, el alumno puede usar con éxito una estrategia distinta del sobreconteo o el cálculo.

**Actividad 10:** Estudiar las variables didácticas de las distintas situaciones y realizar el análisis *a priori*, detallando las estrategias posibles que el alumno puede usar. Cambie lo que sea necesario en la última parte para que sólo las estrategias del cálculo y el sobreconteo sean las óptimas.

## El solitario del 10

El niño dispone de las 40 cartas de la baraja que extiende sobre la mesa, colocando las cartas de dos en dos descubiertas (20 montones de dos cartas). Debe encontrar todas las cartas 10 visibles, así como todos los pares de cartas, también visibles y descubiertas, que sumen 10; las aparta a un lado una vez encontradas y vuelve a empezar con las otras 20 cartas visibles. El solitario termina cuando han salido todos los pares de cartas, o cuando el juego queda bloqueado (por ejemplo, si hay una carta 8 visible, y la única carta 2 que queda está tapada porque tiene otra encima).

**Actividad 11:** Detallar las posibles estrategias del alumno en este juego de solitario, indicando cuáles utilizan el cálculo y la adición con huecos.

## La buena cesta

Esta situación[10], como la mayoría de las expuestas hasta ahora, debe llevarse a cabo como taller a realizar entre 4 y 6 alumnos de entre 5 y 6 años. Se disponen sobre una mesa hojas en las que hay dibujadas cestas que llevan dentro huevos en cantidades diferentes. Cada alumno va a recibir una consigna que le indica cuántos huevos debe colorear y cómo debe colorearlos, del tipo siguiente:

3 , 2 

Una vez recibida la consigna, debe encontrar cuál de las cestas que están encima de la mesa es la que responde a sus necesidades (en nuestro ejemplo una que tenga 5 huevos). Solo puede empezar a colorear una vez que esté seguro de haber escogido la cesta adecuada. Gana si ha seguido la consigna y una vez coloreados los huevos no sobra ninguno.

Es evidente que, si la situación no se modifica, el niño puede resolver la tarea planteada de manera satisfactoria sin necesidad de usar la adición. Le bastará con contar 3 huevos y luego 2 más, por lo que la adición no sería necesaria.

[10] Briand, J. *et al.*: *Apprentissages mathématiques en maternelle* (versión en CD), Hatier Pédagogie, Paris, 2004.

**Actividad 12:** ¿Qué cambio de variables hay que operar en la situación para que el alumno esté obligado a anticipar la adición de los dos números? ¿Cómo podría transformarse la situación en una situación de formulación que diera lugar a la escritura simbólica de la adición?

Entre las variables didácticas de la situación están: el número de cestas entre las que escoger, el número de huevos que se van a colorear y la consigna.

**Actividad 13:** Una variante de la situación consiste en ordenar los dibujos de las cestas en cajas que llevan una etiqueta en la que está marcado el número total de huevos. ¿Qué cambios lleva aparejado este cambio de variable?

## 7.7. El cálculo pensado aditivo

El cálculo pensado es, desde nuestro punto de vista, de una enorme utilidad en la escuela, no busca la velocidad como los algoritmos del cálculo escrito, ni requiere la capacidad de concentración y memoria que necesita el cálculo mental, y sin embargo conserva la mayoría de las cualidades de este último. El cálculo pensado va a permitir a los alumnos familiarizarse con los números y las propiedades de las operaciones, y todo ello con un gran margen de maniobra y adaptación a los conocimientos particulares de los alumnos, que pueden aplicar aquellos resultados que saben. El cálculo pensado tiene por tanto un gran valor formativo, más que el cálculo escrito, si se piensa en la presencia de las calculadoras, capaces de realizar cualquier cálculo con más rapidez y fiabilidad que la mayoría de nosotros.

En este tipo de cálculo *se hacen malabarismos* con los números, y se aprovechan todas sus propiedades; se relaciona la numeración oral con la escrita, con la importancia que esto tiene en los primeros niveles, mejorándose la comprensión de la compleja numeración decimal; se mejora la atención y la concentración, cualidades nada desdeñables en cualquier aprendizaje, sea o no numérico, y todo ello con placer y motivación garantizada. Hay que pensar también que el alumno necesita disponer de algún procedimiento de cálculo antes de adquirir los algoritmos, que se adquieren muy tardíamente, que le ayude a sobrepasar el pesado conteo o sobreconteo.

Proponemos a continuación algunas estrategias sencillas de cálculo pensado aditivo, basadas en algunos casos en hechos conocidos, como la facilidad para automatizar sumas de dobles, y en propiedades que tienen su origen en el sistema de numeración decimal, en el que el número 10 juega un papel importante. En algunos casos hemos tomado números grandes para que se pueda apreciar la potencia de la técnica sugerida, sin que en ningún caso signifique que deba trabajarse con ese nivel numérico.

***Aprendizaje de dobles:*** 8 + 8, 5 + 5 ...

***Reconstrucción de sumas sencillas a partir de los dobles:***

8 + 9 = 8 + 8 + 1,
12 – 8 = (12 – 6) – 2 = 6 – 2 = 4

***Trabajo con el repertorio:***

– No se debe limitar al clásico.
– Presentación directa e inversa.

| | | |
|---|---|---|
| | 9 | |
| 7 + 1 = 8 | 1 + 8 | 8 – 7 = 1 |
| 7 + 2 = 9 | 2 + 7 | 8 – 1 = 7 |
| 7 + 3 = 10 | 3 + 6 | 7 + 1 =8 |
| .... | 4 + 5 | |

***Descomposiciones de 5 y 10:***

4 + 1, 3 + 2, 6 + 4, 7 + 3

***Descomposiciones con ayuda del 5:***

6 = 5 + 1, 9 = 5 + 4

***Transformación de cálculos simples:***

2 + 9 en 9 + 1 + 1,
21 – 19 en 19 + ? = 21

***Uso de la numeración oral para cálculos como:***

57 – 7, 10 + 17, de 30 a 39

***Uso de la numeración escrita:***

20 + 13  2d + 1d = 3d y 3u  33
48 – 20  4d – 2d = 2d y 8u  28

***Uso de diagramas en árbol:***

| | |
|---|---|
| 20 + 13: | 48 – 20: |
| 20 + 10 + 3 | 40 + 8 – 20 |
| 30 | 20 |
| 33 | 28 |

***Extensión a los repertorios de múltiplos de 10 y 100:***

2 + 3 = 5,  20 + 30 = ,  200+ 300=
4 – 2 = 2,  40 – 20= ,  400 – 200=

*Continúa*

*Continuación*

***Cálculo de a + 10 y a – 10 (con a < 10) por conteo y deconteo de 10 en 10:***
2 + 40 (2 / 12 / 22 / 32/ 42)
67 – 20 (67/ 57/ 47)

***Extensión a múltiplos de 10:***
Adiciones y sustracciones con múltiplos de 10:

| | |
|---|---|
| 10 + a, | 10 – a, |
| (n.10)+ a, | (n.10) – a |
| 10 + 2, | 10 – 8, |
| 20 + 2, | 20 – 8 |
| 30 + 2 | 30 – 8 |

***Trabajo con escrituras:***
Alargamiento y acortamiento...
48 + 76 = 40 + 8 + 70 + 6 = 40 + 70 + 8 + 6 = 110 + 14 =
= 100 + 10 + 10 + 4 = 100 + 20 + 4 = 124

***Paso a la decena o centena anterior o superior:***

| | | |
|---|---|---|
| 37 + ? = 40, | 40 – ?= 37, | para ir de 37 a 40 |
| 110 + ? = 200, | 300 – ? = 220, | para ir de 540 a 600 |
| 48 – ? = 40 , | 40 – ? = 300 | |

## 7.8. Los algoritmos

Aunque claramente los algoritmos no son abordables en Educación Infantil, sí nos parece interesante dar unas breves pinceladas sobre lo que el alumno va a encontrar en la Educación Primaria.

Las recomendaciones actuales sobre el trabajo con los algoritmos están muy alejadas de la idea tradicional que separaba cálculo y problemas. En la actualidad, el lenguaje simbólico asociado a la adición y sustracción, las escrituras aditivas y sustractivas, vienen motivadas por situaciones concretas que les dan sentido, asegurando siempre la comprensión, y realizando un aprendizaje que recorra el camino que va del lenguaje natural y las representaciones espontáneas del niño al lenguaje convencional de los símbolos.

Hoy está fuera de toda discusión que la enseñanza de las habilidades aritméticas debe ayudar a los niños a comprender los conceptos matemáticos, y no limitarse al aprendizaje memorístico de procedimientos y datos. Sin embargo, aunque no existen pruebas concluyentes sobre el efecto de los automatismos, autores como Resnick mantienen la idea razonable «de que al menos ciertas habilidades de cálculo –tablas y algoritmos sencillos– se deben desarrollar hasta llegar a un automatismo, para que no ocupen en la memoria de trabajo el espacio requerido por los procesamientos de mayor nivel en la resolución de problemas».[11]

Un dato importante, aportado por la investigación y los análisis empíricos, es que existen diferencias entre los procedimientos que se enseñan a los niños y los procedimientos más eficaces propios de un resolutor experto, por lo que deberían diseñarse actividades tendentes a asegurar una buena transición para pasar de unos procedimientos a otros.

Aunque nosotros defendemos el uso de los procedimientos informales, durante un buen tiempo y antes de la enseñanza de los algoritmos, nos parece justo enunciar aquí los inconvenientes que nosotros estimamos exagerados y magnificados, que algunos autores como Fisher encuentran en las Matemáticas informales:

1. Los conceptos desarrollados espontáneamente a través de estos procedimientos son muy primitivos, lo que supone una pérdida de economía.
2. Los procedimientos desarrollados son, a menudo, antieconómicos, torpes y pesados.
3. Pueden constituir un obstáculo para los aprendizajes escolares.
4. Los procedimientos informales refuerzan las concepciones matemáticas erróneas, obstaculizando el desarrollo lógico-matemático del niño.

Los procedimientos canónicos de cálculo son obtenidos como resultado de la transformación de los métodos artesanales de cálculo, más lentos e imperfectos pero más asequibles al alumno; el árbol de cálculo y la recta numérica en el caso de la adición, y el uso de distancias en el caso de la sustracción.

El cálculo pensado y el cálculo mental son el complemento previo y necesario para la construcción del algoritmo y pueden jugar ese papel de transición. El cálculo pensado tiene una gran capacidad de adaptación a las posibilidades de cada niño, tiene un valor formativo muy superior al cálculo automatizado, y es considerado por muchos como *el cálculo inteligente*. El cálculo mental, en estas edades, se limita al cálculo pensado.

La importancia de usar patrones numéricos para el aprendizaje del cálculo es evidente, las investigaciones de Lankford[12] probaron que:

1. Los patrones de pensamiento –estrategias de cálculo– que desarrollan los alumnos en su estudio de Matemáticas elementales están muy individualizados, y muchas veces no siguen los modelos ortodoxos de los libros de texto y del aula.

[11] Resnick, L. y Ford, W.: *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Paidós-MEC, Barcelona, 1991, 49.

[12] Citado por Resnick, L. y Ford, W.: *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Paidós-MEC, Barcelona, 1991, 108.

2. Se pueden observar diferencias entre las estrategias de cálculo de los alumnos que tienen éxito y los que no lo tienen.

3. Se pueden deducir indicaciones para la enseñanza de apoyo de las habilidades de cálculo a partir de la observación de los patrones de los alumnos que realizan mal los cálculos.

Otra de las conclusiones importantes del trabajo de Lankford es que los patrones de errores de los estudiantes, cuando usan lo algoritmos, reflejan una falta de comprensión fundamental en los procedimientos más que errores casuales, lo que nos lleva a la necesidad de hacer una construcción significativa de los algoritmos. Baroody[13] recoge los siguientes errores:

**Errores más importantes cometidos por los niños en el cálculo escrito**

– Dificultades de alineación por una mala o inconsistente colocación de las cifras.
– Errores sistemáticos por uso de procedimientos incorrectos, parcialmente correctos o inventados.
– Inconstancias, uso del procedimiento unas veces correctamente y otras no.
– Empleo mecánico de procedimientos aprendidos de memoria.
– Incapacidad para aprender procedimientos carentes de significado.
– Memorización incompleta o incorrecta.

Un aspecto importante que no debe ser olvidado es la estrecha relación que guarda la comprensión de los algoritmos con el sistema de numeración decimal. Todos los algoritmos usan, de una forma u otra, la noción de valor de posición, por lo que su comprensión es básica, en particular para entender el problema de las llevadas.

Finalmente hay que observar que existe más de un algoritmo de cálculo escrito para una operación dada, y que no siempre el que la escuela enseña es el más sencillo y comprensible; por ejemplo, el algoritmo usual de la sustracción, basado en el de Fibonacci, introduce la regla de compensación según la cual es lo mismo restar la llevada al minuendo que sumársela al sustraendo, y este pequeño matiz es suficiente para enmascarar el proceso, elevando, inútilmente, la dificultad de comprensión. Lo razonable para hacer por ejemplo $35 - 18$ es restar la llevada del minuendo, que es de donde ha salido:

$$\begin{array}{rcc} & 3 & 5 \\ - & 1 & 8 \\ \hline & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} & 3 & 10+5 \\ - & 1 & 8 \\ \hline & & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} & 3-1 & 5 \\ - & 1 & 8 \\ \hline & 1 & 7 \end{array}$$

[13] Baroody, A.: *El pensamiento matemático de los niños*, Visor, Madrid, 1988, 214-217.

## 7.9. Evaluación de competencias numéricas en Educación Infantil

Si admitimos que el conocimiento matemático, con independencia del nivel al que nos dirijamos, no se aprende por mera repetición, sino que, por el contrario, las competencias matemáticas se adquieren cuando el alumno resuelve situaciones problemáticas, esto debe llevarnos a plantear la evaluación de los conocimientos matemáticos de manera diferente a como se ha venido haciendo. No hay que olvidar que el conocimiento lógico-matemático tiene carácter transversal, y se manifiesta por tanto en actividades de índole muy diversa, y que la apropiación de conocimientos y útiles intelectuales por parte del alumno se hace de manera progresiva, en correspondencia con su descubrimiento del mundo que le rodea, lo que supone: anticipar sucesos y explicarlos, saber describir y cuantificar la realidad, elaborando representaciones simbólicas.

Si bien en todos los niveles es importante, en Educación Infantil es necesario tener muy presente cuáles son los conocimientos previos que tiene el alumno, pues hay que asegurarse de que cuando planteamos una situación nueva, el alumno posee los conocimientos necesarios para comprender la situación y tener la garantía de que se va a producir lo que la teoría de situaciones denomina *devolución*[14]. Además, si todo conocimiento debe estar contextualizado para ayudar al alumno a construir una representación del problema propuesto, hay que saber que en los niveles en los que nos movemos los conocimientos están, en consecuencia, muy contextualizados, aspecto que debe ser tomado en consideración en la evaluación.

La cuestión relativa al ritmo de aprendizaje es de suma importancia a estas edades, y es difícil pensar que los aprendizajes se produzcan de manera lineal dados los múltiples factores que concurren en él y que lo condicionan; por ejemplo, las experiencias familiares y sociales del alumno. Por ello, alumnos de la misma edad progresan a ritmos muy diferentes, lo que va a obligar no sólo a diseñar progresiones de aprendizaje individualizadas, sino a una evaluación muy personalizada que debe tener un claro carácter formativo. Pruebas estándar para todos los alumnos de una clase tienen poco sentido y, con frecuencia, la mera pero continuada observación del maestro/a suministra una valiosa información sobre las competencias que poseen la mayoría de los alumnos de la clase. La evaluación debe suministrar datos individuales que permitan diseñar y programar actividades de recuperación para ciertos alumnos e itinerarios diferentes para otros.

[14] Ver el capítulo 2.

Ante la evaluación cabe preguntarse siempre quién hace la evaluación, para qué se hace (diagnóstico, formativa, toma de decisiones sobre la organización de la clase, etc.), qué evaluamos (naturaleza de las informaciones que buscamos), destinatario (propio maestro/a, los padres, equipo de orientación, etc.) cómo (observación de trabajos, escucha de las respuestas orales de los alumnos, pruebas específicas, etc.) y cuándo (dos pruebas a lo largo de cada trimestre parecen suficientes dado que los periodos de aprendizaje en esta edad son bastante largos).

Presentamos a continuación una tabla resumen de los aspectos numéricos que hay que evaluar en Educación Infantil[15]:

| 3-4 años | 4-5 años | 5-6 años |
|---|---|---|
| **Saber decir:**<br>– Saber recitar la cantinela hasta 6-8 aproximadamente.<br>– Utilizar las palabras-número para designar cantidades. | **Saber decir:**<br>– Saber recitar la cantinela hasta el 9-12, más o menos, a partir de 1.<br>– Saber reconocer diversas representaciones de los números (dados, dedos...).<br><br>**Saber leer y escribir** (mostrar) los números hasta 5:<br>– Saber tomar referencias en la serie de números. | **Saber decir:**<br>– Saber recitar la cantinela hasta el 30, más o menos, a partir de 1, de dos en dos.<br>– Saber recitar hasta un número dado.<br>– Saber recitar la cantinela al revés.<br>**Saber leer y escribir** los números hasta el 9:<br>– Saber tomar referencias en la serie de números. |
| **Saber contar** hasta 4 (es decir, saber responder a la pregunta ¿cuántos?):<br>– Utilizar correctamente la cantinela.<br>– Utilizar con conocimiento las palabras: un poco, mucho, nada, bastante, falta, demasiado. | **Saber contar** hasta 10:<br>– Utilizar correctamente la cantinela orden estable (correspondencia término a término, no pertinencia del orden, principio de abstracción, principio de cardinalidad).<br>– Utilizar conscientemente los términos: un poco, mucho, bastante, falta, demasiado, tanto como, más que, menos que... | **Saber contar** hasta 15:<br>– Utilizar correctamente la cantinela (correspondencia término a término, no pertinencia del orden, principio de abstracción, principio de cardinalidad).<br>– Utilizar conscientemente los términos: un poco, mucho, bastante, falta, demasiado, tanto como, más que, menos que... |

*Continúa*

[15] Lemaire, P. *et al:* «Le développement des stratégies en situation de résolution en problèmes arithmétiques», en Bideaud, J. (dir.): *Le développement des activités numériques chez l'enfant*, Lavoisier, Paris, 2002, 205-207.

*Continuación*

| 3-4 años | 4-5 años | 5-6 años |
|---|---|---|
| | **Saber que el cardinal** permite memorizar la cantidad.<br>**Saber localizar o anticipar** por conteo una posición en una pista graduada.<br>**Saber reconocer situaciones aditivas** para resolverlas, reemplazando progresivamente el conteo por el sobreconteo.<br>**Saber resolver problemas** ligados al aumento y disminución de cantidades. | **Saber que el cardinal** permite memorizar la cantidad.<br>**Saber localizar o anticipar** por conteo una posición en una pista graduada.<br>**Saber reconocer situaciones aditivas** para resolverlas, usando preferentemente el sobreconteo en lugar del conteo.<br>**Saber resolver problemas** ligados al aumento y disminución de cantidades. |
| **Saber poner en marcha** un procedimiento (numérico o no) para:<br>– Comparar dos colecciones que tengan o no el mismo número de objetos, utilizando técnicas variadas (emparejamiento, estimación, reagrupamientos). | **Saber poner en marcha** un procedimiento (numérico o no) para:<br>– Comparar dos colecciones que tengan o no, el mismo número de objetos (más de diez), utilizando técnicas variadas. | **Saber poner en marcha** un procedimiento (numérico o no) para:<br>– Comparar dos colecciones que tengan o no, el mismo número de objetos (más de diez), utilizando técnicas variadas en una situación vivida o representada. |
| – Construir (o modificar) una colección para que tenga tantos (más o menos) elementos como una colección dada.<br>– Repartir colecciones.<br>**Saber verificar** una comparación, una construcción o una modificación usando procedimientos diferentes. | – Construir (o modificar) una colección para que tenga tantos (más o menos) elementos como una colección dada.<br>– Repartir colecciones.<br>– Hacer una distribución.<br>**Saber verificar** una comparación, una construcción o una modificación usando procedimientos diferentes.<br>**Saber reproducir** un procedimiento propuesto por el maestro o por un compañero. | – Construir (o modificar) una colección para que tenga tantos (más o menos) elementos como una colección dada.<br>– Repartir colecciones.<br>– Hacer una distribución.<br>**Saber verificar** una comparación, una construcción o una modificación usando procedimientos diferentes.<br>**Saber reproducir** un procedimiento propuesto por el maestro o por un compañero.<br>**Saber explicar** el procedimiento seguido. |

## 7.10. Bibliografía

Baroody, A.: *El pensamiento matemático de los niños*, Visor, Madrid, 1988.

Briand, J. *et al*: *Apprentissages mathématiques en maternelle* (versión en CD), Hatier Pédagogie, Paris, 2004.

Chamorro, M. C. (coord): *Didáctica de las Matemáticas. Educación Primaria*, Pearson, Madrid, 2003.

Dehaene, S.: *La Bosse des maths*, Odile Jacob, Paris, 2003.

Ermel: *Apprentissages numériques, CP*, INRP-Hatier, Paris, 1991.

—: *Apprentissages numériques. Grande section de maternelle*, INRP-Hatier, Paris, 1990.

Martín, F.: *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle*, CRDP Aquitaine, Bordeaux, 2003.

Pierrard, A: *Faire de mathématiques à l'école maternelle*, CRDP de l'Académie de Grenoble, Grenoble, 2002.

Resnick, L. y Ford, W.: *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Paidós-MEC, Barcelona, 1991.

CAPÍTULO 8

# Representación del espacio en el niño. El espacio como modelo de desarrollo de las distintas geometrías

Francisco Vecino

## Contenidos

## 8.1. Introducción

La inclusión de un tema como este en un currículo que pretende la introducción del pensamiento lógico-matemático en la Educación Infantil parece más que justificada por las constataciones siguientes:

– El niño está continuamente en contacto con ostensiones evidentes de los principales conceptos espaciales, sea en el entorno social que le rodea, sea en el entorno institucional escolar y, por ello, la génesis de las representaciones espaciales será una consecuencia inmediata de su relación con el ambiente que le rodea.

– La exigencia de un tránsito no traumático hacia la Educación Primaria exige, sin duda, el desarrollo precoz de diversas nociones y procedimientos que aseguren un dominio creciente de las relaciones que se establecen entre el individuo y el espacio, que conduzcan hacia una percepción del espacio complementaria con la formación del pensamiento lógico-matemático y que contribuyan al desarrollo de la representación espacial necesaria para modelizar adecuadamente los diversos conceptos geométricos.

– El carácter interdisciplinar de esta etapa de la educación convierte a la representación del espacio y a la geometría resultante en un comodín que puede ayudar eficazmente en la formación y en la configuración del pensamiento artístico, del pensamiento científico, del desarrollo corporal o del sentido musical. En definitiva se convertirá en un instrumento eficacísimo para la formación inicial del sentido estético en el niño.

> Todos estos hechos parecen imponer, en la educación espacial del niño, una línea de tratamiento que parte de la percepción que él mismo va generando del espacio circundante y del espacio de los movimientos propios o ajenos, que continúe con las posibles representaciones que se pueden derivar de la percepción espacial y que concluya con una modelización, organización y sistematización de tales representaciones para asegurar una transición hacia la geometría elemental.

Sin embargo, en el niño pequeño es muy difícil separar la percepción y la representación del espacio ya que una buena parte de las representaciones internas forman un todo unido con la percepción que provoca la visión de ciertos objetos o de ciertos movimientos. Por ello, parece aconsejable una organización del currículo que tenga en cuenta primero los principios básicos de la percepción y representación espacial y, después, la modelización del espacio a partir de los principios establecidos anteriormente.

## 8.2. Objetivos

– Proporcionar los principales elementos de epistemología genética relativos a la percepción y representación espacial.

– Diseñar el currículo referente a la percepción y representación espacial en el niño, a partir de las orientaciones generales de las distintas instituciones educativas.

– Proponer situaciones que puedan conformar el currículo correspondiente al desarrollo de la percepción y representación espacial.

– Proponer distintos registros semióticos para dar cuenta de la representación espacial correspondiente a diversas situaciones.

– Conocer los principales materiales didácticos y/o informáticos para el desarrollo de la percepción y representación espaciales.

– Diseñar el currículo referente a la organización espacial, a partir de las orientaciones generales de las instituciones educativas.

– Determinar las influencias que puede ejercer, en el niño, la talla del espacio a la que se le puede enfrentar en diversas situaciones.

– Proponer situaciones que tengan como objeto el desarrollo de la localización en el espacio, cambiando los sistemas de referencia correspondientes.

## 8.3. Consideraciones metodológicas particulares

El trabajo sobre un tema como este reviste unas características especiales que lo hacen un poco diferente al trabajo que se debe desarrollar en otros temas clásicos del currículo matemático de Educación Infantil. Por una parte, conviene desprenderse de ciertas concepciones, sobre el espacio o sobre la geometría, que el maestro ha ido formando a lo largo de su formación, para colocarse en el papel de un profesional de la enseñanza que debe hacer surgir las percepciones y representaciones que el niño va formando internamente. Por otra, conviene emprender una transformación del currículo oficial de forma que se dé cabida a una efectiva construcción del espacio precursora del desarrollo de las ideas geométricas.

Evidentemente, existen resultados de investigación que es preciso tener en cuenta para que, a partir de ellos, se trate de desarrollar el currículo que asegure la efectiva emergencia de la percepción y representación espacial del niño. Se impone también un trabajo especial sobre una serie de materiales que sirven para lograr un desarrollo inicial de la representación espacial y que, a la vez, sirven para asegurar un tránsito posterior hacia el dominio de las distintas geometrías necesarias para conformar un espacio coherente con la lógica matemática.

De acuerdo con lo anterior, el trabajo del maestro se tendrá que centrar en:

– La construcción de situaciones que aseguren la efectiva emergencia de las distintas percepciones y representaciones del espacio en el niño.
– El análisis de materiales didácticos para la percepción y representación del espacio, procediendo entonces a la transformación y desarrollo de los mismos para que efectivamente hagan surgir los principales elementos constituyentes de esas operaciones mentales.
– El diseño de un currículo que asegure una introducción del espacio previa a la construcción de la geometría elemental.

Para que ese trabajo dé resultados el maestro deberá emprender una serie de acciones metodológicas específicas que se podrían resumir así:

– El análisis, estudio y finalmente uso de materiales específicos que ayuden y contribuyan a una percepción amplia del espacio y al desarrollo de representaciones asociadas.
– El estudio y planteamiento del papel que la gestión adecuada de las variables didácticas, ligadas a cada material, pueden ejercer para una mejor representación del espacio.
– El trabajo en distintos tipos de espacio (micro, meso y macro), determinando desde un punto de vista psicológico y didáctico los tipos más adecuados para el desarrollo de conceptos espaciales en Educación Infantil.
– Una indagación sobre las ventajas que supone el uso de materiales geométricos específicos que aseguren la construcción de un espacio dinámico respecto al uso de materiales que imponen una visión estática y parcial del espacio.
– Un trabajo de estudio atento, análisis minucioso e interpretación libre del currículo (en manuales escolares, DCB y materiales varios) que asegure una efectiva introducción del espacio en el nivel de Infantil.

## 8.4. Consideraciones psicopedagógicas de la iniciación a la representación del espacio

A partir de las reiteradas citas que hacen todos los estudiosos sobre el tema, podemos considerar como punto de partida para la representación del espacio en el niño de Infantil y Primaria, sobre todo los trabajos de Piaget plasmados en dos de sus obras fundamentales: *La representation de l'espace chez l'enfant* (1947) y *La géométrie spontanée de l'enfant* (1948). Según el estudio de las ideas piagetianas sobre la representación del espacio que hace Lepecq[1] podemos considerar como hipótesis primordiales de su investigación las siguientes:

[1] Lepecq, J. C.: *Referentiels spatiaux et space des positions chez le jeune enfant*, tesis doctoral, Université de Paris 5, París, 1982.

– Las relaciones espaciales las expresa el individuo utilizando una geometría.

– A un espacio sensomotor inicial (0-24 meses) sigue un espacio representativo (2-12 años).

– Las relaciones topológicas son anteriores a las proyectivas y a las métricas en ambos tipos de espacio.

Las dos primeras hipótesis no han suscitado apenas controversia en la comunidad científica. Es más, existen estudios posteriores, sobre todo los de Vergnaud (1992), que enfatizan la importancia del estudio del espacio representativo, actualizando las ideas de Piaget al respecto. Es, sin embargo, la tercera hipótesis la que ha suscitado una discusión muy fuerte, desde Lovell y Page hasta Weist y Uzunov, pasando por críticas tan demoledoras como la de Darke[2]. De todo ello resulta:

– La importancia del estudio del espacio representativo como base para cualquier acción didáctica que pretenda basarse en unas sólidas referencias psicológicas.

– La consideración simultánea de los diversos tipos de geometría, resultado de la expresión de tal espacio, y por tanto la necesidad de no establecer *a priori* la preeminencia de ningún tipo de relación espacial sobre otro.

Partiendo pues del concepto de espacio representativo, introducido por Piaget y perfeccionado por Vergnaud (dentro de una teoría más amplia sobre la representación en general), se generan varias líneas de investigación que se organizan, principalmente, en cuatro epígrafes:

– La representación espacial.

– La percepción espacial.

– La organización espacial.

– La medida en el espacio.

Evidentemente y dada la procedencia común de todas ellas, tales líneas interaccionan entre sí haciendo imposible el estudio de cualquiera de ellas sin tener simultáneamente en cuenta las otras.

Consideraciones de tipo teórico sobre todo, pero también de tipo práctico, aconsejan, según veremos más adelante, organizar esas líneas de investigación en dos grandes capítulos: la percepción del espacio y la representación del espacio.

De esta forma y de acuerdo con los principales resultados de investigación en los cuatro campos citados anteriormente, se pueden proponer, dentro del

[2] Darke I.: *A review of research related to the topological primacy thesis*, *Educational Studies in Mathematics*, 13, 1982, pp. 119-142.

proyecto de un programa para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en la Educación Infantil dos apartados cuyo título sea, precisa y respectivamente, el de esas dos líneas de investigación mencionadas.

## 8.5. La percepción del espacio

Desde una posición inicialmente piagetiana Laurendeau y Pinard[3] evolucionan hacia una posición más avanzada, crítica con la posición de Piaget respecto a la jerarquización de las «geometrías», sosteniendo el sincronismo entre representaciones de tipo métrico y representaciones de tipo topológico. Al mismo tiempo Piaget y García[4], en una obra tardía del autor suizo, introducen tres tipos de análisis de las figuras por parte del niño, lo que determina tres tipos de percepción de las mismas: intrafigural, interfigural y transfigural. Diversos investigadores (Grize, Lepecq, Vecino) han manejado estos aspectos en sus estudios sobre el espacio y de tales estudios se puede obtener la caracterización de esos tres tipos de percepción:

– Intrafigural, fijándose en los relaciones internas de una figura, considerada como un ente independiente.

– Interfigural, fijándose en las relaciones externas entre diversas figuras.

– Transfigural, fijándose en las estructuras generales que determinan clasificaciones en distintas geometrías o en una misma geometría.

Vecino[5] hace una caracterización de los tres tipos de análisis a partir de un estudio cuidadoso de la obra de Piaget y García y de los estudios posteriores sobre el tema. Las especificaciones que se introducen aclaran bastante el panorama, desde un punto de vista didáctico:

> – Intrafigural (estaticidad, independencia, indescomponibilidad, incapacidad de medir, adireccionalidad).
>
> – Interfigural (dinamicidad, dependencia, componibilidad, posibilidad de medición, consideración de distintas direcciones).
>
> – Transfigural (diferenciación según invariantes, dependencia en base al espacio considerado, sistemas de medida, dirección, orientación y localización).

[3] Laurendeau, M. y Pinard, A.: *Les prèmieres notions spatiales de l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Paris-Neuchâtel, 1968.

[4] Piaget J. y García R.: *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Siglo XXI, Madrid, 1986.

[5] Vecino, F.: *Los aspectos métricos de la representación espacial en los primeros años de la escuela elemental*, tesis doctoral microfilmada, UNED, Madrid, 1996.

A partir de esta caracterización, se desarrolla una investigación que ha determinado, en los niños del periodo infantil (4 a 7 años), la existencia de una percepción del espacio que se mueve entre la intra y la interfigural.

Todo ello proporciona elementos más que suficientes para la proposición de un programa que trate de desarrollar las características esenciales del desarrollo de la percepción espacial en el niño de Infantil. De entrada, el ámbito del transfigural quedaría fuera de cualquier currículo, para las edades consideradas, por razones obvias de tipo ontogenético.

Por otra parte, en la tesis de Berthelot y Salin[6], se establecen las bases que justifican la proposición y la articulación de un programa sobre el tema. Estos dos autores sugieren toda una serie de proposiciones que determinarían la introducción de programas curriculares específicos para el desarrollo del espacio:

– La existencia de conocimientos espaciales pregeométricos.
– El desarrollo de tales conceptos antes (o simultáneamente) de los conceptos geométricos básicos.
– La conveniencia de introducir, en la escolaridad obligatoria, objetivos específicos al respecto.
– El establecimiento de contratos didácticos distintos según se trate de espacio o de geometría.
– La consideración de los conceptos fundamentales de la geometría como útiles para resolver problemas espaciales.

Las recomendaciones de las dos tesis mencionadas últimamente y los estudios de investigación anteriores nos dan pie para proponer una secuencia didáctica que trata de desarrollar los ejes para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos espaciales básicos, necesarios para el desarrollo posterior de la geometría elemental.

## 8.6. La representación del espacio

Las investigaciones del equipo de la profesora Bideaud[7], con niños de 5 a 6 años, muestran claramente cómo la representación del espacio se produce por una geometrización creciente en el curso del desarrollo cognitivo. Este equipo hace descansar esa geometrización progresiva en dos capacidades distintas:

[6] Berthelot, R. y Salin, M. H.: *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, tesis doctoral, Université de Bordeaux I, Bordeaux, 1992.
[7] Bideaud, J. *et al.*: *La représentation de l'espace*, I.N.R.P., Paris, 1980.

– La variación del impulso motor (interrupción o alargamiento de un trayecto).

– La interiorización de secuencias cada vez más largas.

A esas dos capacidades se añade la importancia creciente de las codificaciones gráficas o verbales simultáneas o sucesivas a la codificación motora.

Para representar el movimiento en el espacio a través de esas codificaciones, el niño utiliza verdaderos «teoremas en acto», como se puede rastrear en las investigaciones de J. Pères[8], lo que confiere una importancia crucial a dichas representaciones desde el punto de vista del desarrollo cognitivo a nivel espacial.

Otro punto de vista, complementario del anterior, nos lo ofrece Liben[9] con la clasificación de las representaciones espaciales en: «*productos espaciales*», «*pensamientos espaciales*» y «*memoria espacial*». Tal clasificación es sumamente útil para el estudio de las representaciones espaciales del niño de estas edades y, por tanto, proporciona elementos importantes para diseñar el currículo correspondiente.

De tales concepciones de la representación espacial deriva, seguramente, la codificación de la situación de los objetos, tema bastante arduo para los niños de Infantil y primeros cursos de Primaria ya que, según Lepecq[10], hay una serie de factores que dificultan la referencia espacial, factores que dependerían del tipo de sistema tomado (egocéntrico, exocéntrico o egocéntrico coordinado). La dificultad se incrementa si, como sugiere este mismo autor, se liga todo ello al cálculo relacional de Vergnaud.

Para la elaboración de la secuencia didáctica correspondiente debemos tener en cuenta:

– La significatividad de los signos elegidos para la representación.

– La significatividad de la elección del modelo y la significatividad del modelo obtenido, como acertadamente plantea D'Amore[11].

Tales extremos deben estar asegurados por una adecuada gestión de las variables didácticas correspondientes a las diferentes situaciones planteadas en la secuencia didáctica.

Resultan, sin duda, tremendamente clarificadoras, como justificación a la introducción de esa secuencia didáctica, las opiniones de Pecheux[12] sobre la representación espacial. Esta autora sostiene que:

---

[8] Pères, J.: *Tortue du sol-Logo à l'ecole maternelle* (Memoire de recherche), I.R.E.M. de Bordeaux, Bordeaux, 1987.

[9] Liben, L. S.: *Perspective-taking skills in young children: Seeing the world trough rose-colored glasses, Developmental Psychologie*, 14, 1981, pp. 87-92.

[10] *Ibidem*.

[11] D'Amore, B.: *La didattica della matematica con l'ausilio dei mezzi informatici, nella scuola dell'obbligo*, Compuscuola, 29, 1988, pp. 43-49.

[12] Pecheux, M. G.: *Le développement des rapports des enfants à l'espace*, Nathan, Paris, 1990.

– La construcción de diversos tipos de representación espacial se fundamenta sobre codificaciones varias de la realidad espacial.

– La práctica pedagógica debe ir preferentemente desde la toma de conciencia de los aspectos espaciales de un movimiento hasta la adquisición del vocabulario correspondiente.

Convencidos de la validez de tales afirmaciones, plantearemos una secuencia didáctica en la que el niño deberá realizar codificaciones y decodificaciones a partir de un lenguaje adoptado previamente y, por tanto, constituida por situaciones en que sea necesario manejar la vertiente simbólica de la representación, es decir, «la articulación simbólica de una sucesión de movimientos» (Vecino[13]).

## 8.7. Propuesta de secuencia didáctica para la construcción del espacio en Educación Infantil

### 8.7.1. La situación fundamental de la percepción y de la representación espacial

Conforme a los principios teóricos que hemos expuesto en el apartado 8.4., podemos formular las características que debería reunir una situación fundamental para el desarrollo de la construcción del espacio.

Esa situación fundamental debería reunir, para que se pudiese considerar como tal, las siguientes premisas:

– Debe estar compuesta por una serie de situaciones que traten de la construcción, reproducción y designación, de figuras sencillas (con ello se asegura una actividad inmersa en los tipos de percepción intra e interfigural).

– Debe proporcionar los medios para que el niño exprese externamente la representación interna elaborada a partir de las figuras propuestas.

– Debe prever un análisis de las designaciones producidas para que resulten significativas a efectos de representación espacial.

– Debe contener instrucciones precisas para que el niño proceda no sólo a la codificación de las figuras propuestas, sino también a la decodificación de figuras que han codificado sus compañeros.

[13] *Ibidem*, p. 261.

Consecuencia inmediata de la puesta en marcha de la situación fundamental que acabamos de caracterizar será la obtención de algoritmos de representación de una figura, lo que plantea de inmediato el problema de simplificación del algoritmo o de codificación optimal (aquella que se obtiene con el menor esfuerzo posible, en gasto, de movimientos elementales)[14].

La consecución de dicha codificación óptima es un trabajo didáctico de primer orden, ya que el futuro maestro podrá apreciar cómo el diseño de un conjunto de situaciones de construcción y reproducción de figuras que prevea una verdadera situación de formulación, montada entre iguales, da como resultado una serie de codificaciones que, previendo la formulación producida por los distintos individuos o grupos, conducirá inexorablemente hacia codificaciones cada vez más sencillas y, como resultado final, a la óptima.

Los resultados de la institucionalización de tal codificación se apreciarán inmediatamente cuando las situaciones prevean una decodificación posterior, ya que entonces el alumno de Infantil podrá apreciar la facilidad de decodificación que proporciona la codificación óptima obtenida en el proceso de formulación emprendido en la clase.

### 8.7.2. Criterios para la elección y utilización de materiales didácticos de desarrollo de la representación espacial

La representación espacial, planteada en los términos propuestos en las páginas anteriores, dificulta la elección y el manejo de los materiales didácticos adecuados para producir un resultado conveniente al respecto. Por ello, interesa que los maestros sepan cuales son la mejor elección y utilización posibles de los materiales didácticos que pueden encontrarse para la construcción del espacio primero y para la construcción de la geometría elemental después.

Así, en principio, el material didáctico debe reunir las siguientes condiciones:

– Autonomía del usuario: el usuario solo puede actuar indirectamente sobre él.

– Capacidad de responder a un lenguaje espacial previamente adoptado: el usuario maneja el material a través de un lenguaje previamente adoptado (con signos y gramática propia).

– Interacción con el usuario: el material responde inmediatamente a las órdenes emitidas por el usuario en el lenguaje previamente adoptado.

– Capacidad de programación: el usuario puede programar una representación determinada y ver el resultado una vez terminada la programación.

[14] Véase Vecino, F., *Ibidem*, p. 261.

Un material de este tipo se encuentra solo acudiendo a la tortuga de suelo Logo (de difícil implantación escolar por razones de coste principalmente) o al soporte informático del lenguaje Logo mucho más asequible y que se encuentra implementado en los computadores de muchos centros. Las posibles dificultades que pudiera plantear la actuación sobre el plano vertical quedan suavizadas, cada vez más, por la creciente familiaridad de los alumnos con toda una serie de juegos de computador que plantean el movimiento sobre un plano horizontal pero que obligan a trabajar sobre el plano vertical que determina el monitor del computador.

El paso de este material a otros posibles (tiras de mecano, palillos, geoplano, tangram, policubos, etc.) deberá producirse teniendo en cuenta:

– Las características del material nuevo.

– La adecuación, mayor o menor, del lenguaje adoptado al nuevo material.

– El previsible cambio de registro de representación semiótica que se producirá con la introducción del nuevo material (no es igual trabajar con tiras de mecano que con el tangram o el geoplano).

– La obligada traducción entre registros semióticos que se producirá, obligatoriamente, al cambiar el tipo de material.

– La codificación y decodificación de representaciones que se producirá en cada registro representativo adoptado.

Todos estos condicionamientos deben ser analizados, sopesados, enfrentados y adoptados al final para producir un desarrollo de la representación espacial que asegure un tránsito adecuado a la geometría que se deberá desarrollar posteriormente.

## 8.8. Un material fundamental: la tortuga Logo

Este material didáctico es ideal para el desarrollo de la percepción y representación espacial en los primeros años de escolaridad, ya que cumple todas las condiciones que se exigían en el punto anterior. El niño puede interactuar con él a través de un lenguaje que debe ser adoptado previamente en situaciones que le hagan sentir la necesidad de dotarse de un lenguaje específico para poder actuar con la tortuga.

El itinerario que habría que seguir para el uso de este material con los fines específicos que se plantean en este punto sería el siguiente:

1. La introducción de los movimientos elementales de la tortuga.
2. La designación de esos movimientos elementales.
3. La necesidad de usar tales movimientos.
4. La construcción paso a paso de figuras elementales usando para ello el lenguaje adoptado previamente.
5. La construcción de figuras elementales mediante programas construidos con las instrucciones elementales.
6. La decodificación de programas sencillos para asociarles una determinada figura elegida entre varias.

### 8.8.1. La introducción de los movimientos elementales de la tortuga

La asignación de los movimientos elementales de la tortuga a determinadas teclas del computador es un paso previo para poder trabajar sobre la percepción y representación del espacio. Este trabajo resulta obligatorio por los escasos conocimientos de lectoescritura que poseen los alumnos de los primeros niveles de Educación Infantil. Se recomienda asignar tales funciones previas a teclas que estén juntas y que sean de fácil acceso para el niño.

Como caso ejemplificador he aquí la asignación, en Logo, del movimiento de avance (av en abreviatura) de 10 unidades a la tecla f:

Para f
Av 10
Fin

Esto permite que cada vez que se teclee f, la tortuga haga un recorrido de 10 unidades hacia delante.

**Actividad 1:** Dado que se trata de un trabajo previo, asignar a algunas teclas, cerca de la f, los siguientes movimientos elementales de la tortuga: retrocede (re) 10, avanza 20, retrocede 20, gira a la derecha (gd) 90, gira a la izquierda (gi) 90, gira a la derecha 120 y gira a la izquierda 120.

El uso de esos movimientos se conseguirá limitando el uso del teclado a las teclas correspondientes. De esta forma los alumnos van descubriendo los distintos movimientos elementales que puede efectuar la tortuga, movimientos que les servirán más adelante para construir la representación de multitud de figuras elementales.

### 8.8.2. La designación de esos movimientos elementales

Las características de la situación fundamental correspondiente (véase la función simbólica en el capítulo 3) exigen que se planteen situaciones en que la confusión lleve a la necesidad de dotarse de unos términos que permitan salir de ella. Para ello, el primer paso se dará de modo que los alumnos confundan las teclas entre sí (ya el número de ellas provocará tal confusión). Para acentuar todavía más la necesidad de designarlas se pueden cubrir con papel adhesivo de forma que todas ellas adquieran el mismo aspecto. De esta forma, al pedir a un niño que haga que la tortuga realice un determinado movimiento, sentirá la necesidad de designar la tecla correspondiente para distinguirla de las demás.

La asignación de un signo a cada tecla para indicar un determinado movimiento de la tortuga no es una tarea fácil, y entre las distintas sugerencias que aportan los niños conviene guiarles para que elijan aquellas que a la larga causarán menos confusión. Por ejemplo, si unos eligen colores y otros flechas para designar esos movimientos, es conveniente guiarles hacia el uso del registro flechas que, a la larga, causará menos confusión que el de colores.

**Actividad 2:** Imaginar las posibles designaciones, mediante flechas, que se podrían atribuir a los movimientos av 10, re 10, gd 90 y gi 120. Es evidente que el movimiento gd 90 se utiliza para construir figuras en que aparezcan ángulos rectos, pero ¿para qué se introduce un movimiento como gi 120?

Se recomienda diseñar la situación de designación de los movimientos elementales de la tortuga agrupándolos por parejas cuyos miembros aparezcan asociados por tener una propiedad común. Por ejemplo, se puede introducir, para empezar, la designación de los movimientos av 10 y re 10, donde es evidente que la propiedad común es la igualdad de distancia recorrida.

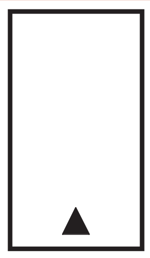
**Actividad 3:** Dadas las características de los ocho movimientos elementales considerados, ¿cuántas parejas se podrían considerar para llegar a designar los movimientos siguiendo esta recomendación?

### 8.8.3. La necesidad de usar tales movimientos

Una vez designados los distintos movimientos elementales de la tortuga será conveniente diseñar situaciones que induzcan al uso de tales movimientos.

Por ejemplo, una situación para destacar la conveniencia de usar el movimiento hacia atrás pueden ser la siguiente[15]:

Una vez que se ha introducido la necesidad de usar el movimiento de avance como estrategia óptima para resolver una situación diseñada a propósito, aparece en la pantalla un recinto rectángular y la tortuga está situada junto a uno de sus lados como indica la figura:



La maestra da la siguiente consigna: «Tienes que llevar la tortuga hasta el lado opuesto (lo puede indicar), sin tocarlo y de la forma más rápida (usando el menor número de teclas) y, a continuación, hacerla volver al punto de partida de la forma más rápida».

Evidentemente, es una situación a-didáctica que hace que el niño descubra el movimiento de retroceso como movimiento ideal para lograr realizar la segunda parte de la consigna que se le ha dado.

**Actividad 4:** Diseñar una situación a-didáctica que lleve al niño a descubrir la utilidad del movimiento de avance (es indiferente la longitud) por una parte, y la utilidad del movimiento de giro (es indiferente el sentido) por otra.

## 8.8.4. La construcción paso a paso de figuras elementales usando para ello el lenguaje adoptado previamente

Darse cuenta del significado de cada uno de los movimientos elementales de la tortuga, a partir de situaciones que se puedan resolver de forma óptima con el uso del movimiento correspondiente, constituye un paso importante para la construcción de figuras elementales y, por tanto, para la representación del espacio en primera instancia y, posteriormente, para la comprensión de la geometría elemental en todas sus variantes.

En efecto, el enfrentamiento del niño con el reto de tener que reproducir figuras elementales le conduce a cargar de sentido a cada uno de esos movimientos elementales. Será la gestión que haga el maestro de cada una de las variables didácticas implicadas la que ayudará al niño a construir una representación sólida del espacio, paso previo para la construcción de cualquier tipo de geometría.

[15] Situación sugerida en la tesis del autor, antes citada.

Entre esas variables didácticas podemos destacar:
– La longitud de los desplazamientos.
– La amplitud de los ángulos.
– El tipo de conectividad de los distintos segmentos dibujados.
– La orientación inicial de la tortuga en la pantalla.

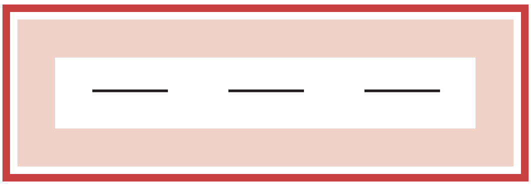
La gestión conjunta de esas variables proporciona una cantidad inimaginable de figuras a representar, lo que asegurará una buena representación del espacio si la práctica correspondiente es un ejercicio ritual en las clases de Infantil.

Conviene que las figuras que se van a reproducir estén siempre presentes delante del niño y que este las pueda ir construyendo paso a paso, colocándose cada vez en el lugar y con la orientación de la tortuga, de modo que pueda elegir el movimiento más conveniente. Esto no resulta siempre sencillo, sobre todo cuando se produce un cambio de orientación no deseado, y por ello se pueden esperar normalmente procesos mucho más largos que el proceso óptimo para dibujar una figura. Démonos cuenta de que, por ejemplo, para dibujar un cuadrado, el proceso óptimo requiere sólo 4 desplazamientos de igual longitud y 3 giros con 90° de amplitud. Un simple y muy probable giro en la dirección no deseada (posibilidad segura con niños que no pueden dominar la lateralidad por su edad temprana), provoca una desorientación que hace sumamente difícil, pero no imposible, el colocarse en lugar de la tortuga, lo que provoca una multiplicación de giros tendentes a colocar la tortuga en la dirección deseada en un principio.

Destacamos también que el manejo de la tercera variable citada y, por tanto, la reprodución de figuras discontinuas (por ejemplo, la que aparece a continuación) exige la introducción de dos nuevos comandos para la tortuga:

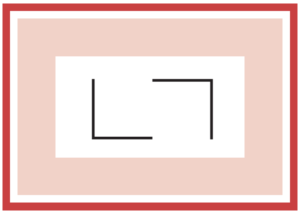
– Con lápiz (en abreviatura bl, de baja lápiz), que hace que se deje un rastro continuo sobre la pantalla mientras la tortuga se desplaza.

– Sin lápiz (sl, de sube lápiz), que hace que no se deje trazo mientras la tortuga se desplaza.



La introducción de estos dos comandos exigirá, por supuesto, un trabajo previo de asignación a unas teclas determinadas por parte del maestro, y la elaboración por parte del alumno de la designación correspondiente en situaciones que provoquen el uso y la necesidad de designar a esos dos nuevos comandos.

**Actividad 5:** Supuesta la asignación de 10 teclas, del teclado del computador, a los 8 movimientos elementales considerados hasta ahora y a las 2 posibilidades de colocación del lápiz, ¿cuántas teclas se tendrían que utilizar para realizar la figura siguiente?¿Cuáles?



### 8.8.5. La construcción de figuras elementales mediante programas construidos con las instrucciones elementales

En los primeros cursos de Infantil (3 y 4 años) la construcción de figuras elementales no puede ir más allá de lo expresado en el punto anterior. Sin embargo, en el último curso de esa etapa educativa, se puede avanzar y proponer a los alumnos la elaboración de pequeños programas de construcción de figuras, a partir de los movimientos elementales de la tortuga. Ello exigirá un esfuerzo de coordinación entre la figura propuesta y la representación mental que se haga el niño de la misma, para producir como resultado una representación externa, en forma de programa constituido por una sucesión de movimientos elementales que, una vez introducido en el computador, dará como resultado la reproducción de la figura propuesta.

Se trata de una tarea difícil, pero la consideramos muy importante para que el niño vaya construyendo una representación correcta del espacio, a partir de los movimientos elementales implicados. Los sucesivos intentos, con los previsibles fracasos intermedios, permitirán que el sujeto construya representaciones cada vez más acertadas.

Conviene, sin embargo, ser conscientes de las limitaciones de la tortuga Logo a la hora de reproducir figuras elementales. La reproducción de figuras con trazos curvos es prácticamente irrealizable en estos primeros niveles educativos por la complejidad de construcción de la curvatura en este lenguaje de programación. Por ello conviene usar este lenguaje como un material didáctico más, junto con otros que sirven para la introducción del espacio: bloques lógicos, mecanos, tangrams, caja de figuras de construcción, etc.

**Actividad 6:** Con las teclas introducidas hasta ahora y las designaciones correspondientes, crear un programa que sirva para construir un rectángulo cuya altura sea el doble de su base.

Se trata evidentemente de una actividad que tal como está propuesta se dirige a un público adulto. No debe ser menos evidente que a los niños se le propondría de forma distinta, es decir, dándoles dibujado un rectángulo que cumpliese las restricciones de medida impuestas y proponiéndoles la construcción del programa para dibujarlo.

### 8.8.6. La decodificación de programas sencillos para asociarles una determinada figura elegida entre varias

La codificación que supone la construcción de un programa para reproducir posteriormente una figura lleva asociada una decodificación posterior consistente en la asociación de una figura a un programa elegido entre varios dados.

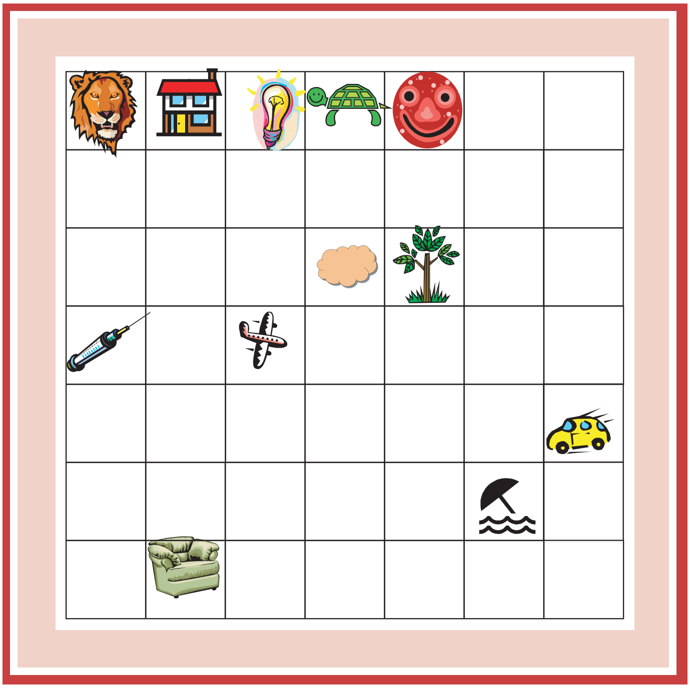
Solo un trabajo continuo y consistente en la elaboración de programas de reproducción de figuras puede asegurar una correcta decodificación posterior. Por ello sugerimos que se convierta en una actividad ritual, en el último año de Educación Infantil, el siguiente itinerario didáctico:

1. Elaboración de programas para reproducir una figura dada y siempre presente.
2. Introducción del programa en el ordenador para visionar el resultado.
3. Elaboración de nuevos programas si el resultado ha sido negativo.
4. Selección, entre varias, de la figura correspondiente a un programa dado.

## 8.9. El uso de otro material didáctico para la construcción del espacio: la cuadrícula

La cuadrícula es un material estrechamente ligado al material anterior, ya que con él se pueden introducir los mismos movimientos elementales que se han introducido anteriormente[16]. Se trata de un material que no cumple todas las condiciones a que aludíamos en 8.7.2., pero aun así puede servir para completar la construcción del espacio conseguida con Logo, sobre todo a efectos de representación, mediante signos, de los movimientos elementales del espacio.

Se recomienda empezar con una cuadrícula cuyas casillas estén ocupadas por fichas en que hay representados animales, plantas, casas, objetos diversos… El objetivo de la situación es ir de una casilla a otra mediante desplazamientos que se pueden indicar teniendo en cuenta la dirección, el cambio de dirección y la distancia. Si queremos que se usen movimientos elementares parecidos a los utilizados con la tortuga, habrá que imponer restricciones a los desplazamientos sobre la cuadrícula, por ejemplo, estableciendo que se pueden desplazar solo hacia delante y hacia los lados (derecha o izquierda), y prohibiendo el desplazamiento en diagonal y hacia atrás.



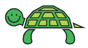
Una vez que se ha entendido la regla que acabamos de enunciar, cosa no fácil con niños de Infantil por el uso de terminología espacial-geométrica no in-

[16] Para obtener una visión más amplia de las posibilidades didácticas de este material se recomienda consultar: Chamorro, M. C.: «La cuadrícula», *Didáctica*, 2, 1990, 43-60.

troducida, se puede proponer la situación de desarrollo de la representación espacial. Esta situación debería diseñarse de modo que cumpliese las siguientes condiciones:

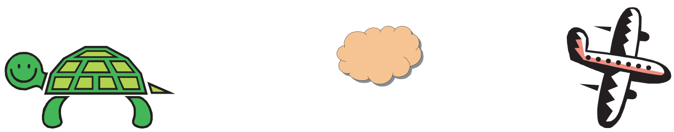
1. Se debe ir de una casilla a otra y, para indicarlo, se da solo la casilla inicial y la casilla final, cuyas fichas deben aparecer visibles en un lugar de la clase que no sea sobre la cuadrícula. El lugar de las mismas sobre la cuadrícula debe evidenciarse con alguna señal que se pondrá sobre la ficha correspondiente (por ejemplo, con gomets).

2. Para resolver la situación intervienen tres niños. Uno indica el camino que hay que recorrer, mediante indicación de los desplazamientos sucesivos que se van a realizar. El otro va recogiendo las fichas correspondientes (se dispone de suficientes fichas suplementarias e iguales a las del tablero) y las mantiene ordenadas (esto es también una suposición de lo que realizará el alumno, suposición absolutamente necesaria para controlar sucesivamente el resultado). El tercero comprueba, ante sus dos compañeros y recolocando las fichas, si el recorrido lleva de la casilla inicial a la casilla final.

Por ejemplo, se da como casilla inicial:  y como casilla final: 

El primer niño que indica el camino dice, por ejemplo: abajo, abajo, izquierda, abajo (se entiende que con *abajo* se indica *avanzar una casilla en ese sentido* y que con *izquierda* se entiende *avanzar una casilla en ese otro sentido).*

El segundo construye la colección ordenada de fichas:



(se entiende que en los huecos de esta serie faltan las fichas que irían en las casillas correspondientes).

El tercero, con esa colección de fichas ordenadas, comprueba si se ha recorrido el camino propuesto.

3. Se dan las mismas casillas inicial y final a diversas tripletas de niños. De este modo se obtendrían:

– Designaciones orales de los caminos, constituidas cada una de ellas por la ficha inicial (casilla inicial), los movimientos sucesivos que llevan a la ficha final y la misma ficha final (casilla final).

– Designaciones icónicas de los caminos, constituidos por la sucesión de fichas ordenadas que han ido recogiendo determinados actores de la situación a medida que van oyendo a los correspondientes compañeros.

– A cada designación oral corresponde una designación icónica con la que el tercer actor de cada tripleta reconstruye el camino.

– Se producen una constatación colectiva de todo el grupo-clase: hay muchos caminos distintos para ir de una casilla a otra.

Si la situación se propone según la modalidad descrita, la designación oral queda implícita en cada terna de alumnos y, por tanto, no queda rastro de ella, por lo que tal situación puede servir solo como situación inicial.

**Actividad 7:** ¿Qué habría que exigir a los alumnos para obtener una primera designación descriptiva del camino de la que quedará rastro? ¿Qué posibles designaciones de los movimientos elementales se podrían obtener entonces de los alumnos? ¿Qué dos tipos de designaciones del recorrido se obtendrían una vez adoptado un determinado registro de designación para los movimientos elementales?

Dada la multiplicidad de caminos que se pueden describir para ir de una casilla a otra la situación se completaría imponiendo una nueva condición: que el trayecto recorrido fuese el más corto.

**Actividad 8:** ¿Cuántos caminos distintos se obtendrían en este último paso? ¿Cómo serían entre sí los caminos obtenidos?

## 8.10. Orientación y localización en el espacio

En la propuesta de situaciones para la representación del espacio en el niño no debe faltar, además de lo visto hasta ahora, toda una serie de actividades sobre orientación y localización. En este punto expondremos las líneas generales por las que deben discurrir tales situaciones, ya que volveremos sobre el tema más adelante cuando tratemos la geometría proyectiva.

La percepción del espacio da lugar a términos lingüísticos para indicar el lugar o la orientación de los diversos entes contenidos en el mismo. Normalmente esos términos se agrupan por parejas de expresiones contrapuestas, que a su vez pueden ser absolutas o relativas según haya o no un elemento de referencia. Veamos las principales:

Contraposiciones absolutas:

arriba-abajo

sobre-bajo

cerca-lejos
delante-detrás
a la derecha-a la izquierda
Contraposiciones relativas:
encima de-debajo de
a la derecha de-a la izquierda de
más cerca que-más lejos que
delante de-detrás de

Además existen términos relativos sin contrapuestos como son: entre, en medio de, de frente a, al lado de, en el centro de, etc.

Las situaciones que dan lugar al uso de estos términos se deben desarrollar en la vida diaria de la escuela en todos los ambientes donde se desarrollen actividades en las que intervenga el propio niño: en las actividades de psicomotricidad, en el recreo, en la clase, en el comedor, etc., pero además en situaciones de clase propuestas al niño en un medio en el que no se ve inmerso desde un punto de vista espacial: en sus dibujos, en la colocación de los materiales, en retahílas recitadas, en fotografías, etc.

Dada la complejidad de los términos espaciales conviene, sin embargo, tener en cuenta algunas precauciones a la hora de diseñar situaciones:

– En general el niño tiene menos dificultad en adquirir el lenguaje correspondiente a los términos absolutos que a los términos relativos, ya que estos últimos exigen siempre tener en cuenta un elemento de referencia.

– Estos elementos referenciales, por su parte, pueden estar orientados (el niño, un coche, la clase, un animal, etc.) o pueden carecer de orientación (un balón, un bloque lógico, una farola, etc.), lo que determina una mayor o menor complejidad de resolución de las situaciones según los elementos referenciales que se hagan intervenir en ellas.

– En el plano horizontal es preciso tener en cuenta orientaciones implícitas. Normalmente el referente natural es el cuerpo del niño. Las complicaciones surgen cuando intervienen otros niños u objetos orientados, ya que entonces existen distintas posiciones según el elemento de referencia que se sobreentienda.

– Las representaciones de la realidad (dibujos, fotografías, maquetas, etc.) suponen una gran dificultad a la hora de determinar las posiciones de los distintos elementos que intervienen ya que, aparte de las relaciones establecidas entre los elementos que intervienen, hay que tener en cuenta la intervención de un elemento de referencia móvil: el espectador de esa representación. Se deben añadir además las características propias de la representación utilizada (estilización, perspectiva, abstracción, etc.) que suponen un añadido de complejidad para la interpretación espacial por parte del niño.

Cada una de estas precauciones determina ciertas variables didácticas, absolutamente necesarias a la hora de diseñar situaciones para una correcta representación del espacio en el niño. Entre esas variables podemos citar:

– La posible existencia de elementos referenciales.
– El tipo de orientación de los mismos.
– El plano en que se plantea la situación.
– La cantidad de elementos que intervienen.
– El tipo de orientación de esos elementos.
– El tipo de representación de la realidad utilizado.

## 8.11. Bibliografía


ALSINA, C.; BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.: *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis, Madrid, 1988.

BOULE, F.: *Manipular, organizar, representar*, Narcea, Colección Primeros pasos, Madrid, 1995.

CHAMORRO M. C. y BELMONTE J. M.: *El problema de la medida*, Síntesis, Madrid, 1991.

—: *Iniciación a la lógica matemática. Jugar y pensar 1 y 2*, Alhambra-Longman, Madrid, 1966.

HOLLOWAY, G.E.T.: *Concepción del espacio en el niño según Piaget*, Paidós-Ecuador, Buenos Aires, 1969.

VECINO, F.: *Los aspectos métricos de la representación espacial en los primeros años de la escuela elemental* (tesis doctoral), U.N.E.D., Madrid, 1996.

—: «Aspetto semiotico delle rappresentazioni spaziali del bambino», *La matematica e la sua didattica*, 3, 1997, 272-288.

—: *La representación del espacio en la transición de la escuela infantil a la escuela primaria*, UNO, 1997, 93-107.

ZIMMERMAN, G.: *Activités mathématiques a la maternelle*, Nathan, París.

CAPÍTULO 9

# El espacio como modelo teórico para el desarrollo de las geometrías. Situaciones de introducción a las mismas

Francisco Vecino

## Contenidos

## 9.1. Introducción

Una revisión de la historia reciente de la Geometría como objeto de enseñanza obliga a tener en cuenta los dos hechos siguientes:

– La exclamación de Dieudonné[1] «*¡Abajo el triángulo!*», marcaría decisivamente la orientación de los programas oficiales y la enseñanza de la Geometría en cualquier nivel de enseñanza durante los años sesenta. La radicalidad de la propuesta, o la interpretación radical de la misma, impulsa a la mayoría de las orientaciones oficiales a excluir la Geometría como objetivo prioritario de enseñanza en los distintos niveles de la educación.

– El ICME[2] del 1976 registra la intervención de un geómetra (Atyiah) que determinaría el regreso de la Geometría a su estatus de objetivo prioritario de enseñanza en los distintos niveles de educación. De su intervención recogemos el siguiente párrafo, decisivo por los cambios que produciría: «Habéis destronado a Euclides y en eso estamos de acuerdo. Pero ¿cómo habéis sustituido la enseñanza de la Geometría? La Matemática que se enseña en la mayor parte de los países está todavía más alejada de la realidad, pues carece del apoyo geométrico. Daos cuenta de que la intuición geométrica sigue siendo la fuente más poderosa para la comprensión de muchos temas; y por tanto se debería estimular lo más posible, y en todos los niveles escolares, el pensamiento geométrico»[3].

Como consecuencia de esta intervención y de otras de parecido talante se produce un cambio de orientación. No solo provoca la reaparición de la Geometría entre los objetivos prioritarios de la enseñanza de las Matemáticas, ade-

[1] Esta exclamación de Dieudonné, insigne matemático francés, se oye en el seminario organizado por la OECE (Organización Europea de Cooperación Económica) en Royamont (Francia), en el ya un tanto lejano 1959, para coordinar los programas de Matemáticas de los distintos países. No se trata de una exclamación individual, es una exclamación apoyada por toda una serie de representantes del «saber sabio» no menos ilustres que su portavoz, allí estaban apoyándole otros matemáticos como Choquet, Stone…

[2] Este congreso (Congreso Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas) contribuye a agitar las tranquilas aguas en que se había emplazado la enseñanza de las Matemáticas. Debemos tener en cuenta que se celebra en un momento en que los programas oficiales de enseñanza no se habían visto afectados por el torbellino de mayo del 68 (quizás el movimiento revolucionario no veía la transformación de la enseñanza de esa disciplina como un objetivo prioritario al considerarla sumamente abstracta).

[3] Este párrafo de la intervención de Atyiah lo recoge Emma Castelnuovo en: Castelnuovo, E.: «Enseñanza de las matemáticas: lo que es invariante en un mundo que cambia», *Uno*, n.º 12, 1997, pp. 29-36.

más se emprende un movimiento más general que desplaza casi totalmente a la llamada *Matemática moderna* del lugar preferente y casi exclusivo que detentaba en los programas escolares.

En particular, en el nivel de Educación Infantil, provoca la entrada, a escala universal, de una visión más amplia de la geometría que incluye la introducción de los distintos tipos de geometría que, según las investigaciones psicológicas y didácticas más recientes, conforman los preconceptos de los niños de ese nivel, modificando de paso las ideas piagetianas sobre la jerarquización de las geometrías tan en boga en el periodo a que nos hemos referido.

## 9.2. Objetivos

– Proporcionar los principales elementos de epistemología genética para la modelización del espacio a través de los distintos tipos de geometría.

– Diseñar el currículo referente a la organización espacial, a partir de las orientaciones generales de las instituciones educativas.

– Determinar las influencias que puede ejercer en el niño la talla del espacio a la que se le puede enfrentar en diversas situaciones.

– Desarrollar el currículo mediante la proposición de situaciones que sirvan para introducir los principales elementos de la geometría elemental dentro de la representación espacial anteriormente introducida.

– Proponer situaciones que pretendan el desarrollo de la localización en el espacio, cambiando los sistemas de referencia correspondientes.

– Diseñar situaciones para una introducción propedéutica de las transformaciones geométricas planas en la Educación Infantil.

– Conocer los principales materiales para la introducción de las primeras ideas geométricas en la escuela.

– Adquirir los conocimientos y destrezas necesarios para diseñar materiales didáctico-geométricos que sirvan para la introducción de las distintas geometrías.

## 9.3. Consideraciones metodológicas particulares

La introducción didáctica de las distintas geometrías en el nivel de Educación Infantil exige al maestro un esfuerzo de revisión y cambio de las concepciones que seguramente ha incubado, en su itinerario formativo o profesional, sobre la Geometría. Esa línea de cambio de concepciones exige un esfuerzo de transformación del currículo oficial. Tal cambio debe servir para organizar la confusa proposición curricular sobre la Geometría y debe proporcionar la posibilidad efectiva de que en la Escuela Infantil se produzca una introducción a los distintos tipos de geometría. De ese modo se provocarán distintas aproximaciones perceptivas o representativas al espacio y a su organización posterior.

De acuerdo con lo anterior, el trabajo del maestro se tendrá que centrar en:

– La adquisición de los conocimientos básicos que determinan la configuración de los tres tipos principales de geometría que se deben introducir en la escuela infantil: la geometría topológica, la geometría proyectiva y la geometría métrica.

– La construcción de situaciones que aseguren la efectiva emergencia de las distintas geometrías y de los elementos que las caracterizan.

– El análisis de materiales didácticos para la introducción de las distintas geometrías, transformándolos si fuera preciso para que sirvan en el desarrollo de la geometría particular que se trate de desarrollar con ellos.

– La construcción de materiales para el desarrollo de conceptos ligados a las distintas geometrías que respectivamente modelizan aproximaciones distintas al espacio.

– El diseño de un currículo que asegure una introducción de los distintos tipos de geometría.

Para que ese trabajo dé resultados, el maestro deberá emprender una serie de acciones metodológicas específicas como las siguientes:

– El análisis, estudio y, finalmente, uso de materiales específicos que ayuden y contribuyan a la introducción de las ideas geométricas ligadas a cada tipo particular de geometría.

– El estudio y planteamiento del papel que la gestión adecuada de las variables didácticas, ligadas a cada material, pueden ejercer para una modelización adecuada del espacio a través de una geometría particular.

– El trabajo en distintos tipos de espacio (micro, meso y macro), determinando desde un punto de vista psicológico y didáctico los tipos más adecuados para el desarrollo de conceptos geométricos en Educación Infantil.

– Una indagación sobre las ventajas que supone el uso de materiales geométricos específicos que aseguren la construcción de una geometría dinámica, respecto al uso de materiales que imponen una visión estática y parcial de la geometría.

– Un trabajo de estudio, análisis e interpretación del currículo (en manuales escolares, DCB y materiales varios) que asegure una efectiva introducción de las distintas geometrías en el nivel de Infantil.

## 9.4. Consideraciones psicopedagógicas para la introducción de las primeras ideas geométricas

La mayoría de los autores sostienen que los niños se sumergen en el espacio que les rodea, expresando sus relaciones con él de formas diversas (topológicas, proyectivas o métricas), sin que se pueda establecer claramente una preeminencia de una forma de relación sobre otra. Una gran parte de las críticas a Piaget se centra precisamente en esto:

> No existiría un tipo de modelización del espacio que fuese previo a otro, si acaso existen determinados conceptos (topológicos, proyectivos o métricos) que aparecen, en el niño antes que otros, sin que haya sido determinado claramente un orden preciso de aparición.

Según señala Fiol[4], las preguntas claves que hay que plantearse, para realizar un replanteamiento de la enseñanza de la Geometría, son las siguientes: «¿Cómo construyen (los niños) y actualizan su comprensión del espacio?, ¿cómo identifican, reconocen propiedades y clasifican diferentes formas?, ¿cómo desarrollan sus representaciones externas o internas –pensamiento visual–, de forma que resulten potenciadoras de lo creativo?».

La mayor parte de las directrices didácticas que se deberán adoptar dependerá de la reflexión que se haga sobre estas preguntas y de las consiguientes respuestas. Esas reflexiones nos llevarán a la consideración de una serie de exigencias como las siguientes:

> – Planteamiento de una geometría dinámica.
>
> – Tratamiento de distintos tipos de geometría.
>
> – Introducción de situaciones de localización para el desarrollo del espacio modelizador de ciertos tipos de geometría.
>
> – Prever la talla del espacio, para el planteamiento de situaciones didácticas específicas.
>
> – Introducción de las transformaciones geométricas como elemento potenciador de la introducción dinámica de la Geometría.

[4] Fiol, M. L.: *Proyecto docente para T.U.*, Bellaterra, UAB, 1996.

## 9.5. Propuesta de secuencia didáctica para la introducción de las distintas geometrías en Educación Infantil

Consecuencia inmediata de esa construcción de la representación del espacio en niños de edad temprana es la introducción de una geometría que deja de estar uniformemente centrada en los aspectos métricos, para diversificarse en otra serie de aspectos (topológicos, proyectivos y, por supuesto, métricos también) que darán lugar a una consideración de los diversos tipos de geometría introducidos por las ideas clasificatorias de Klein[5] y desarrollados en las construcciones teóricas matemáticas. La escuela piagetiana puso de manifiesto que los invariantes característicos de dichas geometrías aparecían en las primeras representaciones espaciales del niño, y por eso proponemos una línea didáctica que pase por la construcción de un espacio representativo y desemboque en la introducción de los tres tipos de geometría que se pueden detectar en la representación espacial del niño pequeño: la Geometría topológica, la Geometría proyectiva y la Geometría métrica.

Cada uno de estos tres tipos de geometría viene caracterizado por una serie de invariantes.

Los invariantes que caracterizan la Geometría topológica son:

- El tipo de lugar geométrico: abierto o cerrado, con la consiguiente determinación de distintas regiones en el espacio: interior, exterior y frontera.
- Continuidad o discontinuidad del lugar geométrico.
- Orden entre los elementos del lugar geométrico.
- Tipo de conexión entre los elementos del lugar geométrico.
- Tipo de compacidad del lugar geométrico.

Los principales invariantes que caracterizan la Geometría proyectiva son la orientación y la localización en el espacio, invariantes que se traducen en términos como:

[5] Geómetra alemán de finales del siglo XIX que en su Programa de Erlangen hace una clasificación de la Geometría en diversas Geometrías, caracterizadas por una serie invariantes propios. Surgen así la Topología, la Geometría proyectiva, la Geometría afín y la Geometría métrica.

delante-detrás
encima-debajo
sobre-bajo
derecha-izquierda
entre
al lado
enfrente

Los invariantes que caracterizan la Geometría métrica son:

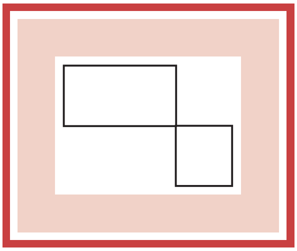
– La medida de segmentos, superficies o volúmenes.
– La medida de los ángulos (la perpendicularidad, el paralelismo).
– La forma.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que la Geometría métrica comprende todos los invariantes de las otras dos, y que la proyectiva comprende los invariantes topológicos, es decir, que la representación de una figura en la Geometría métrica incluye sus características proyectivas o topológicas. Así mismo, la representación de una figura en la Geometría proyectiva incluye sus características topológicas pero no así sus características métricas. Por último, la representación de una figura en Geometría topológica tiene solo en cuenta sus rasgos topológicos y no sus rasgos proyectivos o métricos.

Con todo y según lo expresado en 9.4., debemos tener en cuenta que, en la mente del niño, se desarrollan simultáneamente los tres tipos de geometría, a pesar de la construcción matemática que implica esa inclusión secuencial desde la Geometría métrica a la topológica. Por tanto, desde un punto de vista pedagógico, es recomendable la propuesta indistinta de situaciones en que se introduzcan conceptos topológicos métricos o proyectivos aunque nosotros optemos aquí por una presentación en apartados separados, en aras de una mayor claridad expositiva.

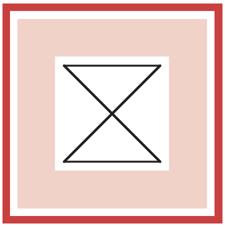
### 9.5.1. La introducción didáctica de invariantes topológicos

De entrada destacar que en una figura dada aparecen mezclados varios de esos invariantes y que, por tanto, la representación correcta de la misma debe considerar simultáneamente todos ellos. Así, la figura:



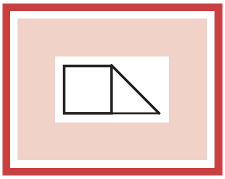
es continua, formada por dos figuras continuas y cerradas con un punto de conexión que las liga.

Desde un punto de vista topológico sería equivalente a:



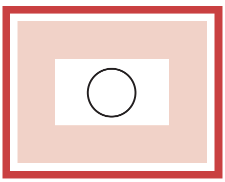
ya que las características topológicas son las mismas.

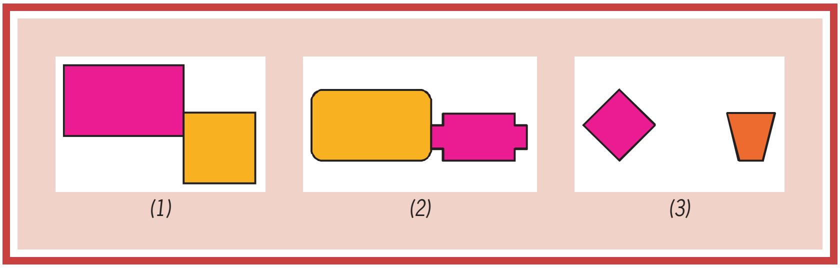
Sin embargo, no sería equivalente a



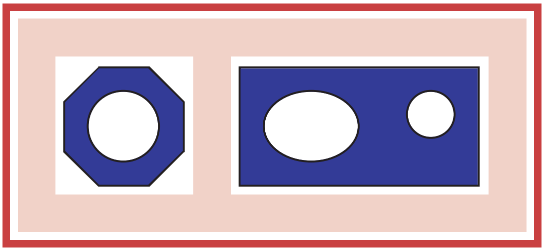
porque aquí las dos figuras cerradas tienen una línea en común, no un solo punto.

Ni tampoco a la figura siguiente, porque aquí hay una sola figura cerrada y no dos:






Ahora, los dos primeros lugares (1) y (2) (constituidos cada uno de ellos por una superficie morada y otra amarilla) son topológicamente equivalentes ya que son dos espacios compactos y conexos por una frontera común. No así el último (3) formado por dos compactos no conexos (el cuadrado malva y el trapecio naranja).



Estas dos últimas figuras no son topológicamente equivalentes ya que son dos compactos pero en uno hay un agujero y en el otro dos.

Por tanto, dos figuras son topológicamente equivalentes si presentan los mismos invariantes topológicos.

Como vemos, para determinar la equivalencia topológica se miran solo los invariantes citados y no otros (forma, medida, orientación, etc.) que no son pertinentes en este tipo de geometría. De esta forma se desarrolla un tipo particular de geometría llamada Topología, muy importante desde el punto de vista de la construcción del espacio, en los niveles de Educación Infantil y Primer Ciclo de Primaria.

#### 9.5.1.1. Materiales didácticos para la introducción de invariantes topológicos y situaciones correspondientes

Hay una serie de materiales con los que se pueden introducir los invariantes topológicos, aunque la mayoría sirvan también para introducir otros tipos de invariantes. Entre ellos podemos citar:

1. La bolsa de formas y el reconocimiento de formas por el tacto.
2. Dominós topológicos.
3. La bolsa de formas, el tangram y la construcción de figuras. Puzzles.
4. Los laberintos, la construcción de circuitos y los coloreados.

A continuación describiremos estos materiales y los rasgos esenciales de las situaciones que podemos diseñar con ellos.

## 1. *La bolsa de formas y el reconocimiento de formas por el tacto*

El reconocimiento de formas, usando exclusivamente el tacto, constituye una situación en la que el niño deja entrever sus representaciones espaciales y geométricas primarias y es, a la vez, una ocasión para introducir las primeras ideas geométricas, sobre todo las topológicas y las métricas.

Para que esta situación tenga sentido, a efectos de lo que hemos apenas comentado, se deben cumplir las condiciones siguientes:

– La bolsa debe ser opaca de forma que no se pueda ver su contenido.
– Las figuras que contenga la bolsa deben ser de todo tipo:
  • Bloques donde predomina el aspecto superficial: bloques poligonales, bloques con el borde curvo, bloques con el borde mixto (curvo y recto), bloques con uno, dos… agujeros.
  • Tiras longitudinales rectas de diversas medidas.
  • Tiras longitudinales curvas de diversas medidas y formas.
  • Cuerpos de aspecto volumétrico.
– La situación se debe desarrollar del modo siguiente:
  ▪ Hay dos niños que intervienen en ella, cada uno con una bolsa de formas, ambas bolsas iguales y con el mismo contenido.
  ▪ Uno de ellos saca de la bolsa una figura, la enseña al compañero y éste, a su vez, debe sacar una figura parecida o igual de su bolsa, sin mirar dentro, solo tocándolas. Se cambian los roles después de un número dado de extracciones.
  ▪ El maestro interviene para encauzar la interacción entre ambos a efectos de determinar el porqué del parecido o la igualdad de las figuras confrontadas en cada ocasión.
  ▪ Gana el que consiga el mayor número de figuras iguales o parecidas a las mostradas por su compañero.

Debemos prever que las razones que se darán para justificar el hecho de que dos figuras sean iguales o parecidas pueden ser razones de índole métrico (mayor, menor o igual longitud, superficie o volumen; tener la misma cantidad de ángulos o lados; tener la misma forma; etc.), pero también pueden ser razones de tipo topológico (ser cerradas, abiertas; tener el mismo número de agujeros; estar constituidas por el mismo número de bloques compactos, etc.). Ambos tipos de razones pueden ser válidos dependiendo de las representaciones geométricas primarias que ponga en marcha el niño en su justificación. Evidentemente esas razones se expresarán en un lenguaje infantil y el maestro debe procurar poner de acuerdo a los dos niños que intervienen para obtener un compromiso válido que permita determinar la validez o invalidez de cada aserción realizada.

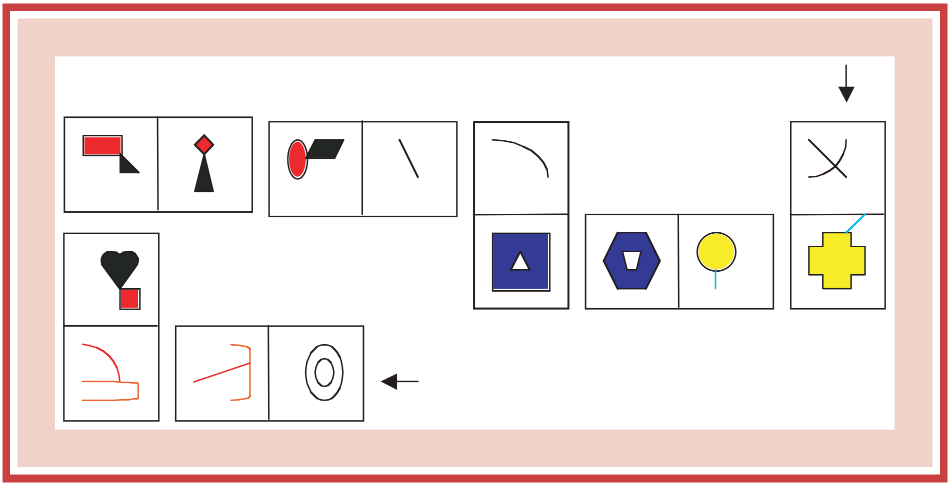
Esta es una excelente situación introductoria a la Topología, ya que se obtiene ese tipo de justificaciones de índole topológica o métrica que denuncian el pensamiento geométrico mixto inicial del niño.

## 2. *Dominós topológicos*

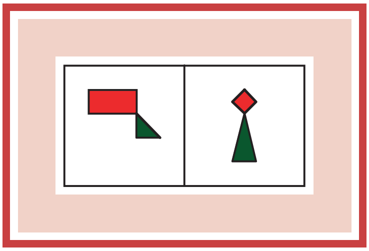
El dominó topológico es un material que sirve para introducir directamente los conceptos topológicos ya que se construye específicamente para ello.

Se trata de un dominó en que las fichas, constituidas por dos partes como indica el nombre del juego, llevan en cada una de esas partes una determinada figura.

La situación de desarrollo de los conceptos topológicos consiste en jugar, con las reglas clásicas del juego, pero teniendo en cuenta que «una de las partes de una ficha se puede colocar al lado de otra parte de otra ficha solo en el caso en que las figuras diseñadas en esas dos partes adyacentes sean topológicamente equivalentes». Veamos una secuencia de una partida de dominó topológico:



En esta secuencia de la partida están contenidas todas las figuras básicas del dominó. Son 7, ya que podemos apreciar 7 figuras que no son topológicamente equivalentes en la secuencia dada. Démonos cuenta también de que la ficha siguiente es doble.



**Actividad 1:** ¿Cómo podrían ser respectivamente las figuras que se colocasen a ambos lados abiertos de la secuencia de dominó dada (donde se han colocado las flechas)? Complete el dominó, es decir, construya las otras 21 fichas que faltan.

Sobre el dominó en el que hemos planteado una secuencia como ejemplo, hemos de hacer las siguientes consideraciones:

– Los colores tienen una doble intención:

- Por una parte sirven para indicar que estamos ante superficies (naranja, verde, azul, amarillo).
- Por otra, se trata de facilitar con el color los distintos componentes de las figuras (sean superficies o segmentos) y ayudar a la vez en la localización de figuras topológicamente equivalentes.

– El dominó contemplado es el normal, un dominó con 28 fichas distintas. De ellas 7 dobles, ya que se contemplan 7 figuras topológicamente distintas al igual que en el numérico se contemplan 7 valores numéricos distintos. Se podrían construir dominós con menor o mayor número de figuras distintas, pero ¿cuál sería entonces el numero de fichas de que constaría el dominó?

– Lo hemos construido de forma que dos figuras topológicamente equivalentes no sean idénticas, ya que en este último caso se trataría de figuras métricamente equivalentes o métricamente proporcionales. Es decir, consideramos fundamental, en la construcción de un dominó topológico, la proposición de las figuras distintas que lo van a determinar de forma que estas sean topológicamente equivalentes pero no idénticas o proporcionales

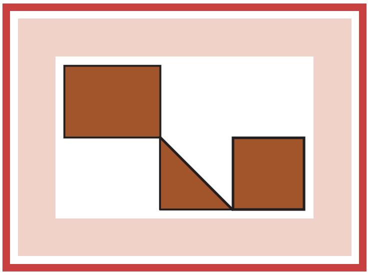
## 3. *La bolsa de formas, el tangram y la construcción de figuras. Puzzles*

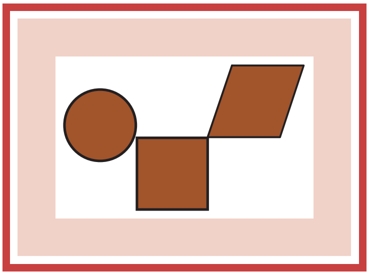
Un grupo de situaciones para la introducción de las primeras ideas topológicas es el que tiene que ver con la construcción de figuras a partir de un modelo dado. Fundamentalmente hay dos tipos de situaciones que se pueden incluir en esta categoría: la construcción de figuras a partir de un modelo en que aparecen claramente cada una de las figuras componentes y la construcción de figuras a partir de un modelo en que este se percibe, en su totalidad, como una única figura sin divisiones internas.

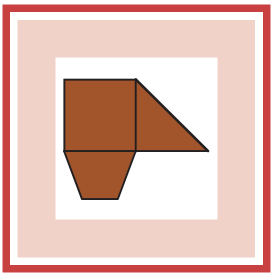
Las figuras componentes de esta bolsa de formas son las figuras básicas de la geometría elemental: triángulos, cuadriláteros, polígonos, círculos, etc. Por otra parte, el tangram a que nos referimos es el tangram clásico compuesto por tres tipos de figuras elementales: triángulos rectángulos e isósceles, cuadrado y paralelogramo, con relaciones fundamentales entre ellos como son: hay tres clases de triángulos (2 pequeños, uno mediano compuesto por dos pequeños y 2 grandes, cada uno compuesto por dos medianos), un cuadrado y un paralelogramo compuestos, a su vez, por dos triángulos pequeños.

En definitiva, se trata de la situación clásica de construcción de puzzles, pero teniendo en cuenta que aquí no solamente hay que respetar la conservación de la medida o de la forma, sino que se debe respetar sobre todo la conservación de las relaciones topológicas.

Veamos un ejemplo de figuras construidas usando la bolsa de formas:

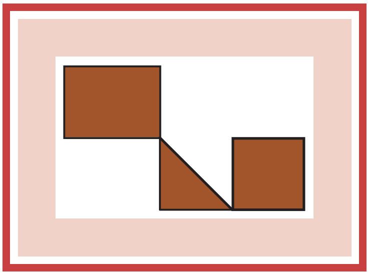


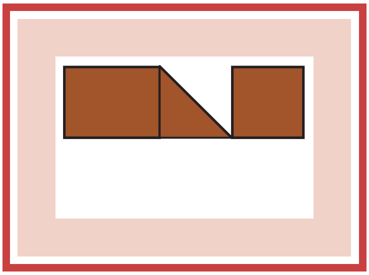


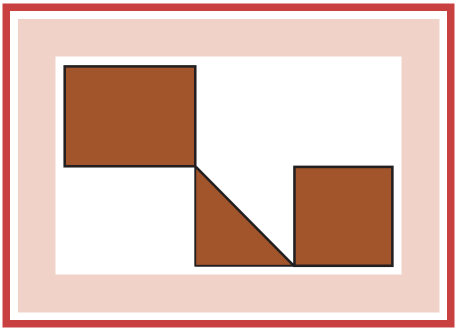


De las tres figuras dadas, las dos primeras son topológicamente equivalentes, pero la tercera no es topológicamente equivalente a ninguna de las otras dos. Por tanto, en una situación que presente la primera como modelo, se puede admitir como válida la construcción de la segunda pero no de la tercera, ya que en esta los puntos de coincidencia de una figura con otra son infinitos, mientras que en las dos primeras hay siempre un solo punto de coincidencia entre una y otra.

Podría, sin embargo, presentarse el caso siguiente:







**Actividad 2:** Entre las dos primeras se conserva la forma y la medida de las figuras componentes, pero ambas figuras no son topológicamente equivalentes. ¿Por qué?

Entre la primera y la tercera se conserva la forma pero no la medida de las figuras componentes y, sin embargo, son topológicamente equivalentes. ¿Por qué?

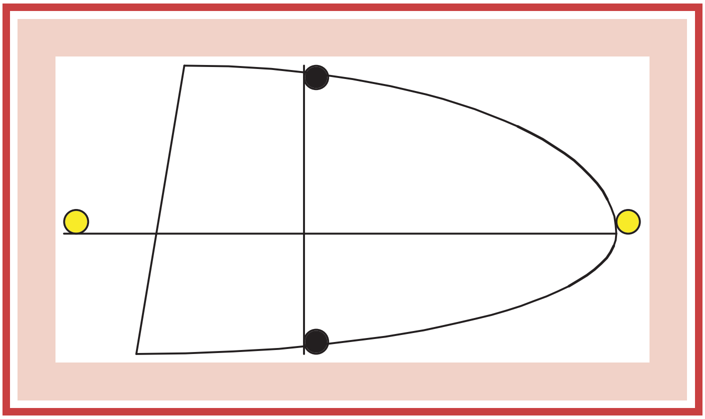
Con estos ejemplos pretendemos dar una muestra de casos posibles de resolución cuando se propone una figura compuesta por varias y se pide su construcción. Vemos que, desde un punto de vista topológico, hay varias soluciones posibles, lo que no ocurre desde un punto de vista métrico.

## 4. *Los laberintos, la construcción de circuitos y los coloreados*

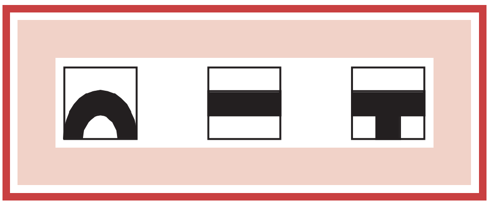
Para la introducción de las relaciones topológicas de vecindad, de conexión, de continuidad, resulta fundamental el planteamiento de situaciones de recorrido (físico o virtual) de laberintos, de construcción de circuitos abiertos o cerrados y de coloreado de mapas compuestos por varias regiones con el mínimo número de colores.

Los laberintos pueden comprender desde un recorrido simple y sencillo hasta el clásico recorrido tortuoso que presentan los laberintos clásicos, teniendo en cuenta que es fundamental la realización del recorrido mental antes de realizar prácticamente el recorrido.

Un ejemplo de situación de recorrido en un laberinto sencillo es el que se presenta en esta figura, donde se trata de realizar el camino entre los dos puntos amarillos pasando por los puntos negros. Nótese que es conveniente la proposición de recorridos que permitan la realización de varios itinerarios.



Respecto a la construcción de circuitos, un material que hace posible la situación es el formado por una serie de fichas que hagan posible la construcción, desde el caso sencillo de la construcción de circuitos libres y abiertos hasta el caso más complicado de construcción de circuitos impuestos y cerrados. Un conjunto de fichas modelo para la realización de tales circuitos puede ser el siguiente:



El material comprenderá, evidentemente, varios ejemplares de cada una de esas tres fichas y el tipo de situaciones de construcción se determinarán al gestionar las siguientes variables didácticas:

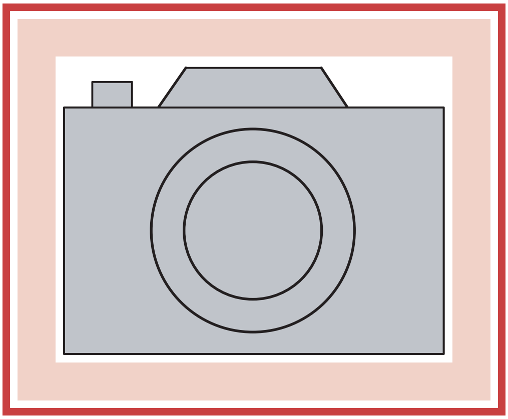
– *El tipo de circuito topológico* (abierto o cerrado).

– *El tipo de construcción del circuito* (libre o impuesta por un modelo dado).

– *El número de cruces.*

Los coloreados, por último, constituyen una excelente situación de introducción a los conceptos topológicos siempre que se siga una progresión que vaya desde la coloración libre y sin límite del número de colores hasta la coloración impuesta sobre todo por el número de colores a emplear, teniendo que llegar forzosamente al empleo del mínimo número de colores para colorear el mapa constituido por una serie de regiones adyacentes.

Un ejemplo de coloración bastante sencillo nos lo puede proporcionar el icono siguiente, en el supuesto de que se llegue a la situación más interesante desde un punto de vista topológico.



**Actividad 3:** ¿Con cuántos colores distintos se puede colorear la máquina fotográfica de forma que…

– … se emplee un solo color para cada parte componente?

– … se emplee el mínimo número de colores posible?

– … no pueda haber dos partes adyacentes con el mismo color?

Un caso un poco más complicado nos lo proporciona este lugar (la casa).

**Actividad 4:** ¿Se pueden emplear menos de los 5 colores usados para colorear la casa de modo que dos regiones adyacentes no tengan el mismo color? ¿Cuántos? (Se supone que las partes coloreadas en celeste son uniformemente coloreadas de ese color).

## 9.5.2. La introducción de invariantes proyectivos

Además de las ocasiones que nos proporcionan los ejercicios de psicomotricidad o el entorno escolar (clase, recreo, comedor, etc.) para introducir los invariantes proyectivos en la escuela infantil, existen materiales reglados, además de aquellos que se pueden construir con la misma intención formativa.

### 9.5.2.1. Situaciones vividas por el niño

En las situaciones que hemos mencionado conviene, en primer lugar, seguir un itinerario didáctico que pase sucesivamente por las siguientes etapas:

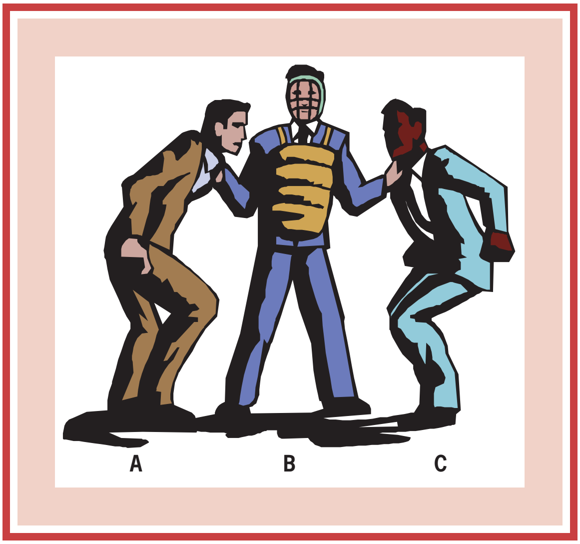
– La referencia es otro sujeto u objeto orientado y las posiciones son relativas.

– La referencia es otro sujeto u objeto orientado y las posiciones dependen del punto de vista del observador.

– La referencia es otro sujeto u objeto no orientado y las posiciones dependen del punto de vista del observador.

– Las referencias son múltiples.

Así, en la imagen siguiente, se pueden considerar las posiciones: B está entre A y C, a la derecha de C y a la izquierda de A. Sin embargo C está enfrente de A, a la izquierda de B, mientras A está enfrente de C y a la derecha de B.




Conviene pues diseñar situaciones donde los niños deban expresar u ocupar distintas posiciones en cada uno de los apartados a que nos acabamos de referir. Cualquier ocasión será propicia para ir desarrollando, poco a poco, los términos adecuados y la comprensión de los mismos en las distintas situaciones a las que se someta al niño.

### 9.5.2.2. Situaciones didácticas con materiales específicos

Entre estos materiales podemos citar los siguientes:

1. Los juegos de posiciones.
2. Los dominós proyectivos y las cartas proyectivas.
3. Las cartas y las construcciones para el desarrollo del punto de vista.

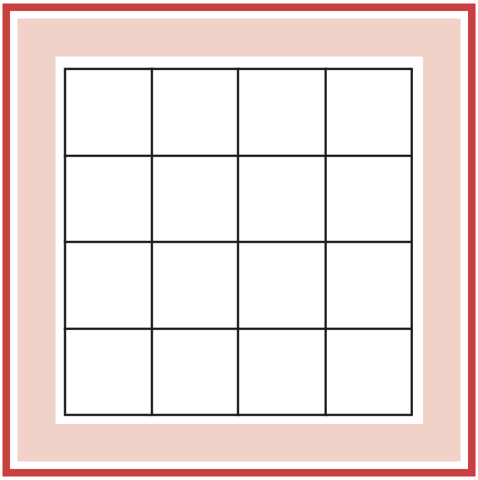
1. *Los juegos de posiciones*

Hay una serie de juegos clásicos que tienen como base un tablero que pueden servir para la introducción de los invariantes proyectivos en Infantil. Para que ese objetivo didáctico sea alcanzable es preciso que, antes de realizar un movimiento, se anuncie dónde se mueve la ficha, el peón o cualquier elemento móvil que intervenga en el juego.

Entre los juegos que sirven para ello, podemos mencionar:

– El tres en raya y sus variantes (variación del tablero, del número de elementos en raya).

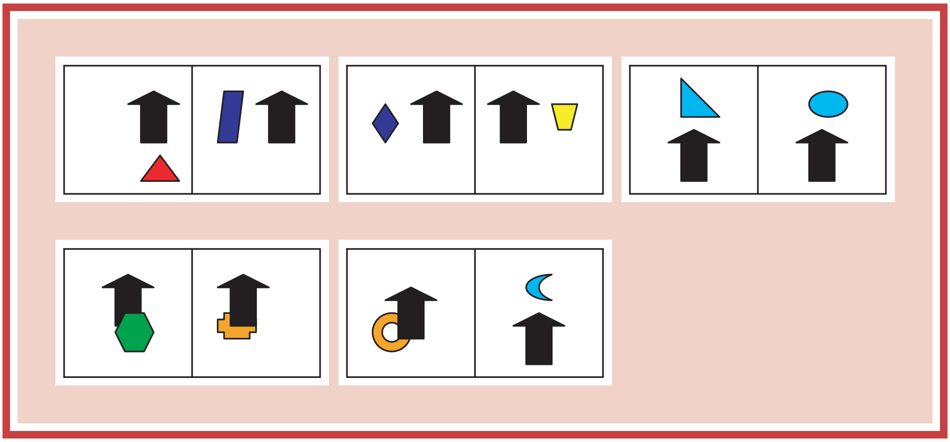
– El reticulado con sus variantes (variación de la retícula, variación de puestos ocupados al inicio). He aquí un ejemplo de este tipo de juego:



En este reticulado se colocan fichas en todas las intersecciones menos en una. Se salta con una ficha por encima de otra para ocupar una posición vacía y entonces se saca del reticulado la ficha por encima de la cual se ha saltado. El objetivo del juego es dejar sobre el tablero una sola ficha. (Nótese la importancia de expresar la posición a la que se desplaza la ficha antes de desplazarla).

## 2. *Los dominós proyectivos y las cartas proyectivas*

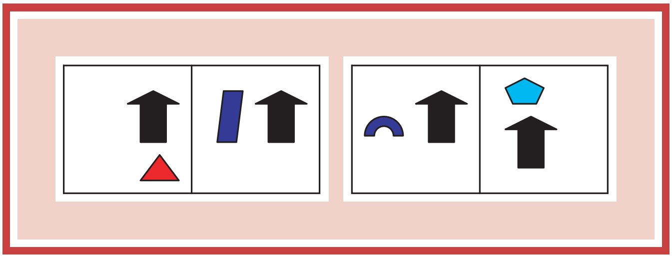
En este tipo de dominós se expresan posiciones respecto a un referencial dado y por tanto será el número de posiciones empleadas el que determinará el número de fichas del dominó. Por ejemplo, si queremos construir un dominó en el que fijamos como elementos definitorios las posiciones: a la derecha, a la izquierda, encima, debajo, delante y detrás, respecto a un elemento referencial dado, tendremos un dominó con 21 fichas. ¿Por qué? Veamos algunas de ellas.



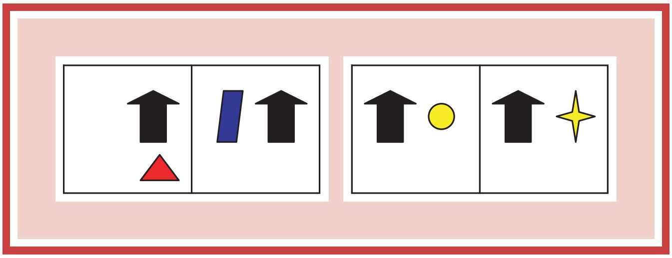
En este modelo hay un elemento de referencia (la flecha negra) y las seis posiciones a las que nos hemos referido (se expresa cada una mediante un color distinto, por ejemplo, el azul claro para «encima»).

Evidentemente aquí la regla fundamental del juego será: «*Una ficha se puede poner junto a otra si las dos partes que se ponen juntas expresan la misma posición*».

Por tanto, una asociación válida sería, por ejemplo:



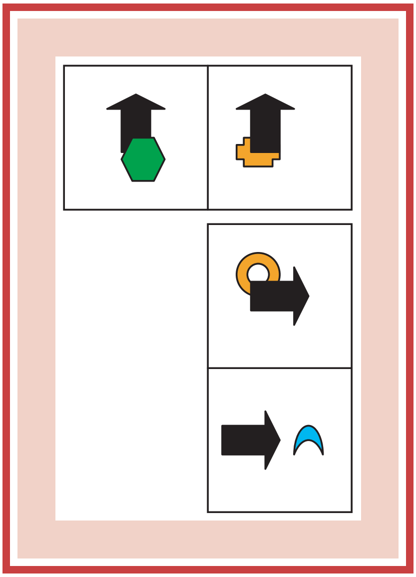
Una asociación no válida sería:



Si queremos que este material sirva para el objetivo didáctico que perseguimos, conviene tener en cuenta ciertas precauciones al diseñarlo:

– Es preferible que el elemento de referencia sea único, y que los elementos que indican una posición respecto a él sean siempre distintos para una misma posición, ya que se trata de desarrollar los elementos proyectivos. Así, en las dos fichas anteriores aparece la posición «a la izquierda de la flecha» representada por dos elementos distintos (en azul).

– Cuando se coloca una ficha junto a otra se puede hacer de cualquier forma que conserve la posición. Así, por ejemplo:

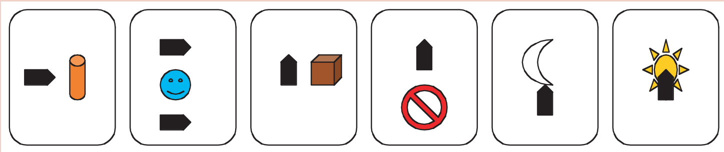


Ya que no cambiarían las posiciones respecto al elemento de referencia.

**Actividad 5:** Completar el dominó proyectivo iniciado anteriormente, teniendo en cuenta las precauciones señaladas. ¿Por qué está compuesto sólo por 21 fichas?

Un material muy parecido lo puede constituir una baraja en que las correspondientes familias están constituidas por cartas en las que aparezcan reflejadas distintas posiciones respecto a elementos referenciales.

**Actividad 6:** Construir una baraja de 32 cartas, agrupadas en ocho familias cuyos respectivos invariantes proyectivos sean: sobre-bajo, delante-detrás, a la derecha-a la izquierda, enfrente, entre. He aquí alguna de esas cartas:



¿Debemos tener en cuenta las mismas precauciones a la hora de construir la baraja que las que se observaron para construir el dominó? Justifique la respuesta.

Nota: En estas cartas el elemento referencial es como se puede prever fácilmente.

En cualquier caso hay que procurar que las posiciones respecto al elemento de referencia sean claras y que no haya lugar a equívocos.

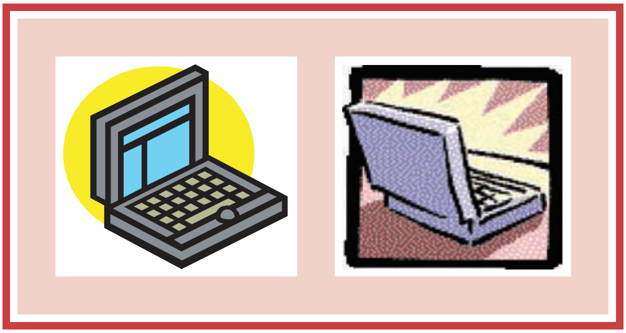
Las situaciones que permiten desarrollar los conceptos implicados son variadas y resultan fáciles de diseñar teniendo en cuenta los diferentes juegos que se pueden organizar con esa baraja: de familias, de parejas, de intrusos en una familia, de memorex, etc.

## 3. *Las cartas y las construcciones para el desarrollo del punto de vista*

Para completar la introducción a la Geometría proyectiva en la Escuela Infantil conviene tomar en consideración el «punto de vista» desde el cual se observan los objetos o las personas, para así construir una visión completa del espacio implicado no sólo por el objeto o persona que se observa, sino también por el punto desde el que se observa.

Para ello pueden servir juegos de cartas organizados en dos categorías. En una aparecen representados diferentes objetos, en la otra diferentes puntos de vista correspondientes a esos objetos o personas. Evidentemente, en los juegos que se propongan, se tratará de asociar un elemento de la primera categoría a los elementos correspondientes de la segunda categoría.

Pueden servir también juegos de construcciones y fotografías o dibujos de diversas construcciones, tomados desde distintos puntos de vista. Se tratará, pues, de asociar a una construcción determinada las fotos o los dibujos correspondientes.



En la figura anterior tendríamos un ejemplo de material (fichas) que podría servir al respecto: estas dos fichas van asociadas porque representan al mismo objeto contemplado desde distintos puntos de vista.

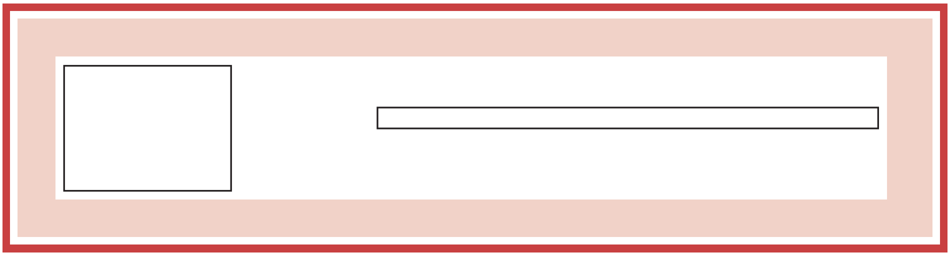
### 9.5.3. La introducción de invariantes métricos

La introducción de la Geometría métrica en Educación Infantil debe plantearse, obligatoriamente, con una serie de precauciones determinadas por la propia complejidad de la misma.

Hay que tener en cuenta que la determinación de la igualdad de dos figuras, que se observan distintamente orientadas en el espacio, se puede obtener mediante una operación primaria como es la superposición, pero el reconocimiento de la igualdad de forma es mucho más complejo ya que implica la aplicación de teoremas geométricos, principalmente del teorema de Tales, lo que determina una complejidad que hace inabordable el tema en los niveles a los que dirigimos esta didáctica específica. Solo con materiales específicos, como son los bloques lógicos, se puede hacer una pequeña introducción al tema de la forma, ya que en él se ha destacado esa propiedad geométrica fundamental.

Apenas varían las características de presentación del material, la dificultad de reconocimiento de la forma se incrementa de forma considerable. Nada indica a un alumno de Infantil que las figuras siguientes constituyen la misma forma geométrica (las dos son triángulos isósceles).

Del mismo modo resulta difícil admitir, para un niño pequeño, que las figuras que aparecen a continuación tienen la misma forma.



Por todo esto, es preciso diseñar las situaciones de introducción a la Geometría métrica con sumo cuidado y, del mismo modo, elegir cuidadosamente también los materiales didácticos que se emplearán en tales situaciones.

### 9.5.3.1. Materiales didácticos para la introducción de invariantes métricos y situaciones correspondientes

Entre los materiales que permitirán diseñar situaciones para la introducción de la Geometría métrica en la Educación Infantil debemos mencionar los siguientes agrupados por categorías:

1. Los juegos de encastre de figuras geométricas.
2. Los bloques lógicos, la bolsa de figuras básicas y el tangram.
3. Los poliminos.
4. El geoplano y el mecano.

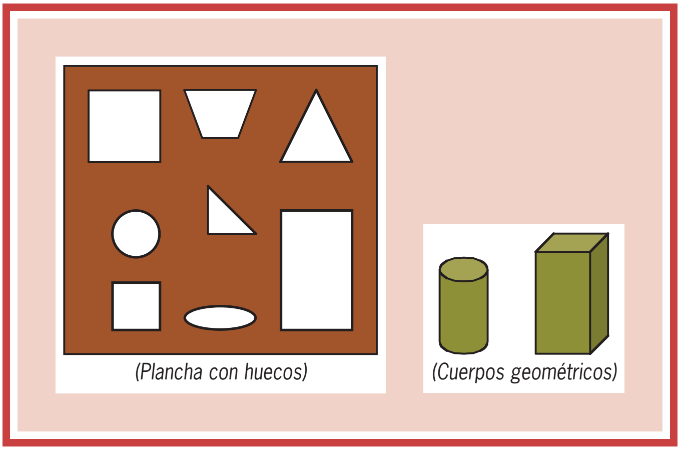
1. *Los juegos de encastre de figuras geométricas*

Existen materiales didácticos que permiten encastrar una figura en un hueco practicado sobre una plancha. Normalmente existen planchas donde se pueden apreciar varios huecos correspondientes a distintas figuras geométricas donde es posible encastrar cuerpos geométricos. Para ello hay que determinar la forma correspondiente a cada hueco y el tamaño de esa forma, ya que el hueco solo permite el paso de una forma determinada con un tamaño determinado.

Por tanto, es interesante, al diseñar este tipo de material, manejar sucesivamente en la situación didáctica correspondiente las variables didácticas *tamaño de las piezas a encastrar y de los huecos* (adoptando diversos tamaños para una misma forma o hueco) y *forma de ambos* (proporcionando distintas formas, incluso algunas que no hagan corresponder un bloque a un hueco).

Se trata, en definitiva, de ir acostumbrando al niño desde las primeras edades a tener en cuenta estos dos invariantes tan importantes en la Geometría métrica: tamaño y forma.

La figura siguiente es un ejemplo ilustrativo de este material.




## 2. *Los bloques lógicos, la bolsa de figuras básicas y el tangram*

a) Entre las muchas utilidades de los bloques lógicos, a nivel didáctico, cabe destacar el uso que se puede hacer de ellos para diseñar situaciones de iniciación a la Geometría. Es conveniente, sin embargo, dotarse de unos bloques lógicos que no produzcan distorsiones respecto a la forma, por ejemplo, procurando que las dimensiones del bloque rectángular grande sean el doble que las del pequeño y que los tamaños de las distintas formas de una misma categoría sean aproximadamente del mismo orden de magnitud (no puede haber mucha diferencia de tamaño entre el bloque cuadrado grande y el bloque círculo grande, por ejemplo).

Con la premisa anterior, se pueden diseñar una serie de situaciones didácticas que deberan centrarse en:

– La *clasificación por tamaños,* ya que la medida es un invariante fundamental de la Geometría métrica.

– La *clasificación por formas*, ya que la forma es otro invariante fundamental de la Geometría métrica.

– La *detección de un intruso* o de varios intrusos en una familia resultante de una clasificación.

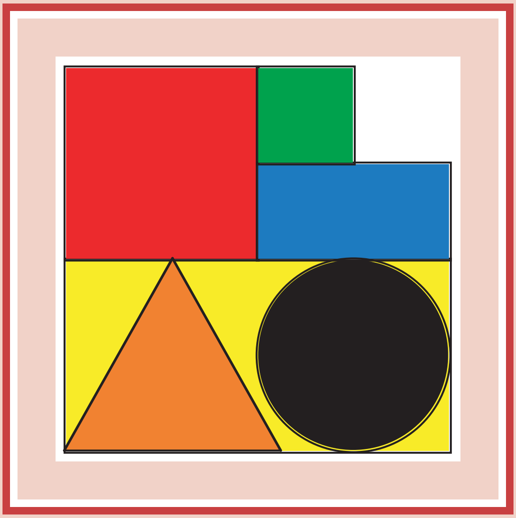
– La *localización de un elemento o de varios elementos* que faltan en una familia resultante de una clasificación.

– La *determinación de un elemento escondido* a partir de preguntas referentes a la forma o al tamaño.

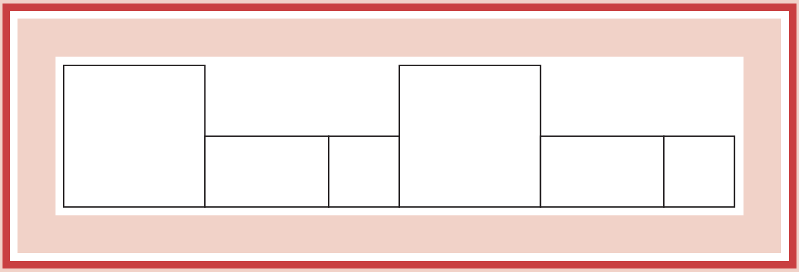
*Continúa*

*Continuación*

– La *construcción de figuras a partir de un modelo dado*, respetando o no el tamaño, por ejemplo:



– La *construcción de algoritmos* en los que el cambio en la célula base se dé a través del cambio de tamaño, del cambio de forma o de ambos, por ejemplo:



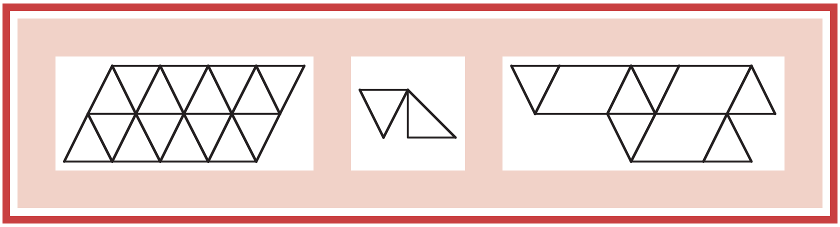
Cambio de forma y tamaño en la célula formada por las tres primeras figuras.

b) El aprovechamiento de la bolsa de figuras básicas para la introducción de la Geometría en los primeros niveles de enseñanza, se traduce en una serie de situaciones donde se han de tener en cuenta, casi siempre, las propiedades fundamentales de esas figuras.

Ese conjunto de figuras debe estar formado por triángulos equiláteros, triángulos rectángulos e isósceles, cuadrados, rombos, paralelogramos, hexágonos, trapecios, polígonos regulares, círculos.

La situación fundamental de desarrollo de la Geometría será la de pavimentado, bien con una única figura, bien con varias figuras. En esta situación hay que tener en cuenta, implícitamente, la medida de los lados de las figuras y la medida de los ángulos, invariantes básicos de la Geometría métrica.

El desafío para el niño, a nivel didáctico, será la determinación de las figuras iguales que pueden pavimentar el plano, por una parte, y la determinación de aquellas figuras distintas que pueden pavimentar el plano, por otra. Por ejemplo, con triángulos equiláteros iguales se puede pavimentar el plano, pero no con triángulos equiláteros y con triángulos rectángulos e isósceles, y sí con triángulos y paralelogramos (con la condición de que ciertos ángulos y lados sean iguales):



La primera y la tercera no dejarán huecos en el plano, si se sigue el mismo plan de pavimentación, la segunda es imposible que no deje huecos, de cualquier forma que coloquemos ambos triángulos y, por tanto, es imposible pavimentar con esas dos figuras.

**Actividad 7:** Determinar con cuáles de las figuras dadas en la bolsa se puede pavimentar el plano:

– Al tomar un solo tipo de figura.

– Al tomar varios tipos de figuras (2 o 3) y combinarlos entre sí de forma adecuada.

Es evidente que en el diseño de situaciones de pavimentación hay que gestionar variables didácticas como:

– *La medida del lado o de los lados de la figura.*

– *La medida de los ángulos.*

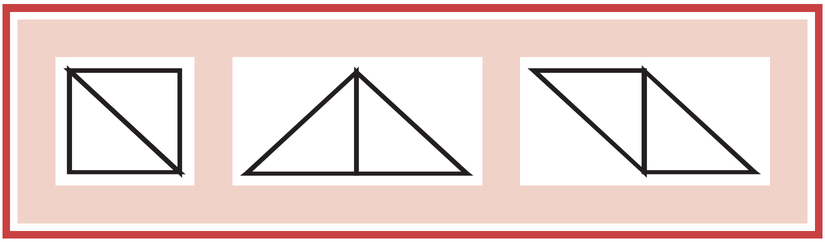
– *La clase de figuras* que se proporcionan al alumno (todas iguales en forma y tamaño o distintas bien por la forma o bien por el tamaño).

c) El tangram. Potencial didáctico en Geometría métrica.

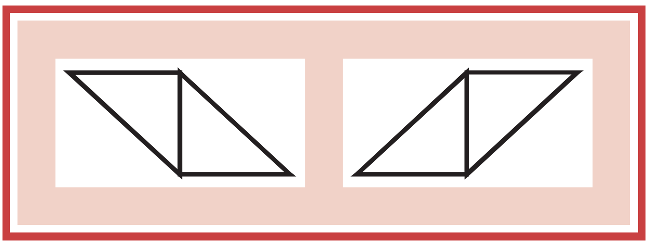
Usando como material didáctico las piezas descritas (9.5.1.1.) se pueden diseñar situaciones que sirvan para la introducción de la Geometría métrica en Infantil. Efectivamente, cada una de esas piezas es una figura elemental típica de la Geometría métrica y las relaciones que mantienen entre ellas son relaciones donde fundamentalmente se tienen en cuenta medidas: medidas de longitud, medidas de superficie y medidas de ángulos.

El interés didáctico de esas piezas es que a partir de ellas se pueden generar otras figuras clásicas de la Geometría elemental, sea partiendo de un número limitado de ellas, sea utilizando todas las piezas.

Así, por ejemplo, una situación de uso didáctico del tangram es aquella en la que se plantea cuántas figuras se pueden conseguir a partir de dos triángulos iguales del tangram (sean estos los pequeños o los grandes) si los unimos de modo que coincidan exactamente en uno de sus lados. No será difícil que los niños de este nivel lleguen a construir las tres figuras posibles:



Podría darse que los niños considerasen distintas las dos figuras siguientes:



En principio, no sería un grave inconveniente, ya que está prevista la introducción de la simetría como uno de los conceptos geométricos que se van a introducir en la Educación Infantil.

> **Actividad 8:** ¿Cuántas figuras distintas se pueden generar tomando dos piezas cualesquiera del tangram y uniéndolas por un lado de forma que este sea de igual medida en las dos piezas?

Como podemos ver, al tratar de resolver esta situación, hay que tener en cuenta una relación que no habíamos mencionado todavía: la hipotenusa de cada triángulo es igual al cateto del triángulo inmediatamente inferior. Aunque debemos tener en cuenta que esta relación queda implícita, para los niños, en la práctica empírica.

No es difícil presumir que se pueden proponer otra serie de situaciones similares cambiando *el número de piezas* cada vez, constituyendo este una variable didáctica importantísima en esta serie de situaciones didácticas. Conviene, sin embargo, aclarar que la situación se complica a medida que se van añadiendo piezas, por lo que es prácticamente imposible llegar, con los niños de Infantil, a la consecución de todas las posibilidades de formación. Tendremos que contentarnos, pues, con la consecución de algunas figuras en cada una de las situaciones que se plantean al tomar un número dado de piezas del tangram.

Al final de esta serie de situaciones nos encontraremos con la intervención de las 7 piezas y llegaremos así a la situación típica de uso del tangram, es decir, a la formación de figuras con todas las piezas. Esta es una situación que, por su complejidad, exige un planteamiento paso a paso:

1.º Construcción libre de figuras sin imponer ninguna regla.

2.º Reproducción de figuras a partir de un modelo dado, donde se aprecian claramente cada una de las piezas componentes.

3.º Reproducción de figuras de las que se da solo el borde, sin que se puedan apreciar las piezas componentes.

El primer paso da lugar a la aparición de toda clase de figuras: cóncavas, convexas, conexas, inconexas… El segundo paso acostumbra al niño a las distintas posibilidades de orientación de una figura y al ejercicio de la reproducción conforme (las medidas del modelo coinciden con las de la reproducción, limitación de lo que podía ocurrir en la correspondiente situación topológica). El tercer paso es la situación clásica del tangram, aunque es una situación que raramente es resuelta por los niños de este nivel educativo.

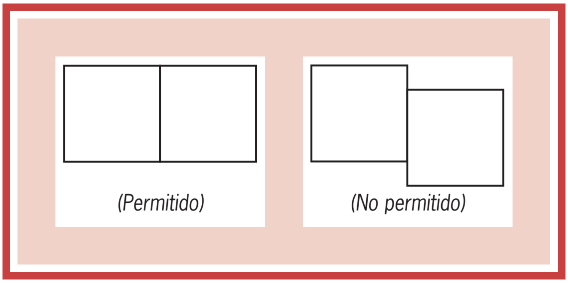
## 3. *Los poliminos*

Se trata de un material didáctico que, a diferencia del tangram, está constituido por figuras elementales todas iguales. Pueden ser triángulos equiláteros o cuadrados. Se puede extender el material a otras figuras distintas formadas a partir de las dos clases mencionadas:

– Rombos, trapecios, romboides, hexágonos formados con un número dado de triángulos equiláteros.

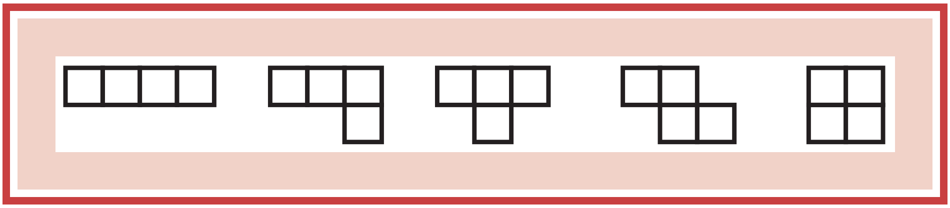
– Rectángulos formados con un número dado de cuadrados, triángulos rectángulos obtenidos como la mitad de un triángulo equilátero o la mitad de un cuadrado.

Tomada cada categoría (figuras todas iguales), la situación se plantea al proponer construir todas las figuras posibles con un número dado de figuras elementales, siguiendo una regla fundamental: una figura se puede juntar con otra igual solo por un lado en que coincidan:

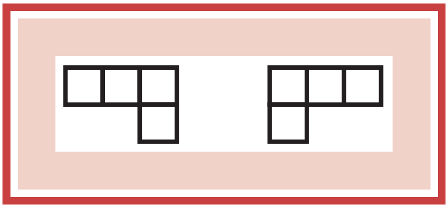



La situación se puede resolver en el nivel de Infantil siempre que el número de figuras componentes sea pequeño. Para un número mayor de componentes no se puede exigir la consecución de todas las posibilidades. Así, sería posible llegar a los tetraminos formados por cuadrados o a los pentaminos formados por triángulos equiláteros, siempre que se hayan construido anteriormente los dominós, triminos, tetraminos correspondientes.

Tetraminos con cuadrados:



Surgirían problemas al poder ser consideradas, por ejemplo, como figuras distintas:



Pero son problemas inevitables en este nivel por las razones de simetría antes mencionadas, problemas que se podrán resolver en niveles sucesivos de enseñanza.

**Actividad 9:** ¿Cuántos y cuáles son los pentaminos formados con triángulos equiláteros? ¿Cuántos y cuáles son los pentaminos formados con cuadrados? ¿Cuántos y cuáles son los examinos formados con cuadrados?

La resolución de la última parte de esta actividad será una muestra de la complejidad de esta tarea.

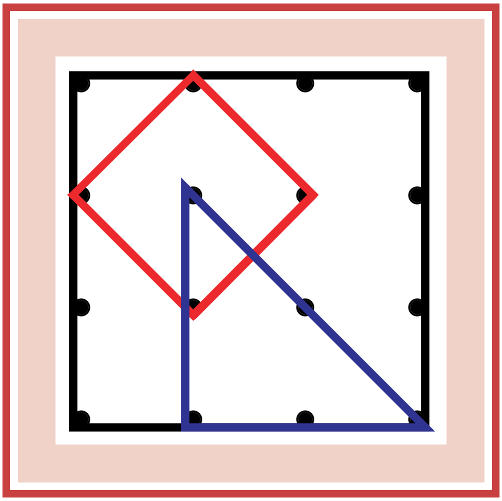
## 4. *El geoplano y el mecano*

Todos los materiales que hemos propuesto hasta ahora tienen una característica común: ponen de manifiesto la superficie de las figuras geométricas. Conviene sin embargo, a efectos didácticos y psicológicos, resaltar la forma a través del «borde» de las figuras, y ello se consigue con materiales como el geoplano o el mecano.

### El geoplano

Se trata de una plancha cuadrada en la que hay diseñada una retícula conseguida mediante clavos que normalmente forman cuadrados, pero que podrían formar otras figuras elementales: triángulos equiláteros, hexágonos, paralelogramos, etc. El material comprende, además, gomas de colores. Por ejemplo, aquí tenemos un geoplano de $4 \times 4$ clavos en el que se han construido 3 figuras geométricas básicas.

Con los gomas se pueden formar figuras de todo tipo, extendiéndolas entre determinados clavos de la cuadrícula, consiguiendo de esta forma la realización de un trabajo dinámico, ya que es fácil transformar unas figuras en otras con el simple cambio de las gomas a otros clavos. Tiene una gran importancia esta actividad a efectos de extender el campo de comprensión de una figura determinada,



para ello basta pensar en la variación que sufre la concepción de la forma «triángulo» como consecuencia del desplazamiento del elástico a un clavo diferente.

Situaciones tan simples como la construcción de figuras elementales dadas (por ejemplo, el cuadrado) son enormemente productivas desde el punto de vista del desarrollo geométrico, ya que se obtendrán figuras de diferente superficie simplemente lanzando una consigna de construcción de las mismas. No se puede pretender, en estos niveles, la obtención de todas las figuras de un tipo determinado; nos tendremos que contentar con aquellas que surjan del ejercicio empírico.

**Actividad 10:** ¿Cuántos cuadrados distintos se pueden construir en un geoplano $4 \times 4$ (con una red cuadrada de 4 clavos por 4 clavos)?

Se puede comprobar, con dicha actividad, que la consecución de esta tarea supondría un esfuerzo fuera de lugar para niños de Infantil, a la hora de distinguir figuras distintas entre sí, ya que hay que tener en cuenta no solo la evidencia perceptiva de la distinta cantidad de superficie, sino también las distintas longitudes de los lados cuando esa evidencia no se presenta.

## Las tiras de mecano

Aparte del ejercicio de motricidad fina que supone el ensamblaje de las tiras de mecano, mediante los tornillos anexos, conviene resaltar las ventajas exclusivas de este material desde un punto de vista didáctico.

A diferencia del geoplano, no siempre es posible construir una figura dada, al elegir cualquier tipo de material, es decir, dependiendo de las tiras elegidas, ¿podré construir o no una figura determinada? Será prácticamente imposible lograr en estos niveles una formulación precisa de las condiciones de elección de las tiras para poder construir una figura determinada, pero se pueden conseguir aproximaciones interesantes a esas condiciones cuando se plantea la construcción de una determinada figura (por ejemplo, el paralelogramo). Se emplearán, en este caso particular y en otros parecidos, teoremas en acto que harán elegir las tiras correctas, sin un razonamiento previo sobre cómo deben ser las longitudes de las mismas.

**Actividad 11:** ¿Qué condición tendremos que exigir a las tres tiras elegidas para que la construcción del triángulo sea posible?

Otra ventaja la proporciona el hecho de que las figuras conseguidas son articuladas y por tanto deformables, lo que constituye un hecho bastante sugestivo por las transformaciones que se producen, al ejercer una presión sobre la figura, y por las correspondientes figuras que se derivan de las transformaciones practicadas. Pensemos en el rombo que se transforma en cuadrado, después de pasar por innumerables posiciones en que se van consiguiendo sucesivamente rombos.

### 9.5.3.2. Materiales adecuados para el ejercicio de la simetría

El planteamiento didáctico de construcción de una geometría dinámica exige la práctica de este movimiento elemental plano, por la importancia que tiene no solo a efectos de distinción de figuras y de determinación de figuras iguales, sino también a efectos de construcción de tantos conceptos geométricos elementales. El nivel de Infantil se presta perfectamente para una introducción sugestiva de esta transformación geométrica plana tan decisiva en la construcción de la Geometría elemental.

Las situaciones de introducción de la simetría deben adecuarse al nivel al que van dirigidas y, por ello, deben ser diseñadas de forma que no supongan una gran dificultad para el alumno. Entre ellas podemos citar:

- El plegado de una hoja de papel por una línea que permita dejar la huella de un dibujo en el que la pintura está reciente, con el consiguiente discurso sobre los resultados obtenidos.
- La determinación de la línea de plegado en un papel semitransparente en que se dan dibujadas una imagen y su simétrica.
- La realización sobre papel pautado (cuadriculado, punteado, rayado) de la simétrica de una figura dada.

No se puede pretender ir mucho más allá en la introducción de esta transformación elemental y, sin embargo, estas primeras experiencias pueden sentar las bases esenciales para una posterior profundización en el concepto y para establecer su relación con otras transformaciones planas.

Es interesante el uso de un material didáctico, como el de los espejos, para la obtención de simétricos, aunque la experiencia con ellos deba ser considerada sólo como un primer paso en la obtención de simetrías.

### 9.5.4. La simbolización en Geometría. La adopción de un lenguaje específico para la designación de entes geométricos

El ejercicio de la función simbólica debe extenderse a cualquier campo que se trabaje en Matemáticas y, en particular, al campo geométrico.

La asignación de nombres a las distintas figuras geométricas debe ser posterior al descubrimiento de las mismas en situaciones específicamente diseñadas para ello y, dada la complejidad del campo geométrico y de las clasificaciones practicadas para modelizarlo, conviene admitir, al principio, denominaciones ligadas al lenguaje natural (figura con tres picos, cuadro, gorro, tejado, etc.) para ir introduciendo, a continuación y poco a poco, el lenguaje correcto utilizado en esta rama de las Matemáticas.

La adopción de los términos lingüísticos correctos debería ser la consecuencia de situaciones de comunicación dentro del aula, que permitiesen la adopción de un lenguaje preciso para designar los distintos entes geométricos y ello siempre que anteriormente se hubiese trabajado con dichos entes dentro de la situación planteada, con el objetivo claro de construirlos, reproducirlos, representarlos, analizarlos y, como paso final, designarlos.

El diseño de una serie de situaciones en que se construyesen, se reprodujesen, se representasen, se analizasen y se designasen las distintas figuras geométricas, debería prever, en esa última etapa de designación, la elaboración de situaciones para pasar de las designaciones ligadas a un lenguaje natural a las designaciones geométricas científicamente aceptadas, siguiendo una evolución parecida a la que se sigue en el descubrimiento y adopción de un lenguaje que sirva para describir adecuadamente el mundo que rodea a un niño.

## 9.6. Bibliografía

ALSINA, C.; BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.: *Invitación a la Didáctica de la Geometría*, Síntesis, Madrid, 1987.

—: *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis, Madrid, 1988.

BOULE, F.: *Manipular, organizar, representar*, Narcea, Colección Primeros pasos, Madrid, 1995.

CHAMORRO M. C. y BELMONTE J. M.: *El problema de la medida*, Síntesis, Madrid, 1991.

—: *Iniciación a la lógica matemática. Jugar y pensar 1 y 2*, Alhambra-Longman, Madrid, 1966.

HOLLOWAY, G.E.T.: *Concepción del espacio en el niño según Piaget*, Paidós-Ecuador, Buenos Aires, 1969.

SAUVY, G.: *El niño ante el espacio: iniciación a la topología intuitiva*, Pablo del Río, Madrid, 1980.

VECINO, F.: «Aspetto semiotico delle rappresentazioni spaziali del bambino», *La matematica e la sua didattica*, 3, 1997, 272-288.

—: *La representación del espacio en la transición de la Escuela Infantil a la Escuela Primaria*, UNO, 1997, 93-107.

ZIMMERMAN, G.: *Activités mathématiques a la maternelle*, Nathan, Paris.

CAPÍTULO 10

# La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil

JUAN MIGUEL BELMONTE GÓMEZ

## Contenidos

## 10.1. Introducción

La enseñanza de las magnitudes y su medida siempre ha estado presente en los currículos de Matemáticas en la educación elemental. Pero por lo que respecta a la Educación Infantil bien es verdad que las propuestas de las autoridades educativas han sido tradicionalmente pobres y en muchos casos desacertadas.

A pesar de tratarse de uno de los conocimientos matemáticos de más presencia social, da la impresión de que se reserva casi en su totalidad a etapas educativas posteriores. Sin embargo, la construcción de las nociones de magnitud y medida deben arrancar en esta etapa, aunque el niño vaya a medir poco o nada.

No tiene sentido iniciar a la medida si no se sabe qué se puede y qué no se puede medir. Parece necesario que los niños entren en contacto con situaciones que les provoquen el descubrimiento de las magnitudes, a partir de sus percepciones de determinadas propiedades en los objetos.

Por ello, pasaremos revista a los resultados de la epistemología genética acerca de la construcción de las magnitudes, así como de la medida.

Posteriormente repasaremos los fenómenos didácticos más destacados de la enseñanza de la medida, para proponer unas líneas generales metodológicas de este trabajo en Educación Infantil.

Particularizaremos después cada una de las cuatro magnitudes objeto de trabajo: longitud, masa, capacidad y tiempo. De cada una de ellas apuntaremos los elementos más importantes acerca de su aislamiento por parte del niño y las consecuencias didácticas que de ello se derivan.

En el caso del tiempo, nos detendremos para exponer sus importantes particularidades, que provocan que su trabajo escolar deba ser sustancialmente distinto, aunque sin perder la referencia del marco general de la medida de magnitudes. No se trata sólo de aprendizajes puramente sociales, desprovistos de sus propiedades lógico-matemáticas. Una correcta comprensión de las nociones temporales pasa precisamente por ser capaz de dotar a las prácticas temporales cotidianas de algunas de las características que contemplamos en las otras magnitudes.

## 10.2. Objetivos

– Analizar las nociones de medida que deben ser enseñadas en Educación Infantil.

– Conocer las aportaciones de la epistemología genética sobre la construcción de las nociones de magnitud y medida.

– Estudiar los fenómenos más destacados de la enseñanza actual de las magnitudes y su medida.

– Proponer algunas indicaciones metodológicas acerca del trabajo con las magnitudes en Educación Infantil.

– Estudiar las especificidades que presenta la magnitud tiempo proporcionando pautas para su enseñanza en Educación Infantil.

## 10.3. La construcción de la noción de magnitud en el niño. Aspectos generales evolutivos

Aunque luego tendremos que particularizar sobre cada magnitud, es necesario previamente establecer un marco general acerca de las nociones de magnitud y medida.

Los estudios piagetianos indican que el niño debe superar los siguientes estadios para la construcción de una determinada magnitud:

– *Consideración y percepción de una magnitud* como una propiedad de los objetos, o de una colección de objetos, aislándola de otros atributos que éstos puedan presentar.

– *Conservación de la magnitud* ante determinadas transformaciones. El niño debe identificar qué cambios en el objeto dejan invariante la propiedad característica de la magnitud.

– *Ordenación respecto de la magnitud*. Las propiedades que definen las magnitudes permiten ordenar de manera natural los objetos. El niño también aislará otras propiedades, pero no todas provocan ordenaciones. Aunque no todas las comparaciones «más que» o «menos que» van a construir magnitudes («mas bonito», «más doloroso»), la posibilidad de ordenar es intrínseca a la noción de magnitud.

– *Correspondencia de números a cantidades de magnitud*. Se trata del último estadio y que se corresponde con la capacidad de medir. Esta correspondencia hace que no sólo sepamos que una cantidad de magnitud es mayor que otra, sino que sepamos, también, cuánto mayor es. Decimos que un objeto pesa el doble que otro, lo que podemos asegurar con absoluta propiedad[1]. Sin em-

[1] Esta posibilidad se deriva de la existencia de una composición entre cantidades de magnitud que se va a corresponder con la suma numérica. Si al colocar dos libros iguales en el platillo de una balanza y en el otro un libro distinto, se equilibra la balanza, decimos que la masa del libro que está solo es el doble que la del otro.

bargo expresiones como «Hoy me duele la cabeza el doble que ayer», o «Es mil veces más bonito», aunque sean muy gráficas, carecen de significado más allá de un simple orden.

La evolución adecuada del niño por estos estadios resultará de la maduración evolutiva y de las experiencias vividas. Hay que proporcionar, por tanto, al alumno un medio lo suficientemente amplio donde pueda experimentar, probar, verificar. Y todo ello para cada una de las magnitudes lineales objeto de trabajo.

En lo que respecta a la construcción de la noción de medida[2] Piaget define la siguiente evolución:

– *Comparación perceptiva directa*. El niño no recurre a ninguna medida común ni desplazamiento. Compara de forma perceptiva, visual, táctil, etc. Al final de esta etapa, si la percepción directa no le da información suficiente, utiliza ya intermediarios compuestos por ciertas partes de su cuerpo (por ejemplo, manos o pies, en la caso de la longitud) aunque simplemente como un apoyo a la percepción.

– *Desplazamiento de objetos*. El niño necesita precisar más en las comparaciones, por lo que traslada uno de los objetos para aproximarlo lo suficiente, y así poder extraer informaciones perceptivas suficientes. Si la aproximación no es posible, se ayuda de un intermediario para la comparación. Al final de esta etapa el niño ya utiliza algún intermediario independiente de su propio cuerpo.

– *Operatividad de la propiedad transitiva: comparaciones indirectas*. El niño es capaz de construir razonamientos como: «Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$». Donde el elemento b es el intermediario en la comparación. Naturalmente esta etapa está ligada a la conservación de las cantidades, ya que éstas se desplazan y sin su conservación no tiene sentido el razonamiento.

En un primer momento este intermediario es más grande que los objetos que se van a comparar, para pasar después a servirse de un patrón más pequeño, convenciéndose de que la precisión será mayor.

Al final de este proceso el niño desarrolla la noción de unidad, cuya constitución sigue la siguiente evolución:

**Unidad objetal:** la unidad está asociada a un único objeto, con relación incluso con el objeto que se quiere medir. Por ejemplo, en el caso de la longitud es normal que use como unidad algunas partes constitutivas del objeto a medir.

**Unidad situacional:** unidad que depende todavía del objeto que se va a medir, cambiándola para otros objetos en función de la relación existente entre

[2] Si el lector quiere acercarse con más detalle a las nociones matemáticas de magnitud, cantidad de magnitud, medida, aplicación de medida, unidad, etc., le recomendamos la lectura de Chamorro y Belmonte (1991, cap. 6).

los mismos. El niño prefiere unidades más pequeñas para objetos de menor tamaño.

**Unidad figural:** la unidad va perdiendo la relación con los objetos a medir, aunque todavía se asocia a figuras concretas. La unidad sigue identificándose con alguna forma determinada. Ejemplos paradigmáticos los observamos en el caso de la capacidad, y en la superficie donde encontramos una identificación entre el cuadrado y la unidad.

Cuando la unidad se libera totalmente de la figura, tamaño y objeto a medir se consigue la construcción de la verdadera noción de unidad. Es importante destacar que la unidad es una cantidad de magnitud[3] particular, pero no una figura concreta.

> **Actividad 1:** Recapitule cuántos «modelos» de litros puede observar en la vida cotidiana. Haga lo mismo con las unidades de superficie y observará lo costoso que es superar la última etapa llamada de la unidad figural.

No hemos querido mostrar las edades de las distintas fases en la construcción por parte del niño de los conceptos de magnitud y su medida. En un primer momento entendemos que es muy difícil ser uniforme en estos aspectos en cuya construcción es determinante la interacción del niño con su entorno físico.

En Educación Infantil se deben abordar los trabajos de constitución de la magnitud, incluyendo para el final de la etapa las primeras aproximaciones al uso de patrones en las comparaciones indirectas, pero no se plantea como un objetivo de esta etapa la construcción de la noción de unidad propiamente dicha.

El caso del tiempo, dada su especificidad, se tratará en el apartado 9 de este capítulo.

## 10.4. La práctica escolar sobre las magnitudes. Fenómenos asociados

El trabajo con magnitudes siempre ha estado presente en los currículos de la enseñanza elemental de las Matemáticas, tanto en Educación Infantil como en Primaria. Ahora bien, como señala Chamorro (2003), su transposición didáctica

[3] Volvemos a remitir al capítulo 6 de Chamorro y Belmonte (1991) para conocer con más profundidad la construcción matemática de todas estas nociones.

es reductora y desequilibrada; sólo tiene en cuenta ciertos aspectos olvidando casi por completo otros[4].

El concepto de magnitud está ausente de los currículos, lo que provoca una carencia casi total de las tareas de construcción de la magnitud. No se trabajan los problemas de decantación y aislamiento, ni tampoco los criterios de equivalencia y conservación que permitan al alumno discernir cuándo dos cantidades de magnitud (longitud, masa…) son equivalentes. Se recurre demasiado pronto a la comparación desde los resultados obtenidos a partir de una medición. Este hecho empobrece de una manera muy importante el trabajo que se debe desarrollar en Educación Infantil, ya que es en esta etapa donde el niño tiene que construir los conocimientos referidos a la constitución de la magnitud, que no son en absoluto triviales. Se trata de saberes didácticamente invisibles, cuyo aprendizaje se deja a la entera responsabilidad del alumno, sin que de una manera reglada se intervenga sobre ellos.

Esto provoca dos tipos de errores:

– Como el niño no se ha enfrentado a la identificación personal de las características físicas que definen la magnitud, se puede producir un **uso erróneo de los sentidos.** El niño debe reconocer las propiedades físicas para establecer diferencias y similitudes, a partir de las cuales construirá los procesos de comparación de cada magnitud. Para comparar la masa de objetos, por ejemplo, la vista no es el sentido más adecuado: ¿qué pesa más un kilo de plomo o un kilo de paja?

– Además puede provocar la **confusión entre distintas magnitudes** al no identificar los atributos que definen a cada una. Este hecho en el caso del tiempo es muy frecuente y especialmente delicado, al necesitar siempre la ayuda de alguna característica observable para su comparación. Cuando el niño tiene dificultades para establecer comparaciones en una magnitud, puede intentar resolverlas usando informaciones que se deducen de la lectura de índices perceptivos provenientes de otra magnitud, aunque éstas no sean determinantes. En la etapa correspondiente a la Educación Primaria, Chamorro (2003) muestra de manera muy precisa cómo la comparación de superficies se hace a partir del perímetro, que es en realidad una longitud, por lo que constituirá, más adelante, un obstáculo epistemológico.

Tampoco ayuda mucho la redacción del decreto actualmente vigente[5] que determina el currículo de Educación Infantil, que en el área de Comunicación

[4] En el capítulo 8 de *Didáctica de las Matemáticas* (Chamorro, 2003), puede encontrar el lector un análisis detallado de todos los aspectos (entornos) que intervienen en el concepto de magnitud y medida.

[5] Hacemos referencia al currículo actualmente vigente, que corresponde al Real Decreto 1333/1991. De todas maneras, posteriores intentos de modificación, que luego han sido derogados, no mejoraban precisamente estos aspectos.

y Representación, en el bloque de contenido VI: «Relaciones, medida y representación en el espacio» escribe el siguiente contenido conceptual:

4. La medida
   - Situaciones en que se hace necesario medir: comparación de magnitudes.
   - Unidades de medida naturales (mano, pie, brazo, paso…) y arbitrarias (cuerda, tablilla, recipiente…).
   - Introducción a la estimación y medida del tiempo (mucho rato, poco rato; rápido, lento; día, semana…).
   - Instrumentos de medida del tiempo (reloj, reloj de arena, de agua…).

Un simple vistazo al decreto ya muestra importantes carencias, además de dar indicaciones totalmente engañosas, como veremos posteriormente. Magnitudes como la masa y la capacidad parecen desaparecer del currículo de esta etapa.

Por eso encontramos que la práctica cotidiana en Educación Infantil sobre magnitudes es muy poco uniforme. Es fácil identificar actividades muy extendidas relativas a la medida de magnitudes en Educación Primaria[6], pero no es el caso de la etapa anterior.

**Actividad 2:** Estudie diversos materiales para Educación Infantil y rescate aquellas actividades propuestas que traten sobre la construcción de las magnitudes lineales.

Otra práctica habitual de enseñanza que supone una fuente de obstáculos[7], como también apunta Chamorro (2003), es el uso casi exclusivo de objetos idealizados como objetos soporte de las diferentes magnitudes. Se trata de objetos previamente decantados, esto es, objetos elegidos o construidos al efecto en los que la percepción sensorial apunta de una manera transparente a la magnitud. Siempre se trabaja la longitud con objetos longitudinales, o directamente con sus dibujos en los que la longitud significativa queda obviamente marcada. Incluso se trabaja más con dibujos de balanzas y objetos que con los objetos y balanzas reales. Si en Educación Primaria se presenta de manera ostensiva la medida, en Educación Infantil, en muchas ocasiones, se presentan actividades ostensivas de comparaciones.

[6] Lo que no quiere decir que todas tengan interés desde un punto de vista didáctico. Ver Chamorro (2003, capítulo 8).

[7] En esta obra citada se encuentra un exhaustivo inventario de fenómenos y obstáculos asociados a la enseñanza de la medida. Aquí sólo nos hemos detenido en aquellos que intervienen en la etapa de Educación Infantil.

## 10.5. Propuestas metodológicas generales

Como otros conceptos en Matemáticos, la noción de magnitud se construye sobre procesos de clasificación y seriación. Sin detenernos en esta construcción matemática, que el lector encontrará detallada en el capítulo 6 de Chamorro y Belmonte (1991), sí que es interesante apuntar al menos los primeros pasos, que son los que se corresponden con los trabajos en la etapa de Educación Infantil.

Partimos de un conjunto de objetos y en ellos vamos a destacar uno de sus atributos[8], que va a definir una magnitud. Excepto en el caso de la magnitud tiempo, los sentidos nos proporcionan ciertas informaciones para apreciar estos atributos. Si pensamos en la magnitud masa, la información sensorial acerca de este atributo corresponde a la fuerza muscular que hay que realizar para sujetar los objetos. Los objetos del conjunto se comparan entonces con este criterio: «ser tan pesado como», que lo podemos materializar con el uso de una sencilla balanza de doble platillo. Si dos objetos la equilibran es que son equivalentes respecto de este atributo.

Esta comparación supone una relación de equivalencia, que proporciona una partición del conjunto de objetos. Cada parte de esa partición (clase de equivalencia en términos matemáticos) es lo que se denomina cantidad de magnitud. Por tanto cada cantidad de magnitud está formada por todo un conjunto de objetos equivalentes.

**Actividad 3:** Analice qué características elementales presenta un atributo para que sobre él podamos construir una magnitud. Estudie para ello los criterios de clasificación y ordenaciones más comunes en el aula de Educación Infantil.

Si tomamos dos objetos con cantidades de masa distintas (de dos clases de equivalencia distintas), uno de ellos será más pesado que el otro con toda seguridad. Además, si tomamos otros dos de las mismas clases de equivalencia respectivamente, el resultado no varía. Esto genera una ordenación total en el conjunto de las clases de equivalencia.

[8] La caracterización de los atributos medibles, que van a permitir la construcción matemática de una magnitud se puede encontrar en el capítulo 1 de Mosterín, J.: *Conceptos y teorías en la ciencia*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

Estos procesos quedan esquematizados en el siguiente cuadro[9]:

| Lenguaje matemático | E | Partición de E : P | P |
|---|---|---|---|
| Actividades (objetos y procedimientos) | Objetos para comparar | Clases de objetos de la misma magnitud | Clases ordenadas |
| | Comparación de los objetos dos a dos. Constitución de clases de equivalencia | | Ordenación de las clases (deducida a partir de la comparación de objetos) |

**Actividad 4:** Particularice el cuadro anterior para cada una de las siguientes magnitudes: longitud, masa y capacidad.

Por todo ello, el trabajo para la construcción de magnitudes va a estar jalonado de numerosas actividades de clasificación y ordenación, por lo que el lector debe consultar el capítulo 4 de este libro para recoger las indicaciones que allí se formulan.

Por todo lo visto hasta ahora, las posibles etapas de una progresión en la enseñanza de las magnitudes son:

- Estimación sensorial. Apreciación de la magnitud.
- Comparación directa (sin intermediarios).
- Comparación indirecta (uso de un intermediario).
- Elección de una unidad. Cambios.
- Sistemas de medida irregulares.
- Sistemas de medida regulares.
- El sistema legal: S.M.D.

De manera general, y como ya se ha apuntado antes, el trabajo en Educación Infantil alcanzará hasta la etapa las comparaciones indirectas, dejando ya

[9] Extraído de Ermel: *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*, Cycle Élémententaire, Sermap, OCDL, París, 1978.

para Educación Primaria la construcción de la noción de unidad, por lo que no vamos a detenernos en las etapas finales.

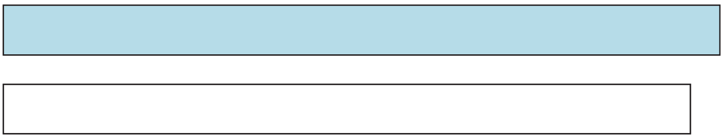
*Estimación sensorial.* Los sentidos deben proporcionarnos las informaciones pertinentes para decantar el atributo medible del resto de los que concurren en los objetos. Se trata de aislar el atributo que define la magnitud.

Para ello dispondremos en el aula de objetos suficientes en cantidad y variedad para proporcionar al niño contextos ricos que le exijan comparar, enfrentándolo en la medida de lo posible a las dificultades que conlleve el aislamiento de la magnitud. El alumno debe aprender a observar lo necesario, separando las informaciones pertinentes de las interferencias.

*Comparación directa.* El alumno debe construir los criterios de equivalencia y orden respecto de las magnitudes lineales. Las comparaciones directas van a proporcionar al niño situaciones para que vaya construyendo las condiciones de conservación de las cantidades de cada magnitud.

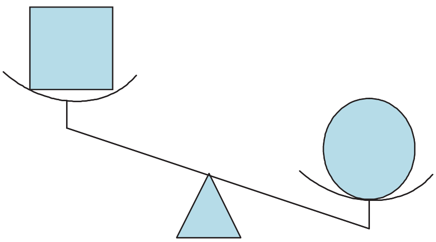
Si la diferencia de los objetos respecto de la magnitud correspondiente es importante, el niño los comparará de manera instantánea, sin necesidad de recurrir a ningún procedimiento específico de comparación. Será necesario por tanto disponer de objetos en los que la comparación necesite ser más cuidadosa, para hacer emerger los procesos de comparación:

*Longitud:* al superponer los extremos de dos bandas, por ejemplo, el otro extremo indica cuál de las dos es más larga.



*Capacidad:* necesitamos recurrir al trasvasado de líquidos de un recipiente a otro para determinar si el líquido de uno de ellos rebosa o no en el otro. Las decisiones basadas en la altura de los recipientes suelen ser fuente de numerosos errores.

*Masa:* la comparación directa se realiza con el sopesado de los objetos en las manos, o bien con el uso de una balanza de doble platillo. Aquel objeto que haga descender el platillo en el que se encuentra es el más pesado.



*Tiempo:* se trata de la magnitud más compleja sin lugar a dudas. Especialmente porque las comparaciones directas son muy poco frecuentes, y el criterio de comparación exige una cierta capacidad de deducción sin tener la información perceptivamente presente.

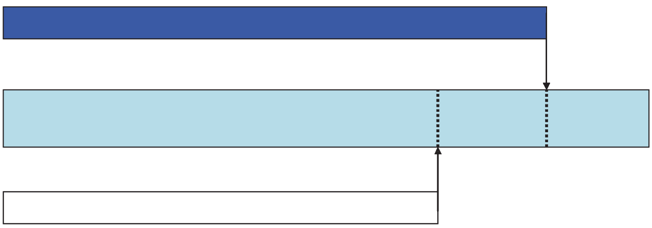
Si hago coincidir el inicio de dos sucesos, aquel que termine más tarde es el de mayor duración. De todas maneras, la concurrencia de otras informaciones cuantitativas, que confluyan con el suceso, suelen predominar sobre esta deducción. Aunque lo pueda contradecir la secuencia de los instantes finales de los movimientos, si dos coches salen a la vez, el niño tenderá a pensar que el que recorra más espacio es el que se mueve más tiempo.

**Actividad 5:** Reflexione acerca de las posibilidades cotidianas que provocan comparaciones directas respecto de cualquier magnitud. La escuela debe proporcionar contextos para que el niño disponga de una experiencia rica, aunque su entorno diario no lo favorezca.

*Comparación indirecta.* En muchas ocasiones no es posible el desplazamiento de los objetos para compararlos directamente, bien por su coste físico (si los objetos son pesados su desplazamiento exige un gran esfuerzo), bien por su imposibilidad absoluta, como ocurre en muchas ocasiones con las duraciones. El niño deberá servirse de un intermediario, aunque esto no suponga todavía una medida común e independiente.

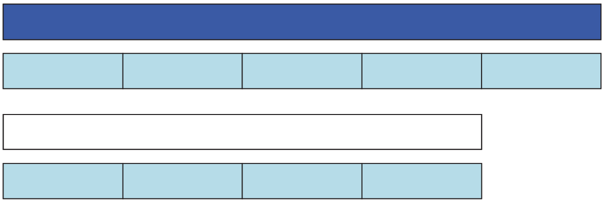
La comparación indirecta puede realizarse de dos maneras:

- Usar como intermediario un objeto más grande (respecto de la magnitud que corresponda), marcando en él una cantidad equivalente a la de uno de los objetos que se van a comparar. Luego se compara esta marca con la correspondiente al otro objeto.



Imaginemos, por ejemplo, que quiero saber si un armario va a poder pasar por una puerta. Tomo una cuerda y marco en ella la longitud correspondiente a la altura del armario (también lo deberé hacer con la anchura). Me desplazo a la puerta y comparo su altura con la marca de la cuerda. Estas comparaciones no implican medida, aunque sean indirectas. No necesitan de informaciones numéricas.

• Si disponemos de una cantidad suficiente de objetos iguales (respecto de la magnitud que estemos considerando), podemos entonces reproducir con éstos una cantidad de magnitud equivalente a cada uno de los objetos. Basta entonces con conocer el número de objetos utilizados en cada objeto para poder compararlos.



En el caso anterior del armario, puedo contar los palmos de la altura del armario y la de la puerta. Aquella longitud que necesite menos palmos será menor.

En este procedimiento, más depurado que el anterior, aparece ya el uso de un patrón que se repite, lo que desembocará en la construcción de la unidad de medida.

Como ya hemos adelantado, los primeros patrones surgen de las partes del cuerpo, se trata de las primeras medidas llamadas antropométricas. Naturalmente el uso de este tipo de unidades presenta algunas dificultades asociadas a su falta de homogeneidad. Pueden dar buenos resultados cuando es el mismo individuo el que mide «con sus palmos» ambos objetos, pero surgen problemas cuando la medida es realizada por individuos distintos, con palmos distintos.

Hacemos referencia a la necesidad de la uniformidad de la unidad de medida. La unidad puede ser arbitraria, pero debe estar convenida por todos[10]. Sólo así cumple satisfactoriamente su función. Nos encontraríamos ya en la siguiente etapa de la progresión, que entendemos debe ser objetivo de Educación Primaria.

**Actividad 6:** Investigue las distintas unidades de diferentes magnitudes que se hayan utilizado en su entorno, incluso que se sigan utilizando. ¿Qué ocurre con la magnitud tiempo? ¿Existen unidades distintas a las unidades legales?

No queremos terminar sin apuntar un hecho significativo en las comparaciones indirectas. Se trata del problema de la transitividad en las comparaciones. Ya se ha visto que la operatividad de la propiedad transitiva no surge en los primeros estadios de construcción de la noción de medida. La verificación material de la propiedad transitiva es importante psicológicamente para mu-

[10] La necesidad de universalizar las unidades dio pie a la configuración del Sistema Métrico Decimal, cuyo uso está regulado incluso por disposiciones de carácter legal.

chos niños, actuando los objetos en muchas ocasiones como soportes de la memoria visual. La necesidad de utilización de la transitiva se produce cuando sólo podemos comparar pares de objetos. Si disponemos de varias bandas de distintas longitudes, es posible disponerlas en forma de escalera, lo que nos permite visualmente establecer la ordenación total sin hacer un uso explícito de la propiedad transitiva. Sin embargo, para comparar la masa de objetos con la balanza de doble platillo, la visualización del orden total no es posible. Es frecuente observar a los niños repitiendo pesadas innecesarias para conocer el objeto más pesado de entre varios.

Desde un punto de vista didáctico, es importante enfrentar al niño a esta necesidad de utilizar la transitividad en las comparaciones.

## 10.6. El trabajo con la magnitud longitud

Quizá la longitud sea la magnitud más trabajada en la educación elemental. Es la que menos dificultades perceptivas genera para su aprehensión, hasta el punto de que se convierte en una magnitud intermediaria para la medida de muchas otras. Esta frecuencia de uso produce también no pocos obstáculos en la construcción de otras magnitudes[11].

**Actividad 7:** Estudie las actividades de comparación o medida en otras magnitudes que al final se resuelven con lecturas de medidas de longitudes.

### Longitud y distancia

Antes de detenernos en el trabajo sobre la longitud creemos necesario hacer unas precisiones acerca de la relación entre longitud y distancia.

En objetos «llenos» la longitud se apoya en un soporte físico. La distancia hace referencia al espacio vacío entre dos objetos. Las dos nociones se complementan, pero el niño puede no aproximarse a ambas de la misma manera. La representación de la distancia no se podrá resolver hasta que se logre la de línea recta, concepto al que está directamente ligado.

Para elaborar la noción de distancia el niño debe llegar a tres conclusiones:

– Conservación de la distancia entre dos objetos, aunque se interpongan otros objetos entre ellos.

[11] Léase el capítulo 9 de Chamorro (2003) para profundizar en los obstáculos que genera la longitud para la adquisición de la superficie y el volumen.

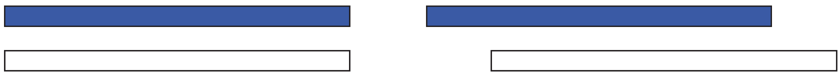
– Simetría de la distancia: $d(A,B) = d(B,A)$.
– Desigualdad de la distancia $d(A,C) < d(A,B)$ si C está colocado entre A y B.

Piaget asegura que hasta los 7 años no se consolidan estas propiedades.

## El aislamiento de la longitud

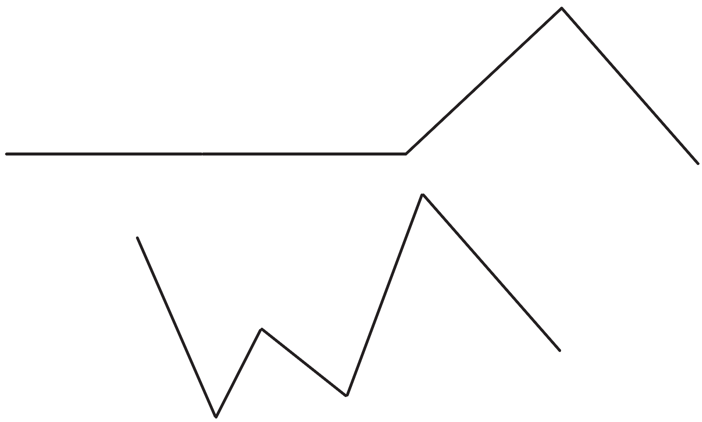
Son tres los aspectos que hay que tener en cuenta en las dificultades que encuentra el niño para aislar la longitud: los cambios de posición, de forma y la descomposición/recomposición.

Los niños pueden no conservar la igualdad de dos longitudes cuando una de ellas sufre un desplazamiento:



Los niños evalúan la longitud en función de la posición de los extremos finales de las bandas sin tener en cuenta la posición de los iniciales.

Igualmente, ante cambios de formas, el niño tiende a emitir juicios basados en aspectos no determinantes para la evaluación de las longitudes: la posición de los extremos, el número de curvas, el número de segmentos.



Por último, la descomposición de una banda en partes y su posterior recomposición puede provocar juicios erróneos respecto a la conservación de la longitud final.

## Algunas indicaciones para el trabajo en Educación Infantil

Debe aparecer el vocabulario propio de la longitud: corto, largo, alto, bajo, ancho, estrecho, delgado, grueso. La construcción de la magnitud longitud necesitará apoyarse en un sistema de formulación adecuado.

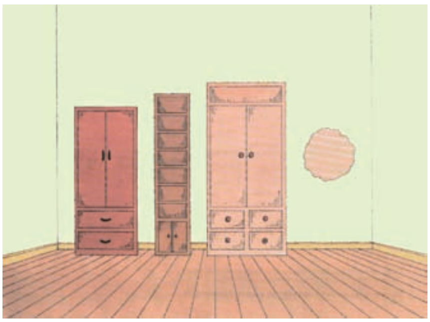
**Actividad 8:** Estudie las ocasiones de la vida cotidiana en las que utilizamos un vocabulario más genérico (grande/pequeño) para referirnos a comparaciones de cantidades de longitud.

Es importante que en el aula se disponga de una variedad de objetos longitudinales (en los que predomine de manera ostensiva la longitud), rígidos, flexibles, rectos, curvos, extensibles (gomas elásticas), inextensibles, que permitan encajarse, etc. En estos objetos la longitud es el atributo predominante, por lo que el niño no debe realizar grandes esfuerzos en su decantación. No deben ser los únicos con los que el niño trabaje, pero en muchos momentos serán necesarios para abordar determinadas tareas.

Con este material se diseñarán actividades que comporten:

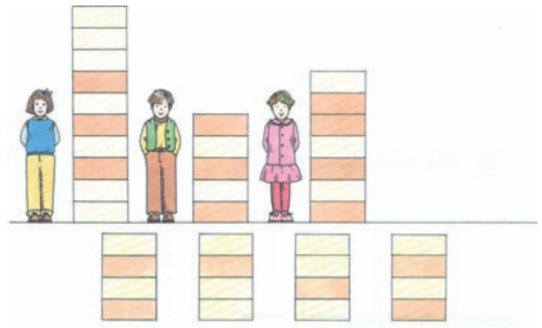
- Clasificar bandas u otros objetos según la longitud.
- Ordenar un conjunto de bandas según sus longitudes.
- Comparar estaturas de los niños sirviéndose de cuerdas, o bien con bandas encajables.
- Comparar estaturas de los niños a lo largo del curso.
- Dada una banda, construir otra de igual longitud mediante la composición de otras bandas, iguales o no.
- Verificar, sin mover determinados objetos, si pueden caber en algunos huecos.
- Establecer ordenaciones de objetos que no pueden compararse directamente a partir del uso de unidades antropométricas, o bien de patrones comunes.

Veamos dos ejemplos extraídos de Chamorro y Belmonte (1996):



*Rodea los muebles que pueden cubrir totalmente la mancha si los ponemos delante.*

Con esta actividad se intenta desarrollar la comparación indirecta de longitudes que están dispuestas en direcciones privilegiadas (anchura).



*Construye, recortando los bloques de abajo, una torre más alta que todas las que han construido los niños, y otra más baja.*

El objetivo de esta actividad es iniciarse en la comparación indirecta de longitudes con un patrón que se repite utilizando el número.

## 10.7. El trabajo con la magnitud masa

Estamos quizá con una de las magnitudes que ofrecen una percepción sensorial más inequívoca, aunque esto no quiera decir que no existen distintas interferencias para su aislamiento. En edades tempranas el niño constata la diferencia de masa de distintos objetos a partir del esfuerzo que debe realizar para transportarlos.

Desde un punto de vista físico, la masa y el peso son magnitudes distintas. La masa es una magnitud escalar, por lo que sus cantidades se expresan con un número. El peso es una fuerza, que necesita, además del número, una dirección y un sentido; se trata de una magnitud vectorial. Pero es el peso de los objetos el que nos permite apreciar la masa, lo que provoca que en estas edades estas magnitudes sean indistinguibles. Habrá que esperar a la Educación Secundaria para que el alumno conozca los distintos modelos correspondientes a estas dos magnitudes.

### El aislamiento de la magnitud masa

Son dos las principales interferencias que dificultan el asilamiento de la masa de las otras informaciones perceptivas de los objetos: el volumen y la descomposición/recomposición.

Es habitual en el niño –¡y en adultos!– evaluar el orden de las masas de dos objetos por su volumen. El adulto es consciente de que la información que le proporciona la vista no va a ser siempre coherente con la que le va a proporcionar su sistema kinestésico[12], por lo que la primera apreciación suele corregirse. Es otra magnitud la que relaciona estas dos: la densidad, cuyo estudio deberá esperar a Secundaria.

En cuanto a la descomposición y posterior recomposición de un objeto, al igual que en el caso de la longitud, puede provocar juicios erróneos respecto a la conservación de la masa de un objeto. Así, si descomponemos una masa de arcilla en diversos trozos, puede que el niño entienda que la masa resultante ya no es la misma.

## Algunas indicaciones para el trabajo en Educación Infantil

Naturalmente en el aula de Educación Infantil se debe disponer de balanzas de doble platillo que permitan comparar la masa de dos objetos. No se trata de instrumentos de precisión, sino de las sencillas que existen en el mercado para uso escolar, cuya construcción y mecanismo es absolutamente elemental.

También es importante que dispongamos de objetos de densidades diversas, que pueden ir desde objetos macizos de materiales como el porespán a objetos metálicos macizos con densidad más alta.

Hay que tener cuidado de no usar a menudo objetos vacíos para conseguir objetos de menor masa. El niño conoce el diseño de estos objetos, y no va a ayudarle a aislar el volumen de la masa: «Dentro no hay nada, por eso pesa menos». No es ése el problema.

Los materiales continuos (arena, plastilina, arcilla, etc.) son especialmente indicados ya que nos permiten materializar la masa de otros objetos, además de unirlos y separarlos a voluntad.

Con esos objetos se realizarán actividades que comporten:

– Sopesar, utilizando las manos como platillo de una balanza, objetos para averiguar cuál es más pesado.

– Utilizar la balanza de doble platillo dando significación[13] a las distintas posiciones que presente: equilibrada o no.

*Continúa*

[12] Terminaciones nerviosas distribuidas por todo el aparato locomotor que informan constantemente del estado (posición, tensión) de huesos, músculos, tendones y articulaciones.

[13] Esto que parece una obviedad no lo es tanto. La práctica social nos ha acostumbrado a otras balanzas, que en realidad no comparan objetos, sino que ofrecen ya su medida en las unidades legales (gramos). La balanza de doble platillo sólo dispone de dos lecturas: equilibrada o no. No se desequilibra más porque algún objeto pese más. No gradúa.

*Continuación*

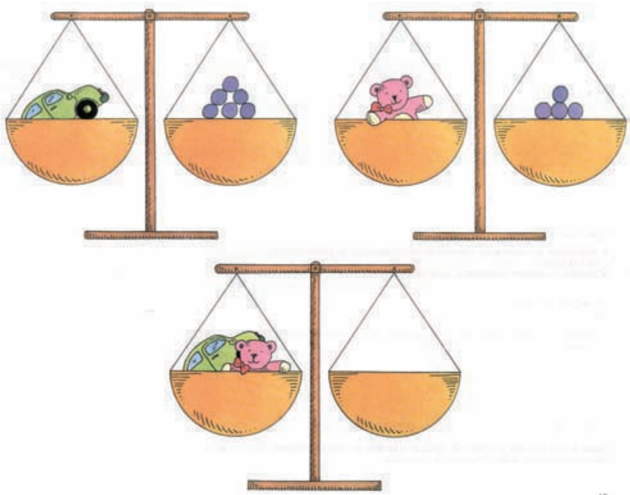
– Utilizar la balanza para comprobar comparaciones realizadas con las manos.

– Ordenar conjuntos de más de tres objetos en función de su masa, bien sopesando con los brazos o utilizando la balanza.

– Equilibrar un objeto con varios objetos, o bien con bolas de plastilina o arcilla fabricadas al efecto.

**Actividad 9:** Identifique qué contextos y situaciones no alejadas de la vida cotidiana del niño pueden exigir el establecimiento de comparaciones indirectas de masas.

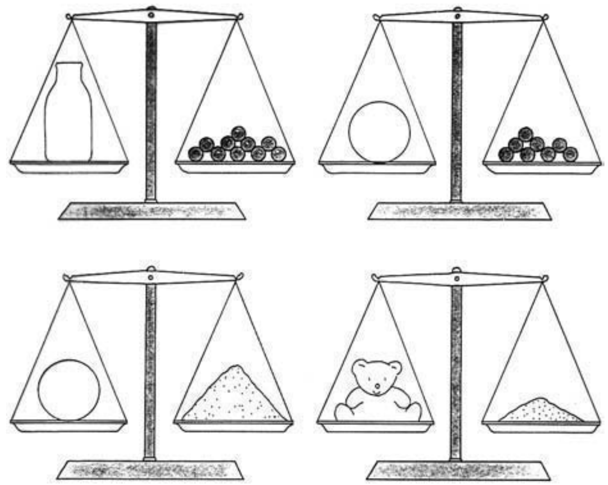
Veamos un ejemplo extraído de Chamorro y Belmonte (1996):



*Rodea de azul el juguete que pesa más. Dibuja en la balanza de abajo las bolas que necesitas en el platillo para que esté equilibrada.*

Intentamos iniciar al niño en la comparación indirecta de masas utilizando un patrón/unidad que se repite. Además debe utilizar el carácter aditivo de la masa de los objetos.

Veamos otro, extraído del material del alumno del Proyecto Pecas[14]:



*En esta balanza hemos pesado una botella, un balón y un osito. Ordénalos de mayor a menor peso.*

En primer lugar el niño debe comparar las masas de los objetos dos a dos a partir de un intermediario, en un caso un patrón que se repite y en el otro un material continuo. Después el niño se ve forzado a utilizar la transitiva si quiere ordenar esos tres objetos.

## 10.8. El trabajo con la magnitud capacidad

Se trata, junto con la longitud, la superficie y el volumen, de una magnitud espacial. Físicamente no presenta diferencias con el volumen, pero sus modelizaciones matemáticas son muy distintas: la capacidad es una magnitud lineal y el volumen trilineal.

Dispone además de un procedimiento de comparación directa muy elemental: el trasvasado de líquidos entre recipientes.

### El aislamiento de la magnitud capacidad

Las principales interferencias que dificultan el asilamiento de la capacidad de las otras informaciones perceptivas de los objetos son la forma y la descomposición/recomposición.

[14] VV.AA.: Proyecto Pecas, Alambra-Longman, Madrid, 1995.

Ante dos recipientes de distinta forma es habitual evaluar la capacidad por su altura. Con niños de determinadas edades, aunque el trasvasado de líquidos se haga en su presencia, la percepción visual de la altura predomina sobre la cantidad de líquido.

En cuanto a la descomposición y posterior recomposición de la capacidad de un recipiente, al igual que en otras magnitudes, puede provocar juicios erróneos respecto a la conservación de la cantidad. Si repartimos el contenido de un recipiente entre otros recipientes, puede que el niño entienda que la cantidad de líquido resultante ya no es la misma.

### Algunas indicaciones para el trabajo en Educación Infantil

En el aula debemos disponer de la posibilidad de manipular agua o arena. También debe haber recipientes de muy diversas formas y capacidades, opacos y transparentes.

Con estos materiales se realizarán actividades que comporten:

- Clasificar recipientes, localizando aquellos que tienen la misma capacidad, a partir del trasvasado de líquidos.
- Comprobar, mediante el trasvasado de líquidos, las estimaciones de las comparaciones de las capacidades de distintos recipientes.
- Ordenar conjuntos de más de tres recipientes en función de su capacidad.
- Llenar recipientes sirviéndose de otros más pequeños, lo que permite la comparación indirecta de dos recipientes contando el número de veces que se ha necesitado el recipiente pequeño para llenar cada uno de ellos.
- Realizar comparaciones indirectas a partir del marcado en algún recipiente transparente.

## 10.9. El trabajo con la magnitud tiempo

Hemos querido dejar para el final la magnitud tiempo, que presenta grandes especificidades, todas ellas derivadas de la imposibilidad de utilizar la percepción sensorial.

Sin embargo, es quizá la magnitud que manejamos con más asiduidad; observemos que estamos rodeados de los instrumentos de medida del tiempo, además de llevarlos habitualmente con nosotros: los relojes.

Por ello hemos considerado conveniente exponer aquí algunos apuntes acerca de su construcción por parte del niño.

## 10.9.1. Psicogénesis de la noción de tiempo

### 10.9.1.1. La controversia entre Piaget y Fraisse

Son numerosos los trabajos que intentan ofrecer alguna explicación o modelo acerca de la adquisición de las nociones temporales por el niño, naturalmente todos ellos en el campo de la Psicología, especialmente en Psicología genética, cognitiva y de la percepción. Dentro de estos trabajos es imprescindible destacar dos grandes obras que centraron en torno a ellas gran parte de las discusiones y avances en este campo. Piaget publica en 1946 *Le développement de la notion de temps chez l'enfant* (traducida al español en 1978) completado en los siguientes veinte años por sus colaboradores del Centro Internacional de Epistemología Genética. Por otra parte, en 1967 Paul Fraisse publica la obra más completa sobre Psicología del tiempo, *Psychologie du temps*[15], e introduce bastantes novedades sobre los trabajos piagetianos provocando una famosa controversia, al parecer amistosa, y que resultó extraordinariamente fecunda en posteriores investigaciones.

Piaget y Fraisse coinciden en los siguientes aspectos:

- En un principio, la intuición del tiempo es relativa a su contenido, lo que ocurre en ese tiempo.
- El progreso fundamental en la estimación de la duración se produce cuando el niño es capaz de tener en cuenta simultáneamente varios índices.
- El tiempo operatorio se constituye cuando el orden de sucesión puede deducirse del encajamiento de duraciones y recíprocamente.
- El niño se centra primero en los estados o configuraciones, de manera independiente a las transformaciones de las que resultan.

Pero, como hemos dicho, fueron las diferencias entre las ideas de Piaget y Fraisse las que dinamizaron parte de los estudios posteriores. Estas diferencias surgían de la siguiente pregunta: ¿es el tiempo una intuición elemental –inmediata, primaria– o es fruto de una intuición resultante? En mecánica clásica, el espacio y el tiempo constituyen dos magnitudes fundamentales, mientras que la velocidad es una relación que se establece entre ellas. Para Piaget (1978) el espacio y la velocidad constituyen intuiciones inmediatas, mientras que el tiempo se va a construir a partir de ellas.

El espacio que han recorrido dos móviles puede ser comparado en muchas ocasiones de una manera directa, casi perceptiva, y las velocidades pueden ser intuidas directamente cuando se produce el adelantamiento de móviles. El tiem-

[15] Fraisse, P.: *Psychologie du temps*, PUF, París, 1967.

po es, de esta manera, la relación entre lo que se hace (espacio recorrido en el caso de los móviles) y la velocidad a la que se produce el cambio (velocidad de movimientos, rapidez de la acción, o de estados de conciencia sucesivos, etc.).

De esta manera, para Piaget, no hay tiempo sin intervención de la «velocidad», aunque en los primeros estadios ésta es despreciada frente a los resultados de la acción, y el niño juzga las duraciones según éstos últimos, lo que le lleva a concluir que «más rápido ⇒ más tiempo». Posteriormente, el niño, según Piaget, coordina el espacio recorrido, o el trabajo realizado, con la velocidad de realización, lo que le conducirá a juicios correctos «más rápido ⇒ menos tiempo».

Para Fraisse (1967, 290):

> Los niños pequeños en el estadio preoperatorio juzgan la duración según un solo índice, pero este índice varía de un individuo a otro y de una situación a otra. Estos índices son muy diversos. Unos están en relación con el resultado de la acción, otros con la actividad desplegada, otros con los cambios percibidos. No nos parece, pues, que haya un estadio preoperatorio donde los niños estimen solamente las duraciones por los índices de lo que se hace (más trabajo, más velocidad, más lejos, etc.). Es evidente que el niño es más sensible a estos índices que son relativos al resultado de la acción que a lo que él percibe a lo largo de la acción, pero esta tendencia no es absoluta.

Esta discrepancia es quizá más importante en cuanto a la consideración del tiempo como una resultante de la coordinación del espacio y la velocidad. Fraisse (1967, 295) afirma:

> Nosotros tenemos tendencia, al contrario, a pensar que la duración es, como la distancia, una cualidad simple. Tiempo y espacio son perceptivamente dependientes de su contenido y producen el mismo tipo de ilusiones [...]. La cualidad primera correspondiente a la duración es tanto la de distancia considerada primero por el sujeto en relación con sus recuerdos o sus deseos como entre dos sucesos[16]. Por otra parte, en cuanto a la fenomenología del lenguaje, el niño (como el adulto) utiliza para hablar de la duración tanto el vocabulario del espacio como el de la velocidad. El niño llega poco a poco a abstraer la duración como el espacio de su contenido.

### 10.9.1.2. Teoría de los factores interferentes

Como habíamos visto en el caso de Piaget no se entendía la construcción de la noción de tiempo en el niño sino partiendo de la velocidad, mientras que Fraisse afirma que el tiempo se construye directamente y que los niños pequeños hacen usos de distintos índices (no necesariamente los proporcionados por

[16] Fraisse afirma en otro momento de su obra: «En resumen, el estudio de diversas circunstancias donde se manifiestan los sentimientos de tiempo permite afirmar que estos tienen su origen en la toma de conciencia de una frustración que nos impone el tiempo. O bien impone un retraso en la satisfacción de nuestros deseos presentes, o bien nos obliga a prever el fin de nuestro bienestar actual. El sentimiento de duración nace así de la confrontación de lo que es y de lo que será, es decir, del intervalo que separa dos sucesos» p. 221.

la velocidad) para realizar sus primeras estimaciones. Pero ¿cuáles son éstos índices?, ¿podemos comparar su incidencia? Las investigaciones de Iris Levin intentan responder a estas cuestiones. Levin se propuso modificar sistemáticamente las situaciones presentadas a los niños con el fin de distinguir los diferentes factores que interfieren la toma de decisiones para comparar duraciones. En un primer momento Levin (1977)[17] presenta tres tipos de problemas: uno con desplazamiento lineal, otro con movimiento rotatorio y otro desprovisto de datos cinemáticos (encendido de lámparas) y constata que la experiencia con desplazamiento lineal es la que más dificultades provoca en los niños.

Al analizar las causas de la interferencia, Levin afirma que la confusión no preexiste conceptualmente, sino que ella se debe a los datos de cada situación. Es más (Levin[18], 1982) asegura que ni la dirección ni la extensión de la interferencia dependen de la relación lógica que tenga con el tiempo (llega a interferir la luminosidad de las lámparas), al menos cuando la interferencia es manipulada aisladamente. Concluye que el factor interferente no refleja confusiones conceptuales entre los distintos aspectos y la duración, sino más bien la tendencia general a adoptar cualquier aspecto predominante como relevante en la comparación que se lleva a cabo. Los niños preescolares suelen asumir que «algo más es más tiempo». No obstante, Levin asegura que es explicable que los niños utilicen datos espaciales con más frecuencia que otro tipo de factores debido a razones de percepción e incluso conceptuales.

Ahora bien, tras los trabajos de Levin podríamos preguntarnos: ¿es posible presentar una tarea temporal sin ningún factor interferente? Y para construir un concepto, ¿es suficiente con aislarlo de sus interferencias?

### 10.9.1.3. El tiempo convencional: síntesis de múltiples aspectos del tiempo

El tiempo convencional, o mejor dicho, los sistemas convencionales de medida del tiempo juegan un papel especialmente importante en la adquisición del concepto de tiempo. Es quizá uno de los aspectos más distintivos con respecto a la construcción intelectual de otras magnitudes, en los que el sistema convencional de medida (Sistema Métrico Decimal) no juega un papel muy relevante en los primeros aprendizajes sobre la magnitud. La necesidad de utilizar distintos factores, en muchos casos ajenos al tiempo, para realizar razonamientos temporales, hace que los sistemas convencionales de medida de tiempo supongan por sí mismos herramientas muy tempranas en el manejo de tareas temporales.

[17] Levin, I.: *The development of time concepts in young chidren: reasoning about duration*, Child Development, 48, 1977, 435-444.

[18] Levin, I.: *The nature and development of time concepts in children: The effects of interfering cues*, en W. J. (ed.): *The developmental psychology of time*, Academic Press, Nueva York, 1982, 47-85.

Los trabajos de Friedman son especialmente interesantes porque superan el plano puramente descriptivo propio de muchas investigaciones en Psicología experimental, y analizan las estructuras y los procesos que se ponen en juego.

Así, en Friedman (1982), el autor muestra que para comprender el tiempo convencional es necesario controlar las tres nociones siguientes:

- El orden de sucesión temporal, que organiza la secuencia de los elementos de un sistema.
- El intervalo o duración de cada elemento o de la totalidad de la secuencia.
- La idea de ciclo (orden y recurrencia).

A esto hay que añadir que los sistemas convencionales de medida del tiempo deben poderse articular con el horizonte temporal (pasado, presente y futuro).

El mismo autor (Friedman[19], 1990) establece una especie de etapas en el desarrollo de los conocimientos ligados a los sistemas de medida de tiempo, evolución que se presenta muy condicionada por multitud de factores:

a) Los niños pequeños son conscientes de las rutinas diarias.

b) Antes de la edad escolar los niños aprenden ciertos nombres relativos a los cálculos de tiempo y asocian algunos de estos nombres a sus actividades personales, pero el conocimiento que tienen de los conceptos temporales es sin embargo muy fragmentado.

c) El aprendizaje de los días de la semana o los meses del año comienza como el aprendizaje de otras listas de palabras, como la cantinela numérica.

d) Entre 6 y 8 años conocen ya las series convencionales como los días de la semana y los meses del año, y asocian a estos conceptos un gran número de informaciones ligadas a su experiencia personal, alargando su conciencia temporal al año, aunque todavía tienen dificultades para efectuar determinadas operaciones más complejas que exijan aplicar la recurrencia de los ciclos asociados, así como para integrar los distintos subsistemas.

e) La capacidad de efectuar operaciones sobre el sistema global de efectuar operaciones lógicas sobre el tiempo a partir de los sistemas convencionales no aparecen antes de los 9 años, y no es antes de los 9-11 años cuando son conscientes de la naturaleza arbitraria de las convenciones temporales.

[19] Friedman, W. J.: *About time: Inventing the fourth dimension*, Cambridge (MA), MIT Press, 1990.

#### 10.9.1.4. Génesis de la noción de duración en el niño

Centrémonos ahora en la noción de duración, noción sobre la cual se debe sustentar el modelo de construcción del tiempo como magnitud medible, si queremos seguir un proceso análogo al de las otras magnitudes lineales como la longitud, masa o capacidad.

Es Montangero quien más profusamente ha estudiado el desarrollo de la noción de duración en el niño y propone distinguir dos tipos de inferencia sobre la estimación de duraciones (Montangero[20], 1977, 44):

> Modo físico:
>
> «El razonamiento se basa en el contenido de los acontecimientos: trabajo completado (distancia recorrida, número de objetos desplazados, etc.) y velocidad principalmente. Los órdenes temporales entran a veces en estos razonamientos para situar las etapas de cambios observados. El objetivo de tales inferencias es esencialmente el de explicar los cambios relativos de dos sucesos.
>
> Ej. 1 "El niño ha jugado más tiempo que la niña porque ha cogido más dados".
>
> Ej. 2: "Brunette ha salido antes, pero Blondine ha ido más deprisa, luego ellas han llegado al final del camino a la vez; las dos han andado durante el mismo tiempo"».
>
> Modo lógico:
>
> «El razonamiento no se apoya en ninguna referencia al contenido físico de los sucesos, sino que se basa en los órdenes temporales relativos para intentar deducir las duraciones que ellos delimitan.
>
> Ej. 1: "Han estado el mismo tiempo porque han comenzado juntos y han terminado juntos".
>
> Ej. 2: "La bombilla azul ha estado encendida más tiempo que la roja porque se ha encendido primero, y después se han apagado a la vez"».

Estos dos modos se construyen para Montangero de una manera simultánea y asegura que la comprensión completa de duración se realiza interactuando tres subsistemas (Montangero[21], 1984, 448): «Una sucesión de instantes y un intervalo delimitado por los extremos inicial y final; un flujo medible por una velocidad constante y una dimensión en relación con una cantidad espacial; y por último un intervalo periódico y en relación con una cierta cantidad de sucesos discretos (número)».

## 10.9.2. Algunas indicaciones para el trabajo en Educación Infantil

Los trabajos que se van a desarrollar en Educación Infantil deben organizarse en torno a dos aspectos:

---

[20] Montangero, J.: *La notion de durée chez l'enfant de 5 á 9 ans*, Paris, PUF, 1977.

[21] Montangero, J.: *Perspectives actuelles sur la psychogenèse du temps*, L'Anée Psychologique, 84, 1984, 433-460.

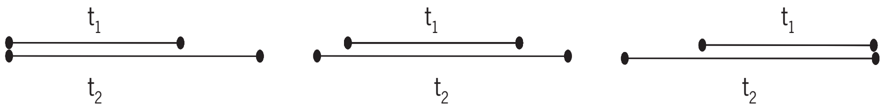
– La noción de duración, que con sus especificidades responderá aproximadamente a los trabajos de otras magnitudes.

– Los sistemas convencionales de medida del tiempo, que como hemos visto juegan un importante papel de manera temprana en la misma construcción de la magnitud, lo que no ocurre en las otras.

Por lo que respecta a la noción de duración, se realizarán actividades que comporten:

> – Comparar la duración de desplazamientos de cochecitos (de cuerda por ejemplo), u otros objetos que se desplacen.
>
> – Comparar duraciones de movimientos que no supongan un desplazamiento lineal (por ejemplo, peonzas), o sucesos que no dejen traza.
>
> – Comparar duraciones de intervalos sonoros, bien sean canciones o sonidos más cortos.

Es importante que todas estas comparaciones permitan al alumno decidir los instantes de inicio de los intervalos temporales que se comparan. Posteriormente se fijarán los inicios y finales, procurando que se presenten las siguientes posibilidades:




Veamos un ejemplo de actividad:

**Las bailarinas**

**Material:**

Se trata de una especie de metrónomos elementales que tras ponerlos en marcha se paran al cabo de un tiempo predeterminado. Contamos con cuatro de distintos colores y que se mueven respectivamente durante 5, 10, 15 y 20 segundos aproximadamente.

Este material va a provocar que la comparación no se pueda realizar por ningún dato cinemático (velocidad, espacio recorrido) ni de frecuencia o trabajo realizado. Según terminología de Montangero nos situamos en el «modo lógico» de comparación de duraciones.

*Continúa*

*Continuación*

La actividad se desarrolla en tres fases:

1. En una primera se presentan los metrónomos presentándolos como bailarinas. Los niños aprenden su manejo y se les hace notar que cada una siempre baila «lo mismo», es decir, el mismo tiempo.
2. Después, en grupos de cuatro, se les proporcionan las de 10s (roja), 15s (amarilla) y 20s (verde) y se trata de decidir qué bailarina es la que baila más tiempo. Estas duraciones hacen poco fiable los procesos de comparación por estimación directa, no así el de 5 segundos que de manera inmediata se identifica como la de menos duración.
3. En la última fase, se trabaja de dos en dos siguiendo el siguiente proceso: los dos niños se sientan enfrentados y se les proporcionan los metrónomos de 20s y 15s (este último camuflado por si alguno recuerda los colores), con el objeto de decidir cuál baila más. Se permite que puedan ser lanzados los dos por un solo alumno. Después se retira el de 20s y se les presenta el de 10s (quedando pues para comparar el de 15s y el de 10s) pero ahora se le entrega uno a cada uno y no es posible que un mismo alumno lance los dos a la vez. De esta manera queremos observar si el alumno plantea de forma explícita la necesidad de simultaneidad de los instantes de inicio para poder comparar con éxito las duraciones.

Es importante destacar que aquí no se les proporciona a los niños unas duraciones con instantes de inicio y final fijados, sino que es él mismo quien debe tomar la decisión de organizar la sucesión o simultaneidad de inicios.

Cuando se trata de comparar dos duraciones reproducibles a voluntad el esquema algoritmizado correspondiente consiste en hacer coincidir los inicios de ambas duraciones y razonar a partir de los finales: aquella cuyo final se produzca después es la duración mayor. Sin embargo, es frecuente que el niño compare las duraciones a partir de la secuencia de los finales, aunque este esquema sea defectuoso y provoque errores si no se tienen en cuenta los órdenes de comienzo.

Cuando un único alumno maneja las dos bailarinas, la gran mayoría las lanza a la vez, con lo que se obtiene una comparación correcta.

Esta exigencia de coincidencia de comienzos es más crítica cuando las dos bailarinas que se van a comparar no son manejadas por el mismo niño. La necesidad de coordinación exige explicitar la simultaneidad en el comienzo.

A las edades de 5 ó 6 años son una minoría los que de manera explícita hacen constar esa necesidad («*Cuando yo diga las lanzamos. Preparados, ¡ya!*»). Los restantes no coordinan el comienzo y sólo se fijan en la secuencia de finales.

Con respecto a los sistemas convencionales de medida del tiempo, se realizarán actividades que comporten:

– Identificación de tareas cotidianas correspondientes a los intervalos de mañana, tarde y noche dentro del ciclo diario.

– Representación de las rutinas diarias de manera que permitan localizar otros acontecimientos en relación con ellas.

– Representación de las rutinas semanales de manera que permitan localizar otros acontecimientos en relación con ellas.

– Identificar algunos acontecimientos de su entorno próximo que tengan ciclo anual.

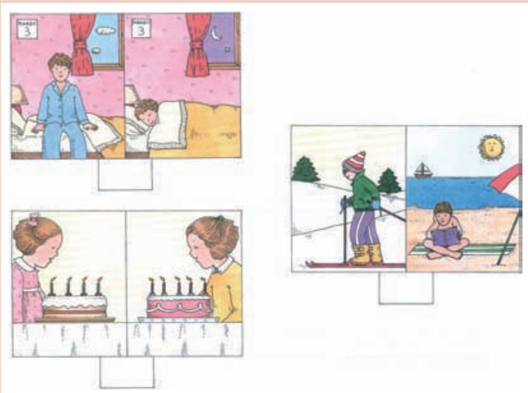
– Situar esos acontecimientos anuales en relación con ciertas partes del año (estaciones).

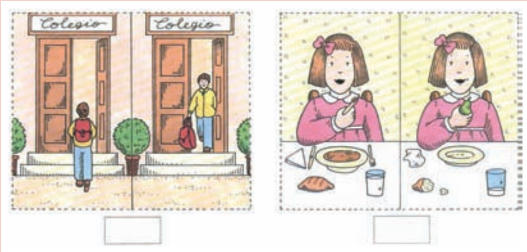
– Identificación de acciones cuyas duraciones puedan relacionarse con las distintas unidades convencionales como día, semana, mes y año.

– Construcción de una hoja de un mes de un calendario, reparando en la estructura de la disposición de los números/días.

**Actividad 10:** Identifique qué acontecimientos de su entorno, que pueda conocer un niño de Educación Infantil, presentan ciclos diarios, semanales, mensuales y anuales.

Veamos dos ejemplos gráficos extraídos de Chamorro y Belmonte (1996) en los que el niño debe comparar duraciones, pero utilizando referencias y localizaciones basadas en los sistemas convencionales de unidades temporales. En cada ficha figuran varias parejas de viñetas. Cada pareja se corresponde con un intervalo temporal que cuyo inicio y final viene marcado por las viñetas. Se trata de ordenar los intervalos según su duración.



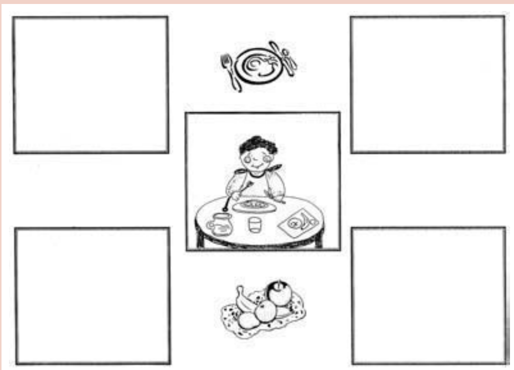



Otras actividades para la localización en los sistemas convencionales de tiempo pueden ser:

### Mañana y tarde

**Material:** Tarjetas gráficas representando a niños realizando distintas acciones que han podido desarrollar el día anterior. Estas acciones pueden ser las habituales de un día cualquiera, o bien haber sido diseñadas específicamente para que sean recordadas al día siguiente en esta actividad. Sirvan como ejemplo las siguientes que representan: llegar a clase, desayunar, ver la televisión, jugar en el parque y merendar.

A cada niño se le reparte entonces una ficha como esta:



En ella deben colocar dos acciones que hicieron por la mañana a la izquierda del niño comiendo, y a la derecha dos acciones que hicieron por la tarde.

Se intenta con esta actividad que identifiquen la mañana y la tarde como partes del día. En la sociedad española sólo la pausa de la comida de mediodía identifica la frontera entre ambas partes del día. No se pretende que se caractericen solo las acciones cotidianas, sino también que estas sirvan para ubicar temporalmente otras ocasionales.

Para niños del último curso de Educación Infantil la actividad anterior puede transformarse de manera que, al volver del fin de semana, puedan localizar determinadas actividades en la mañana, tarde o noche del sábado y domingo.

## 10.10. Bibliografía

CHAMORRO, M. C. (coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson, Madrid, 2003.

CHAMORRO, M. C., BELMONTE, J. M.: *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*, Síntesis, Madrid, 1991.

—: *Iniciación a la lógica matemática. Jugar y pensar 1 y 2*, Alhambra-Longman, Madrid, 1996.

FRIEDMAN, W. J. (ed.): *The developmental psychology of time*, Academic Press, Nueva York, 1982.

PIAGET, J.: *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño*, Fondo de Cultura Económica, México, 1978.

CAPÍTULO 11

# Hacia la idea de problema en Educación Infantil

M.ª del Carmen Chamorro y Francisco Vecino

## Contenidos

## 11.1. Introducción

En el D.C.B. de Educación Infantil no se encuentra traza alguna que indique la posibilidad de inclusión de un tema como este en el currículo de formación, inicial o continua, de los maestros de ese nivel y, sin embargo, para ser coherentes con la exposición de tópicos que venimos haciendo y con el papel de los problemas en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, deberíamos incluir este tema entre los componentes de un currículo que aspire a ser completo.

En efecto, la proposición y resolución de problemas es uno de los temas transversales que recorren toda la Primaria y la Secundaria y, si queremos que se establezcan los mínimos imprescindibles para preparar al niño a su entrada en los niveles posteriores de la educación, tendremos que contemplar la inclusión de un tema que vaya acercándole a la idea de problema.

Pero además, si entendemos la resolución de problemas como uno de los núcleos principales de la actividad matemática, no podremos renunciar a un elemento tan importante para la formación lógico-matemática del alumno de Educación Infantil. Debemos buscar una introducción al problema en su forma más amplia y en su resolución más libre, desvinculada de métodos o artificios de búsqueda de la solución y basada en el aprovechamiento máximo de los conocimientos (conceptos, teoremas, razonamientos, etc.) espontáneos del niño.

## 11.2. Objetivos

– Reflexionar sobre diferentes categorías de problemas y determinar las más adecuadas para su introducción en Educación Infantil.

– Estudiar los diferentes factores que intervienen en la resolución de un problema, prestando especial importancia al estudio del enunciado.

– Analizar diferentes modelos de resolución de problemas, estudiando su viabilidad y adaptación a la edad y al aula.

– Proporcionar técnicas para la elaboración de problemas.

– Estudiar las condiciones específicas de planteamiento y resolución de problemas en Educación Infantil.

– Prever y adecuar el cambio del contrato didáctico clásico al caso específico de la resolución de problemas en Educación Infantil.

## 11.3. Consideraciones metodológicas particulares

Parece evidente que la formación de los maestros en este tema debe articularse a partir de un trabajo fundamentalmente práctico, donde se establezcan las bases para una correcta introducción a la idea de problema. Ello requiere sustituir las concepciones sobre la idea de problema, entendido de forma tradicional, por una visión más amplia y más acorde con el objetivo fundamental de este tema: acercar a los niños a la idea de problema.

Habrá, sin embargo, una serie de términos específicos de la didáctica correspondiente que será preciso introducir de forma teórica, para situarse desde un punto de vista psicológico y desde un punto de vista didáctico. Posteriormente será necesaria la aplicación de esa terminología teórica a la tarea fundamental de un maestro de Infantil: la proposición de situaciones (problemas) que sirvan para aclarar al niño con qué se está trabajando y la resolución de esas situaciones usando el pensamiento lógico-matemático que se está desarrollando en él, contribuyendo de paso a la formación de nuevos conceptos en esa mente que se acerca al pensamiento lógico-matemático.

Es necesario pues que el maestro capte la idea de problema que pretendemos proponer, a través del análisis, comparación y selección de una serie de problemas o de situaciones que permitan disociar la idea de problema de la idea de ejercicio, y que permitan incluir en la categoría de problemas toda una serie de situaciones que sirven para la introducción de conceptos.

Aceptada esa premisa fundamental, se deberá enfrentar al maestro a la tarea de elaboración y proposición de problemas para los niños de Educación Infantil, emplazándolo así ante retos tan importantes de resolver como son los siguientes:

- Determinación del nivel mental de los alumnos frente a la interpretación y resolución de tareas problemáticas.
- Selección del lenguaje y de la terminología adecuada para acercar al alumno a esas tareas problemáticas.
- Elección de la forma de presentación y de los materiales didácticos más adecuados para desarrollar las mismas.
- Gestión óptima de las variables didácticas específicas de la proposición y resolución de problemas, además de la gestión de las variables didácticas particulares de la situación planteada.
- Elaboración de un panorama amplio de proposición y resolución de problemas que incluya las actividades fundamentales para llevar esa tarea a buen fin.

Todo ello debe constituir un trabajo eminentemente práctico, que se tiene que desarrollar enfrentando al maestro a todos esos retos partiendo de la idea de problema en su acepción tradicional.

Esto exige un cambio de mentalidad hacia una concepción del problema más amplia, que le lleve a resolver una de las tareas más importantes a la que habrá de enfrentarse en su vida profesional: proposición de problemas adecuados a la edad de los alumnos y gestión adecuada del proceso de resolución que emprenderá el alumno ante la proposición efectuada.

## 11.4. Consideraciones psicopedagógicas de la iniciación a la representación de la idea de problema

Los niveles a los que nos dirigimos requieren prestar una gran atención a los aspectos psicológicos y semánticos de la resolución de problemas, tan importantes en este contexto, y por encima de los aspectos más específicamente matemáticos de la misma actividad, por lo que los estudios clásicos de Polya y Schoenfeld, a pesar del enorme peso específico que tienen, necesitan ser completados con otros de naturaleza menos matemática y, quizás, ser aparcados hasta que un nivel superior en la enseñanza de la resolución de problemas permita retomarlos.

Para algunos psicólogos como Hoc[1], un problema no califica una tarea sino una situación, es decir, supone la confrontación de un sistema cognitivo a una tarea. Desde este punto de vista, «un problema es la representación de un sistema cognitivo construido a partir de una tarea, sin disponer inmediatamente de un procedimiento admisible para alcanzar el objetivo».

La construcción de la **representación** de la tarea es lo que se llama **comprensión,** en tanto que la construcción del **procedimiento** para realizar la tarea encomendada se llama **estrategia de resolución.** A partir de esta concepción, pretendemos fundamentar nuestra proposición curricular en torno a la resolución de problemas para los niños de edad infantil.

Greco[2] ha probado que hay dos sistemas de representaciones que intervienen en la resolución de problemas:

Un sistema **R** de representaciones que construyen el sentido, tanto el directo, llamado legible, como el figurado.

[1] Hoc, J. M.: *Psychologie cognitive de la planification*, P.U.F., Paris, 1987.

[2] Greco, P.: *Structures et Significations*, en Bideau, J.: *Logique et bricolage chez l'enfant*, P.U.L., Lille, 1988.

Un sistema **T,** bastante complejo, de tratamiento de las representaciones, y en el que existen varias categorías de esquemas: los esquemas de orientación o representación calculable, los que efectúan las operaciones locales, y los que ligan los anteriores generando programas, procedimientos, algoritmos, correcciones. Son los llamados esquemas de concatenación.

La comprensión es un proceso dinámico de cambio de la representación, gracias al cual el alumno:

– Pasa de una representación inadecuada, en la que atribuye a la tarea propiedades que no tiene, a una representación adecuada.

– Pasa de una representación incompleta, en fase de formación, a otra completa.

En definitiva, contemplamos la resolución de problemas, en la edad infantil, como un ejercicio de designación que debe dar cuenta de las representaciones internas que se generan en la mente del niño ante la proposición de una situación problemática determinada. Además, de acuerdo con Greco, en ese ejercicio, se practicará la operación fundamental de la función simbólica, es decir, el cambio de una representación a otra en un proceso dinámico que debe conducir a la solución.

## 11.5. La idea de problema que se pretende introducir

Es muy frecuente encontrar, tanto en los textos de Matemáticas como en los escritos de Didáctica de las Matemáticas, la idea de que la actividad matemática por excelencia consiste en la resolución de problemas y que, en el aprendizaje de las Matemáticas, se debe enfrentar al alumno a una casi única y verdadera actividad matemática: la resolución de problemas.

Podemos apreciar, sin embargo, que el Diseño Curricular Base de Educación Infantil no incluye ni siquiera una alusión al tema específico de la resolución de problemas, con la consiguiente contradicción que supone respecto a la premisa anterior.

### 11.5.1. Perspectivas para la inclusión de la comprensión y resolución de problemas en Educación Infantil

La significación del problema como elemento constitutivo del ejercicio de la actividad matemática ha sufrido una evolución profunda que viene caracterizada por cuatro fenómenos:

– La importancia del contexto para la introducción de una gran variedad de problemas; este fenómeno es fundamental en esta etapa de la educación ya que las evidentes carencias de lectoescritura deben imponer una selección escrupulosa del contexto en que se desarrolla la situación problemática.

– La puesta en evidencia del papel primordial de la comprensión en la resolución de problemas.

– La consideración del problema como elemento didáctico para construir situaciones que van a hacer aparecer ciertos conceptos; su papel es esencial en esta etapa educativa ya que en la mayoría de los casos las situaciones planteadas deben servir para introducir conceptos o preconceptos.

– La importancia del proceso de resolución de problemas como elemento determinante de la actividad matemática.

Convendrá pues aclarar la noción de problema que debe manejar el maestro de Educación Infantil y, para ello, podemos comenzar por aclarar la concepción de problema que pretendemos introducir.

Lo que sí parece estar fuera de toda duda es que la noción de problema debe ir más allá de la realización de una operación y de encontrar su resultado, debe ser algo más que ejecutar un algoritmo, tiene que ver más con hacer preguntas relacionadas con la matematización de un problema real, o bien con la construcción de nuevos objetos matemáticos, y responder a esas preguntas. Lo anterior indica ya que vamos a encontrarnos con dos tipos de problemas: los que surgen del interior de la propia disciplina (el área lógico-matemática) y los que provienen del mundo exterior, de la vida real.

Trabajar con este segundo tipo de problemas plantea cuestiones fundamentales, nada fáciles por cierto, sobre las relaciones entre Matemáticas y realidad, y sobre la posibilidad de un funcionamiento autónomo de las Matemáticas. Estos problemas van a ser prioritarios en los niveles que nos ocupan, lo que no implica, en modo alguno, que no puedan abordarse situaciones-problema, en forma de juego, que carezcan de anclaje con la realidad.

De lo anterior puede deducirse, que el papel que se asigne a la actividad de resolución de problemas va a ser determinante, y va a marcar una elección didáctica importante, según que la función asignada a esta actividad sea:

– La de evaluación del saber del alumno en un momento determinado.

– La de actuar como móvil del aprendizaje.

– La de ser fuente y criterio del conocimiento matemático que queremos que construya el alumno.

Nuestra concepción de problema se aproxima a esta ultima función, aunque en determinados momentos de la enseñanza sea obligatorio proponer problemas que desarrollen las otras dos funciones mencionadas.

## 11.5.2. El contrato didáctico específico de la resolución de problemas en Educación Infantil

Podemos concebir la clase de Infantil como un laboratorio donde se experimenta con materiales didácticos variados, debido al periodo de desarrollo cognitivo concreto que corresponde a los alumnos de esa edad, y siguiendo las reflexiones de D'Amore[3] sobre el trabajo específico en un lugar como ese, podemos determinar cuáles deben ser los papeles específicos de ese profesor y de ese alumno en una clase de resolución de problemas.

El profesor propone situaciones que el alumno debe resolver con los medios que tiene a su alcance. La figura del profesor es la de un moderador que ayuda en la aclaración de la tarea que se va a realizar, proporciona los medios para que se pueda llevar a cabo dicha tarea, soluciona conflictos de funcionamiento, recoge resultados y enfrenta al alumno o a la clase a esos resultados comprobando si con ellos se resuelve la tarea encomendada.

La figura del alumno, en cambio, es la del resolutor que se enfrenta a la tarea propuesta por el profesor, que se hace cargo de la tarea, que trata de encontrar la solución y que sabe que tal solución la debe validar y confrontar en el seno de la clase.

Tales cláusulas, más o menos explícitas, no impiden sin embargo la asunción por parte del alumno de otra serie de ellas que permanecen implícitas. Un buen profesor debe ser consciente de que pueden aparecer y debe tratar entonces de determinarlas para que no entorpezcan la actividad fundamental que se está desarrollando en la clase: la resolución de problemas.

Nos parece adecuado tener en cuenta la opinión de Chamorro y Vecino[4], cuando indican:

> … se tratará de destruir el contrato didáctico imperante que supone:
>
> – la concepción de problema como ejercicio, como entrenamiento;
>
> – la suposición de que un problema admite una única solución, normalmente encontrada a partir de los datos numéricos del mismo;
>
> – la suposición de que un problema siempre tiene solución
>
> – la suposición de que los datos para resolverlo deben ser los justos, ni más ni menos;
>
> – la suposición de que hay que usar un lenguaje obligatoriamente formal para encontrar la solución.

[3] D'Amore, B.: *Problemas*, Síntesis, Madrid, 1997.
[4] Chamorro, M. C. y Vecino, F.: «El tratamiento y la resolución de problemas», en Chamorro, M. C. (coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson Educación, Madrid, 2003.

### 11.5.3. Los modelos más adecuados para la introducción de la idea de problema en Educación Infantil

Descartados los modelos propuestos por Polya[5] y Schoenfeld[6] por considerarlos poco adecuadas para el tratamiento de problemas muy elementales, centraremos la atención en otros modelos más psicológicos del tipo I.D.E.A.L. de Bransford y Stein, y las propuestas de gestión mental de Antoine de la Garanderie[7], pasando por modelos intermedios como el de Mason, Buton y Stacey. La elección de estos modelos está determinada, sobre todo, por las edades a las que nos dirigimos, por las características propias del pensamiento infantil y por las capacidades cognitivas de ese periodo de edad, así como por los objetivos de tipo matemático que se persiguen en la Educación Infantil.

Proponemos, sin embargo, basarse en la propuesta de Cerdán y Puig[8] para realizar una buena adaptación de las fases de Polya a esos primeros niveles de enseñanza:

**Comprensión del problema:**

– Lectura o escucha del problema.

– Análisis de las diferentes partes del mismo.

– Asignación de sentido a toda la actividad anterior.

**Resolución del problema:**

– Localización, comprensión e intento de solución de la pregunta del problema.

– Desarrollo del lenguaje asociado al proceso de solución.

– Localización de posibles errores cometidos y búsqueda de soluciones alternativas.

El modelo de La Garanderie tiene interés para la formación de los futuros maestros, por las técnicas usadas próximas a la metacognición, y porque podrían facilitar muy bien la representación del problema por parte del niño y, con ello, la posibilidad de extraer significaciones al discurso del problema y las acciones que en él se dan. Así, por ejemplo, debemos tener en cuenta que para estos niños:

– La representación visual del problema precede a su resolución.

– La representación es el punto de partida de la búsqueda de la solución.

---

[5] Polya, G.: *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1982.

[6] Schoenfeld, A. H.: *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, 1985.

[7] Taurisson, A.: *La réussite en mathématiques*, Agence d'ARC inc., Québec, 1990.

[8] Cerdán, F. y Puig, L.: *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid, 1988.

– La representación es a menudo conjuntista y describe los estados de transición.

– La representación acompaña la resolución y se termina con la solución.

– La representación trata de los operadores de transición de un estado a otro[9].

Aunque la noción de problema es aquí muy general, para nosotros, el interés de este método reside en las pautas que proporciona para el desarrollo de destrezas y estrategias generales que intervienen en la resolución de problemas, y que puede ser de utilidad potencial en los primeros niveles. En particular, el desarrollo del pensamiento lateral o divergente, la mejor explotación de la memoria y el fomento del pensamiento creativo, son para nosotros los elementos fuertes de este método.

### 11.5.4. La lectura y comprensión de los enunciados

De entrada, resulta primordial aclarar que en Educación Infantil la lectura y comprensión del enunciado de un problema deben ser entendidas teniendo en cuenta las particularidades de los niños de este nivel. Por lectura se debe entender o bien la contemplación de una imagen o bien la escucha de una narración, al constituir ambas, evidentemente, el enunciado del problema propuesto. Con ello se produce un fenómeno de percepción que dará lugar a una representación mental del enunciado propuesto. Por comprensión se entiende la elaboración de una representación mental de los procesos anteriores y la capacidad de poner de manifiesto esa representación por medio de una designación adecuada. Posteriormente se iniciará el proceso de resolución del problema.

Es fundamental el proceso de representación del problema, si lo entendemos en el sentido que se le da en Chamorro y Vecino[10]: «Pensar que los datos suministrados por el enunciado del problema son directamente tratables por el alumno es una ilusión didáctica de falsa transparencia que dista mucho de ser real; para ser utilizables deben descodificarse e integrarse en la representación del problema». Una vez lograda la comprensión del problema, materializada en una representación adecuada, el niño puede empezar a tratar los datos que formarán parte de esa representación y comenzar, entonces, el proceso de resolución del problema.

[9] Para más detalles, consultar: Chamorro, M. C.: *Las dificultades de lectura y comprensión de los problemas matemáticos escolares*, UNO, 33, 2003, 99-119; y Chamorro, M. C.: «Leer, comprender, resolver un problema matemático escolar, en Chamorro», M. C. (ed.): *Los lenguajes de las Ciencias*, MECD, 2004, 175-200.

[10] Chamorro M. C. y Vecino F.: «El tratamiento y la resolución de problemas», en Chamorro M. C. (coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, Madrid, Pearson Educación, 2003.

### 11.5.4.1. Factores de comprensión de los enunciados

En la comprensión de un enunciado, los alumnos de Infantil ponen en juego diferentes tipos de representaciones cognitivas, entre las que establecen correspondencias de tipo lingüístico, icónico y ligadas al contexto matemático y a su correspondencia oral.

La comprensión de un enunciado va a depender de muchos factores que irán adquiriendo significado para el alumno a medida que avanza su formación en un tema como este. Entre ellos podemos destacar:

– *Los conocimientos pragmáticos de los alumnos,* conocimientos sobre métodos de resolución, sobre tratamiento de los datos, sobre el papel especial que adquieren determinados términos lingüísticos en el proceso de comprensión, etc. Dado el nivel inicial en la introducción de este tema, se puede entender que estos conocimientos se irán formando en la mente del alumno a medida que se avanza en la introducción de problemas en las clases de Infantil y, posteriormente, en otros niveles educativos.

– *Los conocimientos del mundo,* que se deben tener en cuenta tanto para proponer problemas adecuados al entorno del mundo infantil en unos casos como para distanciarse de dicho mundo en otros.

Si queremos que la resolución avance desde un punto de vista matemático, en un cierto momento se necesitará la centración en los elementos matemáticos de la representación construida.

– *Las competencias lingüísticas,* que tienen que ver con cuatro niveles de análisis: nivel pragmático (interpretar lo que ha querido decir el autor del enunciado), nivel de la representación semántica (representarse el texto lingüístico o icónico en el que se ha propuesto el problema), nivel morfosintáctico (estructura de las frases, tiempos verbales, etc.), nivel gráfico (disposición del enunciado, presencia de esquemas, tablas, figuras, dibujos, etc.).

– *Las capacidades perceptivas,* que están relacionadas, sobre todo, con la exploración visual y la discriminación perceptiva, procesos de desarrollo fundamentales a lo largo de todo este nivel de educación.

– *La capacidad de representarse el problema,* fundamentalmente a través de designaciones y simbolizaciones de tipo lógico-matemático, y de la puesta en marcha de procedimientos de verificación y control que permitan completar o modificar las significaciones extraídas del texto.

– *Las competencias lógicas,* ya que la comprensión de los sistemas de reglas condiciona la estrategia de resolución.

Las interferencias entre pensamiento natural y lógica formal serán constantes en este nivel. Se sabe, y Wermus lo ha puesto de manifiesto en sus trabajos, que, por ejemplo, la lógica espontánea de los niños y la lógica de predicados no funcionan de la misma forma, y que las operaciones de conjunción y disyunción de atributos son sustituidos por amalgamas de predicados que funcionan de manera distinta.

### 11.5.5. Variables didácticas de los enunciados

Siguiendo a Teule-Sensacq y Vinrich[11], vamos a distinguir distintas variables didácticas que confluyen en el enunciado de un problema y que van, por tanto, a determinar tanto distintas estrategias de resolución como un diferente tratamiento didáctico. Estas variables didácticas las vamos a adecuar al nivel de Educación Infantil, haciendo una interpretación y una restricción de la propuesta realizada por los autores citados. Podemos destacar las siguientes[12]:

– *El soporte,* con varios tipos de soporte clásicos: una imagen, un enunciado narrado a partir de un texto escrito, una ficha didáctica, un instrumento simbólico de organización de datos, un material manipulable. Estos dos últimos tipos acompañados evidentemente de una corta narración que describa la situación.

Uno de los objetivos de la introducción a la idea de problema es, justamente, que el alumno sepa pasar de un tipo de representación a otro, objetivo que, por otra parte, es el más importante para el desarrollo de la función simbólica, como hemos visto en el capítulo 3.

– El contexto. Si se toman como referencia las prácticas sociales de los niños, estos pueden enfrentarse a: *contextos efectivos,* donde la situación descrita permite una acción o una representación concreta; *contextos descritos* por el maestro, es decir, evocaciones de prácticas sociales de referencia para el alumno; o *simulación* de prácticas sociales que no pertenecen al entorno familiar del alumno.

– Las informaciones. Además del soporte cabe considerar si las informaciones suministradas son textuales, lógicas o numéricas.

En este nivel se sitúan las actividades que deben llevar a los alumnos a preguntarse sobre la pertinencia de las informaciones en relación con la solución del problema propuesto.

– *Las preguntas,* que constituyen el desafío de la actividad. Según la naturaleza del procedimiento de respuesta, pueden considerarse varios tipos de preguntas: aquellas en que la respuesta se obtiene por simple lectura del enunciado o por verificación de una información presente explícitamente en el texto; aquellas en que la respuesta se obtiene reflexionando, sin calcular; aquellas en que la respuesta se obtiene calculando; aquellas en que la respuesta es imposible por falta de informaciones en el enunciado.

– *El programa de solución previsto,* ya que el alumno se puede encontrar frente a dos tipos de situaciones: aquellas en las que es necesario realizar un procedimiento para la búsqueda del resultado y aquellas en las que el alumno debe manifestarse sobre la solución, ya elaborada, encontrada por otro.

**Actividad 1:** Proponer dos enunciados de problemas que se correspondan con cada una de las situaciones que acaban de ser descritas.

[11] Teule-Sensacq, P. y Vinrich, G.: *Lire et comprendre des énoncés de problèmes*, LADIST, Bordeaux, 1992.

[12] Chamorro, M. C.: «Leer, comprender, resolver un problema matemático escolar», en Chamorro, M. C. (ed.): *Los lenguajes de las Ciencias*, MECD, 2004, 175-200.

El análisis de las variables didácticas citadas, para cada enunciado concreto, es un excelente ejercicio didáctico que permite al profesor analizar *a priori* los conocimientos que el niño pone en marcha en la resolución de ese problema y ajustar el nivel de dificultad a las características de los alumnos.

D'Amore relata los resultados de una experiencia llevada a cabo en Bolonia, en la que a partir de la proposición clásica de un problema y permitiendo a los niños discutir entre ellos y hacer todo tipo de preguntas a los investigadores sobre ella, esta iba siendo retocada con las observaciones hechas por los niños. La nueva proposición se llevaba a otra clase paralela que disponía de las mismas condiciones de trabajo que la clase anterior. Pues bien, los resultados obtenidos no ofrecen lugar a dudas: «Si el texto había sido confeccionado en la forma "adulta" clásica, gran parte de la atención y de la discusión la acaparaba el texto. Si el texto había sido confeccionado del modo descrito más arriba, no había casi discusión sobre el texto y la atención se centraba casi toda en la resolución, signo de que el texto, tal como estaba, no creaba problemas»[13].

Las investigaciones que hemos ido sintetizando permiten al profesor graduar la actividad de resolución de problemas y adaptarla a las características y nivel de los alumnos, a la vez que le proporcionan elementos de reflexión para evaluar los procedimientos usados por los alumnos y los errores y dificultades previsibles, permitiendo un análisis *a priori* de calidad. Pero no es suficiente, falta un aspecto importante sobre el que vamos a interrogarnos a continuación: ¿existe una didáctica para la introducción de la idea de problema en Educación Infantil?

## 11.6. Hacia una didáctica de la introducción a la idea de problema en Educación Infantil

Hemos encontrado algunas respuestas parciales a la pregunta formulada al final del punto anterior en los trabajos de Descaves[14], y algunas de sus recomendaciones son las que recogemos a continuación, procurando adaptarlas a las posibilidades del nivel educativo objeto de nuestra propuesta.

Para facilitar el aprendizaje, deben utilizarse sistemas materiales de representación que permitan el paso de la representación del problema a la de la solución. Estos sistemas de representación, que pueden considerarse como instrumentos psicológicos, en el sentido de Vygotsky, comportan:

[13] D'Amore, B.: *Problemas*, Síntesis, Madrid, 1997.

[14] Descaves, A.: *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, Hachette, Paris, 1992.

– Representaciones icónicas.
– Representaciones simbólicas ligadas a ciertas disposiciones espaciales.
– Escritos prematemáticos.
– La lengua natural.

También en los trabajos sucesivos del equipo Ermel[15] del INRP (Instituto Nacional de Investigación Pedagógica de Francia) se encuentran valiosas recomendaciones sobre el tipo de problemas que se van a presentar a los alumnos en general y de cualquier nivel educativo, pronunciándose por una variedad de enunciados y tareas. No resulta descabellado adaptar las tareas propuestas al nivel de Educación Infantil, convirtiéndolas en proposiciones didácticas del siguiente estilo:

– Dada una situación vivida o verbalizada, determinar los diferentes tipos de preguntas que pueden hacerse a propósito de ella.
– Dada una pregunta, buscar datos e informaciones que permitan responderla.
– Resolver problemas cuyo enunciado viene dado a través de un dibujo, foto, etc.
– Dada una situación, una pregunta y un resultado considerado como respuesta, interpretarlo, validarlo y comunicarlo.

Proponer problemas cuya resolución comporte varias etapas guiadas por el maestro en su gestión de la clase, como problemas abiertos para los que el alumno no tiene en principio un modelo de resolución, constituye una buena recomendación para una didáctica de los problemas en cualquier nivel educativo. Estos problemas servirán para desarrollar estrategias de búsqueda y para introducir nuevos conceptos a partir de situaciones problemáticas adecuadas.

### 11.6.1. Situaciones varias para una didáctica de la proposición y resolución de problemas

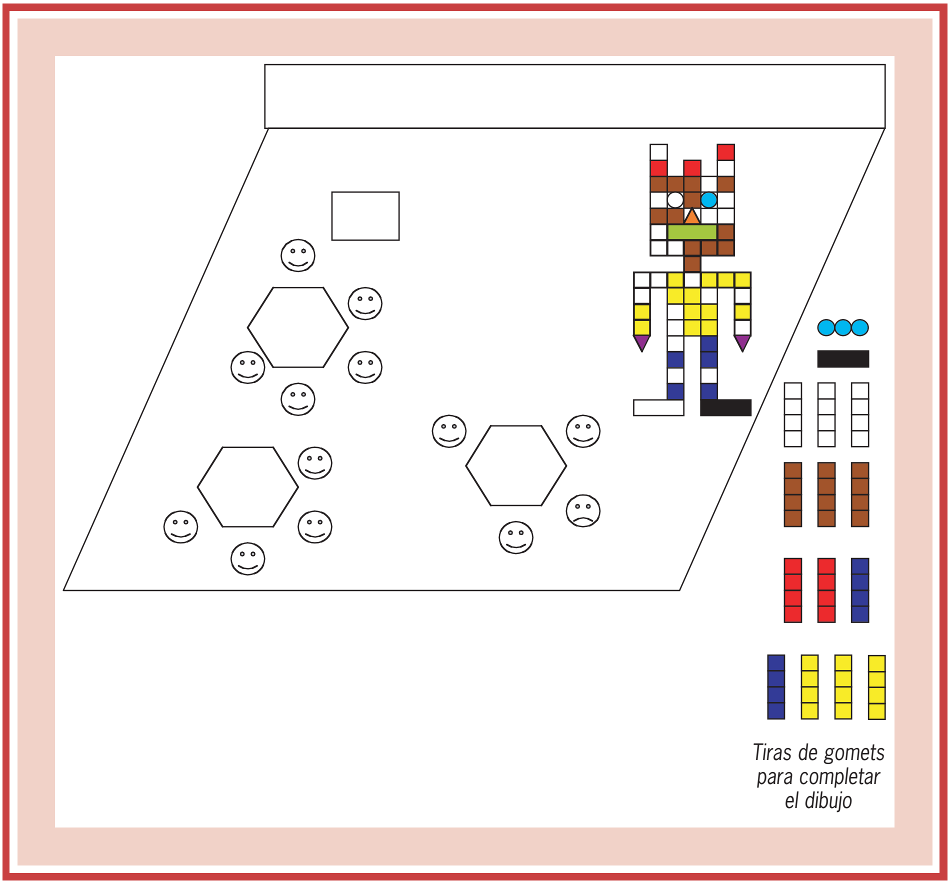
En este punto vamos a proponer una metodología que tratará de ilustrar la didáctica que propugnamos para la propuesta y resolución de problemas en el nivel de Educación Infantil. Esa didáctica estará basada, evidentemente, en los principios teóricos expuestos en los apartados anteriores y, en cada problema propuesto, se analizará algún aspecto de los vistos en ese marco teórico sin que ello sea óbice para que se puedan analizar o estudiar otros aspectos.

[15] Ermel: *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cycle élémentaire*, tomo 1, OCDL, Paris, 1978.
Ermel: *Apprentissages numériques*, CE1, Hatier, Paris, 1993.

### 11.6.1.1. Determinación de los distintos tipos de preguntas que se pueden hacer a propósito de una situación problemática dada

Asumido el carácter interdisciplinar de la Educación Infantil, podemos suponer que, como práctica ritual en el seno de la clase, se ha tratado de lo que significa hacer una pregunta a propósito de una situación dada, responder a esa pregunta, controlar la respuesta dada a una pregunta para verificar si realmente responde o no a ella. Establecida esta práctica inicial podemos situar al alumno ante situaciones de tipo matemático, ante las cuales su tarea principal será formular preguntas que posteriormente serán respondidas según el método que haya previsto el maestro.

Veamos una situación que sirve para ilustrar este modelo de problema y que, al mismo tiempo, sirva de muestra para la proposición de situaciones parecidas. He aquí una de ellas en forma de ficha confeccionada al efecto.



El enunciado del problema estará constituido por la ficha y el texto siguiente dicho por la maestra en voz alta: «Los niños de esta clase están construyendo un robot. Hay que ayudarles a construirlo».

**Fases metodológicas para la introducción de esta actividad:**

*Primera fase: Comprensión del enunciado*

Evidentemente se trata de una situación compleja, en la que es posible plantear muchas preguntas de carácter lógico-matemático sobre el número, sobre comparación de números, sobre formas, sobre atributos (color, forma), etc. Dependiendo de la edad de los niños se podrán plantear situaciones más o menos complejas, pero teniendo siempre en cuenta que la simplificación de una situación no tendrá que llegar nunca hasta el punto de desvirtuarla de manera que no constituya problema para los niños a los que se les plantea.

El maestro, antes de permitir la realización de cualquier actuación sobre el problema o la situación que describe, debe asegurarse de que los niños la han comprendido, que han entendido la situación descrita y los elementos principales que la componen. Para asegurarse de ello, es conveniente que realice una serie de preguntas a la clase reunida en asamblea, de forma que pueda decidir si la situación se ha entendido o no. Tales preguntas pueden ser, en el caso de esta situación concreta, las siguientes:

– ¿Quiénes están en la clase?
– ¿Dónde esta la maestra? ¿Dónde están los niños?
– ¿Con qué se ha construido el robot? ¿Está terminado?
– ¿De qué disponemos para seguir construyéndolo?
– ¿Hay niños en la mesas? ¿Cómo lo sabemos?

*Segunda fase: Elaboración de preguntas a propósito del enunciado*

Una vez seguros de que los niños han comprendido (se ha representado) la situación planteada, podemos pasar a la fase esencial en la que se pedirá a los niños que hagan preguntas a propósito del enunciado. Para ello, hay que asegurarse antes de que los niños saben lo que es una pregunta y cuál es la forma de realizarla.

Las preguntas realizadas por los niños las recogerá la maestra (maestro) en un lugar a la vista de todos. Seguramente los niños no sabrán leerlas, pero la acción de escribirlas les quedará impresa de forma que identificarán el póster o el lugar en que se hayan escrito como el lugar de las preguntas.

*Tercera fase: Clasificación de las preguntas obtenidas*

Podemos clasificar las preguntas obtenidas a partir de distintos criterios. Así obtendremos:

– Según un criterio de pertenencia al enunciado:

*Preguntas que tienen que ver con el enunciado* (¿cuántas mesas hay en la clase?).

*Preguntas que no tienen que ver con el enunciado* (¿cuándo salimos al recreo?).

Respecto a este criterio se privilegiarán evidentemente las primeras.

– Según un criterio de pertenencia a la materia:

*Preguntas de tipo matemático* (¿cuántos niños hay en la clase?).

*Preguntas pertenecientes a otro ámbito del saber* (¿lleva falda la maestra?).

Aquí, por razones obvias, se privilegiarán las primeras.

– Según un criterio de dificultad de respuesta:

*Preguntas que ya están respondidas en el enunciado*, ya que basta una simple observación del mismo (¿está la maestra en la clase?).

*Preguntas a las que se responde elaborando una estrategia de respuesta*, a partir de distintas observaciones que se realizan sobre el enunciado (¿cuántos sitios hay libres en las mesas de la clase?).

En principio, no se privilegiará ninguna, aunque sucesivamente se vayan seleccionando las del segundo tipo.

– Según el criterio del número de respuestas:

*Preguntas sin respuesta* (¿cuántas ventanas hay en la clase?).

*Preguntas con una sola respuesta* (¿cuántos niños hay en la clase?).

*Preguntas con varias respuestas* (¿cuántas barras de gomets marrones tendré que coger para completar la cara del robot?).

En este caso se privilegiarán todas ellas ya que se debe acostumbrar al niño al hecho siguiente: *en Matemáticas un problema puede tener una sola solución, varias o ninguna*.

La cantidad de preguntas posibles, el tipo de preguntas que se puedan realizar o la calidad de las preguntas, desde una óptica matemática, dependerán evidentemente de la situación planteada. Hay que seleccionarla cuidadosamente para que existan bastantes posibilidades de realizar preguntas a propósito de todos los criterios mencionados.

**Actividad 2:** Atendiendo a las clasificaciones anteriores, formular preguntas de todo tipo que supuestamente formularían los niños a propósito de la situación planteada.

Se recomienda esta actividad de realización de preguntas para niños a partir de 4 años, aunque se puedan adelantar situaciones parecidas simplificando las situaciones previstas para los niños de menos edad.

*Cuarta fase: Respuesta a las preguntas pertinentes*

Entendemos por preguntas pertinentes aquellas que se circunscriben al ámbito matemático, que tienen que ver con la situación planteada y que tienen una o varias respuestas teniendo en cuenta los distintos datos que se proporcionan en la situación.

Una vez recogidas todas las preguntas planteadas, se pasará a responderlas, una a una, organizando la clase de formas distintas (asamblea, grupos o individual) según convenga para la resolución de cada pregunta concreta. Por ejemplo, si hay varias preguntas que se resuelven de la misma forma (¿cuántos niños hay en la clase?, ¿de cuántos gomets amarillos disponemos?, ¿cuántos gomets faltan en la cabeza del robot?), se puede organizar la clase en grupos y encargar a cada grupo de la resolución de una sola pregunta.

Del mismo modo que se procedía para asegurar la comprensión de la situación planteada hay que proceder para asegurar la comprensión de una pregunta a propósito de la misma situación. Tomemos por ejemplo la pregunta ¿cuántos niños hay en la clase? Asegurarse de que los niños se representan esa pregunta dentro de la situación planteada implica que respondan a preguntas tales como: ¿necesitamos saber cuántas mesas hay para responderla?, ¿necesitamos saber cuántos niños hay en cada mesa para responderla?, ¿hemos de tener en cuenta a la maestra para responderla?, ¿qué tenemos que hacer para responderla?, etc. La respuesta a todas estas preguntas se obtendrá individualmente, del grupo restringido o del grupo de toda la clase, dependiendo de la organización que impongamos a la hora de responder a las preguntas planteadas a propósito de la situación propuesta.

Para dar las respuestas correspondientes hay que habituar al niño a la búsqueda de los datos y a la forma de aparición de los mismos. Los datos para responder a una pregunta pueden ser:

– Por una parte, *pertinentes y no pertinentes*, según sirvan o no para responder a una pregunta. Por ejemplo, el dato de la maestra es un dato no pertinente para responder a la pregunta ¿cuántos niños hay en la clase?

– Por otra parte, *explícitos e implícitos*, según la forma de aparición de los mismos en el enunciado. Si aparecen directamente en el enunciado serán explícitos (el número de gomets por tira, por ejemplo, para responder a una pregunta como ¿cuántas barras de gomets marrones tendré que coger para completar la cara del robot?).

Si se pueden suponer, aunque no aparezcan directamente en el enunciado, serán implícitos (que el robot sea simétrico, por ejemplo, para responder a la misma pregunta, o que los niños de la clase que representan la situación tengan

5 años, para responder directamente a la pregunta ¿cuántos años tienen los niños de esa clase? y suponiendo que se haya aceptado esa forma de designación del nivel de la clase).

**Actividad 3:** Localizar datos pertinentes y no pertinentes, datos implícitos y explícitos para responder a todas y cada una de las preguntas planteadas en la Actividad 2.

*Quinta fase: Construcción completa del robot*

Si se han formulado las preguntas principales y se han buscado los métodos o estrategias para resolverlas (hay que respetar, en principio, las estrategias intuitivas o espontáneas del alumno aunque no sean las mejores), se puede pasar al objetivo último de la situación planteada: la construcción del robot.

Conviene tener en cuenta, sin embargo, que la respuesta a ciertas preguntas que sirven para construir el robot es más o menos interesante según las restricciones que se impongan para responderlas.

Por ejemplo, la pregunta ¿cuántas tiras de gomets rojos necesito exactamente (no pueden sobrar ni faltar tiras enteras) para completar los pelos del robot? es más interesante al introducir el adverbio «exactamente», ya que si no se introdujese la resolución no necesitaría prácticamente proceder a la elaboración de una estrategia razonada, pues si se cogen todas se está seguro de rellenar los huecos vacíos, mientras que en el caso de la pregunta restringida por ese adverbio hay que comparar para coger el número exacto de tiras.

En esta fase estaría comprendida la validación de las respuestas dadas a cada una de las preguntas formuladas a propósito de la construcción del robot, ya que una mala respuesta debería llevar a un fracaso en la construcción de la parte correspondiente del robot.

### 11.6.1.2. Búsqueda de datos e informaciones que permitan responder a una pregunta formulada en una situación planteada

La búsqueda de los datos e informaciones para responder a una pregunta implica, pues, la representación de la pregunta en relación con la situación planteada, de forma que tal representación implique la selección de aquellos datos que permitirán responder a la pregunta y a descartar aquellos que no sirvan para responderla. Es decir, se trata de buscar los datos pertinentes. Pero la búsqueda de tales datos no es sencilla si aparecen implícitos en la situación y, por tanto, no directamente reflejados en ella.

Debemos pensar que las dos categorías diferentes de datos, a las que nos hemos referido en el final del apartado anterior, no son excluyentes entre sí. Así, en relación con una pregunta, podemos tener datos pertinentes y explícitos, datos no pertinentes y explícitos, etc. Lo que tenemos que hacer al respecto, si el objetivo es encontrar la respuesta a una pregunta dada, es localizar todos los datos pertinentes para responderla, sean estos explícitos (relativamente fáciles de individuar) o implícitos (más difíciles de encontrar sobre todo en los primeros niveles de introducción a la idea de problema).

Para ilustrar este apartado hemos elegido una situación cuyo soporte es una colección de fotografías.


El enunciado es el siguiente: «En el parque de juegos hemos hecho las fotografías que estáis viendo. Fijaos en el juego de los números. ¿Hay más caramelos o hay más mosquitos de alas azules?».

Para responder a esta pregunta, los niños se fijarán presumiblemente en las dos últimas fotografías, ya que en la primera hay una gran cantidad de datos no pertinentes para responder a la pregunta planteada, y en las otras dos, aparece el juego en primer plano, dando una idea precisa de la composición del juego.

La respuesta a la pregunta implica, al menos, dos estrategias que pueden ser aplicadas, por ejemplo, por niños de 4 años.

Una de las estrategias es la de contar los elementos de las dos colecciones y decidir entonces, en vista de los números obtenidos, cuál es la colección con mayor cantidad de elementos. Para ello sólo es preciso tener en cuenta los datos pertinentes y explícitos que corresponden a la composición de las dos colecciones indicadas y proceder a la enumeración de los elementos de ambas, para después comparar los números obtenidos.

Otra de las estrategias consistiría en:

– Considerar los paneles dados como representantes del comienzo de la semirrecta numérica (números del 1 al 9, dividida en tres tramos y discontinua al saltar al otro lado para pasar del 3 al 4 y del 6 al 7).

– Localizar los varios datos pertinentes e implícitos contenidos en ellos.

Así, si los niños se fijan en el primer panel, tienen que considerar que se trata de *una disposición discontinua de los diez primeros elementos de la semirrecta numérica* y que las dos colecciones dadas son *representantes respectivos de los números correspondientes de la semirrecta numérica*, por tanto, estos serían dos datos pertinentes e implícitos que permitirían resolver la pregunta planteada, al permitir decidir qué colección tiene más elementos en relación con la colocación de los números correspondientes sobre la semirrecta numérica.

Si, por el contrario, los niños se fijasen en el segundo panel, además de los datos considerados en el panel anterior, tendrían que considerar un tercer dato implícito, es decir, que el segundo panel representa lo mismo que el anterior aunque los números aparezcan ordenados en sentido contrario (de derecha a izquierda) al habitual.

Las dos estrategias mencionadas indicarían niveles diferentes de conocimiento numérico, extremo que sería sumamente interesante para que el maestro plantease acciones didácticas diferentes a propósito de este tema y para distintos grupos de alumnos, dentro de la misma clase.

### 11.6.1.3. Resolución de un problema. Elementos constitutivos de un problema

Una vez aclaradas las siguientes cuestiones, podemos pasar a la resolución de problemas adaptándolos siempre a la edad de los alumnos de esa primera etapa de la educación.

- ¿Qué significa una pregunta en una situación dada?
- ¿Qué significa una pregunta que tenga que ver con la situación?
- ¿Qué significa buscar la solución a una pregunta?
- ¿Qué datos o informaciones hay que considerar para llegar a esa solución?
- ¿Cuál es el mecanismo de la comprobación de una solución encontrada?

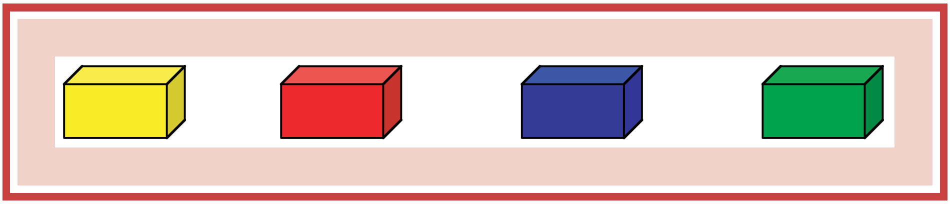
Los tipos de problemas que se pueden proponer son los siguientes:

- Problemas que sirven para ejercitarse en la práctica de la idea de problema.
- Problemas que sirven para controlar el grado de dominio de un conocimiento matemático dado.
- Problemas que sirven para introducir conocimientos matemáticos nuevos.

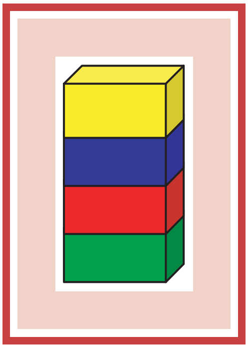
a) *Problemas que sirven para ejercitarse en la práctica de la idea de problema*

Un ejemplo clásico de problemas de este tipo nos lo proporciona la siguiente situación:

Disponemos de un material manipulable constituido por 4 bloques (tipo Lego) de cuatro colores diferentes, por ejemplo:



La situación problemática consiste en «averiguar cuántas torres distintas (se proporciona este ejemplo a los niños) se pueden construir con esos cuatro bloques».



Resulta bastante claro que se trata de un problema de búsqueda, de una situación de resolución de problemas que no persigue de forma inmediata la introducción del conocimiento matemático subyacente, el de las diferentes permutaciones que se pueden obtener colocando n elementos en fila.

Sugerimos un itinerario didáctico para conseguir el objetivo principal de esta situación: proceso de búsqueda de la solución de una situación problemática. Ese itinerario sería como sigue:

1. *Comprensión de la situación problemática*

Es fundamental, en tal sentido, aclarar con los niños qué entienden ellos por «torres distintas» y, para ello, hay que proponerles la construcción de dos torres distintas, reunidos en asamblea y antes de pasar a la resolución. Llegarán pronto a la conclusión de que dos torres son distintas si los colores están dispuestos en orden distinto.

2. *La organización de la clase*

Una variable didáctica que puede gestionar el maestro, a continuación, es la de «la organización de la clase», pasando de la organización inicial (la asamblea) a la formación de grupos de 3 ó 4 individuos cada uno. De esta forma el conjunto de la clase se podrá, seguramente, sólo *acercar* a la solución de la situación planteada, ya que podemos pensar acertadamente que se trata de una situación casi irresoluble para los alumnos de esta edad. De este modo, entre todos los grupos pueden encontrar una cantidad de soluciones próxima al número total de posibilidades y a la que sería difícil llegar con una organización individual de la clase.

Adoptada esa organización, se proporcionará a cada grupo una cantidad suficiente de bloques, de los cuatro colores indicados, para que puedan construir todas las torres que se les ocurra.

3. *Resolución de la tarea problemática*

Una vez organizada la clase en grupos, se pasaría a resolver la situación dentro de cada grupo, manteniéndose el enseñante al margen y asumiendo el papel de moderador en los grupos y de recolector de las distintas soluciones producidas por los distintos grupos.

Será interesante también su papel de impulsor de la tarea ya que al intervenir como instigador, en su tarea de moderador de los grupos, puede alentar las ocurrencias que expresen determinados elementos del grupo.

No es previsible que en estos niveles aparezcan estrategias de resolución que vayan más allá del simple intento de disposición arbitraria de los cuatro bloques. Por otra parte, estaría fuera de lugar la pretensión de lograr estrategias de resolución propiamente dichas de los alumnos de estos niveles, por el nivel de desarrollo «concreto» en que se encuentran.

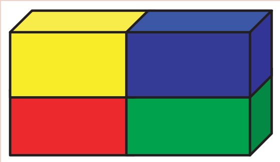
4. *Comprobación de las soluciones aportadas*

Como último paso, se volvería a una organización en asamblea de la clase, para discutir sobre las soluciones aportadas y sobre el número de ellas que se obtienen. Resulta fundamental tener en cuenta la colocación de las torres, ya que la decisión para considerarlas distintas depende de la ordenación de colores obtenida.

No debemos preocuparnos por la obtención de todos los casos posibles, ya que este es un objetivo bastante difícil de conseguir en cualquier nivel educativo a nivel experimental.

(El maestro debe calcular, con anticipación, el número de torres resultantes).

**Actividad 4:** ¿Cuántas torres distintas resultan? Y si cambiásemos la situación al disponer los bloques así:



¿Cuántos «bloques» distintos resultarían ahora?

*Problemas que sirven para controlar el grado de dominio de un conocimiento matemático dado*

Una de las tareas típicas del maestro, en esta etapa de la educación, es la evaluación, ya que le sirve para personificar el desarrollo del currículo según los diversos niveles de conocimiento de la clase y, en la mayor parte de los casos, esta tarea se concreta en la proposición de situaciones problemáticas que sirven para dar una idea aproximada del dominio de un conocimiento dado. Digamos, para comprometernos más, que debería ser casi una tarea ritual.

A continuación, propondremos una situación problemática de este tipo para alumnos del último año (5 años) de Educación Infantil.

Los niños de esta edad ya reconocen, perciben, se representan las figuras elementales más usuales, entre ellas la figura del rectángulo. Por ello, con el objetivo que hemos introducido en este apartado, puede ser interesante plantearles oralmente una situación como la siguiente:

«Tenemos estas 24 fichas cuadradas y queremos saber cuántos rectángulos distintos podemos construir con todas ellas, disponiéndolas una junto a otra de forma que se toquen siempre en un lado entero. Os doy también esta hoja cuadriculada para que dibujéis los rectángulos que iréis obteniendo».

El desarrollo de la situación debería seguir un camino parecido al de la situación anterior, con ciertas particularidades que señalaremos a continuación.

En la primera etapa, *de comprensión del enunciado*, debe quedar bien claro, ante todos, la forma de disponer los cuadrados, haciendo ejercitarse, a alguno elegido al azar, hasta que se llegue a la disposición correcta:


Se debería aclarar también en qué consiste la transposición al papel, de forma que quede claro que se debe dibujar solo el borde ya que dibujar cada uno de los cuadraditos sería redundante y pesado. La situación se propone a los niños organizados en grupos de 4, dos encargados de la construcción y otros dos de la transposición al papel.

En la resolución hay que vigilar para que se cumpla la regla principal de formación, para que se traslade fielmente al papel la construcción realizada y para que la situación no se estanque cuando algún grupo no avanza (seguramente otro grupo distinto obtendrá rectángulos no contemplados).

Sería interesante, para terminar, gestionar la variable didáctica «número de fichas cuadradas proporcionadas», dándoles un número mayor o menor de forma que realicen la misma actividad de construcción. Tal variable es muy importante ya que será determinante para obtener un número mayor o menor de rectángulos: es distinto proporcionar 3 cuadrados que proporcionar 12, para la obtención de rectángulos distintos.

**Actividad 5:** ¿Cuántos rectángulos distintos resultan con 36 fichas? ¿Cómo calculo ese número sin proceder por manipulación? ¿Para qué números se obtienen solo dos rectángulos? ¿En qué caso obtenemos, entre todos los rectángulos, un cuadrado?

Un extremo más delicado sería la consideración del cuadrado obtenido (en ciertos casos) como rectángulo, extremo que deberá ser tenido en cuenta en niveles educativos superiores[16].

[16] Ver los diferentes tipos de representación espacial incluidos en el capítulo 8.

*Problemas que sirven para introducir conocimientos matemáticos nuevos*

En una etapa educativa donde se puede proceder a la introducción de tantos conceptos de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, parece obligatorio plantear este tipo de problemas. Es más, se debería adoptar como metodología esta forma de introducción de los conceptos primarios de la matemática, si aceptamos como teoría principal de desarrollo del currículo la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, introducida en los primeros capítulos de este libro.

Veamos pues un caso problemático para ilustrar este tipo de problemas, subrayando de paso la importancia de la gestión, por parte del maestro, de las variables didácticas implicadas.

No cuesta mucho esfuerzo ponerse de acuerdo sobre el papel central de la introducción del número en la Educación Infantil y, de acuerdo con las líneas didácticas establecidas en el capítulo 6, propondremos una situación didáctica que trata de desarrollar en el niño una de las representaciones fundamentales para comprender los diversos usos del número. Se trata del uso de «los números para comparar». La situación es la siguiente:

Aprovechando la confección de un trabajo sobre el árbol de Navidad, la maestra organiza la clase por parejas, y encarga, a cada pareja particular, la resolución de la siguiente situación (cambiando para cada una los nombres de los protagonistas):

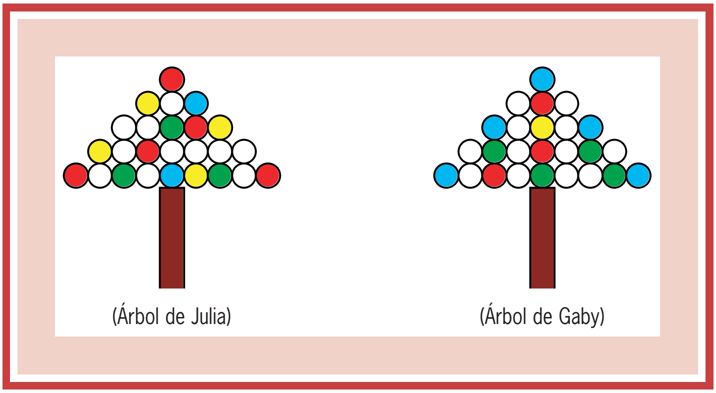
«Julia y Gaby están terminando su trabajo sobre el árbol de Navidad que llevarán a su casa en vacaciones. Les falta colocar algunas bolas en cada uno de sus árboles respectivos para terminarlos.

En primer lugar, el que vaya más retrasado deberá venir a mi mesa y coger una colección para su compañero, de forma que en esa colección haya más bolas de las necesarias para completar su árbol. Le llevará la colección a la mesa, donde están los dos, para que termine su trabajo.

Después volverá a mi mesa y cogerá una colección donde haya más bolas de las necesarias para completar su propio árbol. Una vez elegida, la llevará a la mesa para terminar así su propio trabajo.

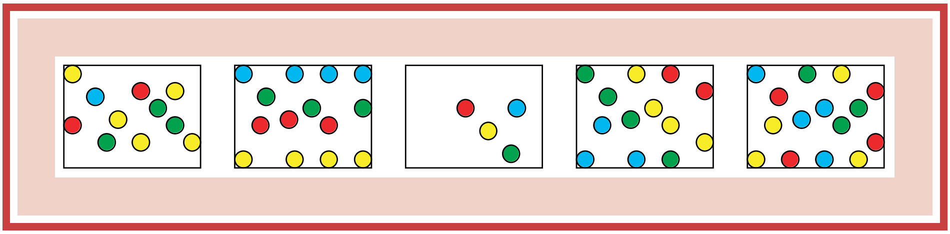
Por último, aquel al que le hayan sobrado menos bolas traerá a mi mesa las bolas que hayan sobrado a los dos».

El maestro planteará la situación cuando la considere interesante para el objetivo didáctico principal que deben alcanzar los niños. Por ejemplo, una situación interesante sería:



(Los círculos blancos indican los lugares donde no se han colocado bolas todavía).

Las colecciones de bolas que habrá en la mesa de la maestra serán, por ejemplo:



Se recomendaría realizar por separado, en orden y sucesivamente, una tras otra, las tres fases en que está enunciada la situación.

Además de los apartados obligatorios de: *comprensión del problema*, *organización de la clase*, *resolución de la tarea* y *comprobación de la solución*, nos gustaría destacar el papel importantísimo de la gestión de las variables didácticas que permite al maestro guiar la situación hacia el objetivo principal programado: *la comparación de números*.

**Actividad 6:** ¿Cuántas veces se ven los niños obligados a comparar colecciones, desde un punto de vista numérico, en esta situación? ¿El resultado de la comparación es decisivo para el desarrollo de la misma? ¿De qué modo?

Una variable didáctica importantísima es «la relación entre el número de elementos de las colecciones que se van a comparar». Vemos que son números muy próximos entre sí (en los distintos casos en que se impone la comparación):

– Entre las dos colecciones iniciales (los dos árboles).

– Entre las colecciones iniciales (cada uno de los árboles) y las colecciones de bolas lejanas.

– Entre las colecciones de bolas sobrantes, mucho menos importante en este caso, pero aspecto fácilmente corregible apenas hagamos crecer el número de bolas sobrantes actuando sobre las colecciones de bolas distantes.

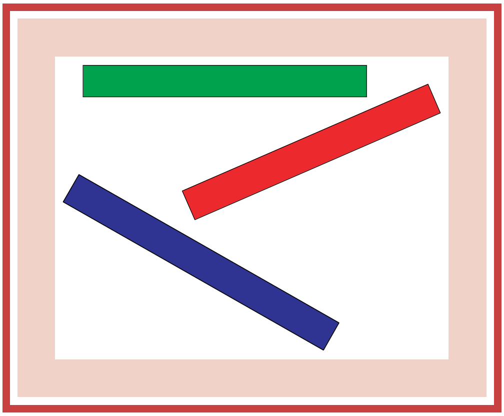
Otra variable didáctica importantísima es «la disposición de los huecos que indican las bolas sin colocar todavía» o «la disposición de las bolas en las tarjetas que hay que recoger», variable que facilita más o menos la enumeración y, subsidiariamente, la comparación.

**Actividad 7:** Existen otras variables didácticas que se pueden tener en cuenta en la situación planteada. ¿Cuáles son estas? ¿De qué modo influye su gestión en el desarrollo de la situación?

### 11.6.1.4. Interpretación, validación y comunicación de una respuesta dada a una pregunta en una situación dada

Se concluye este recorrido por las situaciones que sirven para introducir la idea de problema en la Educación Infantil con esta actividad: dada una solución hay que verificar si responde o no a una pregunta formulada dentro de una situación problemática. Para ilustrar este tipo de actividad proponemos la siguiente situación:

Se colocan en la pizarra 3 bandas de cartulina dispuestas como indica la figura y se organiza la clase en grupos de 3:



Se les dice: «Tengo en esta caja que está encima de mi mesa (se les señala la caja) bandas como las de la pizarra que vais a necesitar para hacer la próxima ficha. Pero antes de venir a cogerlas tenéis que saber cuál es la más larga y cuál la más corta. Yo digo que la más larga es la verde y la más corta es la roja. ¿Os estoy diciendo la verdad? Para que lo averigüéis, tenéis que venir cada uno aquí y ver con las bandas de la caja cuál es la más larga y cuál la más corta. Cuando sepáis la respuesta exacta tendréis que mostrar a toda la clase que tenéis razón».

Es fundamental, en este caso, una gestión adecuada de los tiempos respectivos, para pensar cómo se va a hacer la comprobación, para poner en práctica esa forma de comprobación, para comunicar y demostrar la conclusión a la que se ha llegado.

La práctica de la comparación indirecta, en las magnitudes medibles, no es ni mucho menos fácil para los niños de esta edad y por ello necesitarán disponer seguramente del tiempo suficiente para poner en práctica sus estrategias de comparación.

No se puede proporcionar una receta única para la puesta en práctica de la comprobación de la respuesta dada a una situación problemática. Cada tipo de problema (numérico, lógico, geométrico, métrico, etc.) necesitará de sus propios métodos, de sus propias estrategias, de sus propios tiempos de comprobación de respuestas.

Conviene señalar, además, que en la situación ejemplificada en este apartado resulta esencial gestionar con cuidado una variable didáctica: «la relación de las tres bandas respecto a la magnitud longitud». Con ello queremos decir que no sirve para nada dar tres bandas muy desiguales entre sí en longitud, ya que el ejercicio de la percepción llevaría a los niños a determinar, de inmediato, si la afirmación de la maestra era válida o no, sin hacerles sentir la necesidad de justificar la respuesta a la pregunta lanzada por la maestra y, por tanto, la evidente trivialidad de la respuesta podría desencadenar un bloqueo. En cambio, la propuesta de bandas muy parecidas entre sí, respecto a la longitud, debe incitarles a aplicar algún procedimiento para la comprobación que tienen que realizar.

**Actividad 8:** Es evidente que en la propuesta realizada se ha manejado otra variable didáctica. ¿Cuál es? ¿De qué modo incide, previsiblemente, sobre el comportamiento del alumno?

## 11.6.2. Algunas consideraciones complementarias de la línea didáctica sugerida

En el apartado 11.6.1., hemos trazado un itinerario didáctico que ha tenido en cuenta sobre todo los tipos diferentes de situaciones que se pueden proponer en este nivel educativo. Quisiéramos, sin embargo, señalar que se trata de una propuesta ejemplificadora pero no exclusiva y que, dentro de los distintos apartados contemplados, cabe una variedad de problemas limitada solo por el currículo propio del nivel educativo y por los diversos tipos de actividades que se pueden desarrollar en una introducción primaria a la idea de problema.

Con todo, nos parece obligatorio hacer una serie de consideraciones sobre algunos aspectos importantes en el nivel educativo de que nos ocupamos, como son:

**La adecuación al nivel cognitivo y, por tanto, a la edad del niño**

La mayoría de las situaciones problemáticas propuestas en las páginas anteriores deben ser planteadas a niños de 4 a 6 años, por los conocimientos previos que suponen y por la dificultad intrínseca de resolución de las mismas.

Conviene pues planificar cuidadosamente la introducción de problemas en la Educación Infantil. Recomendamos, en consonancia con lo apenas dicho, seguir los siguientes principios generales:

a) Es preferible comenzar a introducir la idea de problema en el segundo curso de Educación Infantil, es decir, cumplidos los 4 años, por la dificultad que representa para los niños de edad inferior y sin formación escolar previa representarse la situación, plantear preguntas pertinentes a propósito de ella, elaborar estrategias de resolución y comprobar la solución una vez hallada.

No se puede renunciar sin embargo al planteamiento de situaciones problemáticas desde la edad más temprana, si aceptamos la teoría de situaciones de Brousseau (ver capítulo 2) como teoría constructivista del conocimiento lógico-matemático. En ese caso, la introducción de cualquier conocimiento lógico-matemático, por simple que sea, deberá plantearse a partir de una situación problemática adecuada.

Concluimos, por tanto, recomendando la introducción de situaciones problemáticas desde un principio pero solo a efectos de aproximación a la solución, sin emprender el trabajo específico de introducción a la idea de problema que hemos planteado anteriormente.

**Las formas de representación externa de la comprensión del problema**

Citábamos antes distintas formas de materializar la representación interna (comprensión del problema), entre ellas: la icónica, la simbólica, la prematemática y la lengua natural. No podemos esperar que estas formas surjan espontáneamente del alumno y, por ello, es preciso plantear situaciones problemáticas que induzcan:

a) La aparición de esas diversas formas de representación externa.

b) El paso de unas a otras.

c) La llegada a una representación lo más abstracta posible para el nivel de edad al que nos enfrentemos[17].

---

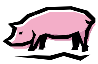
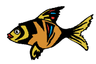
[17] Se recomienda la consulta de Chamorro, M. C. y Vecino, F.: «El tratamiento y la resolución de problemas», en Chamorro, M. C. (coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson Educación, Madrid, 2003.

Para ello es necesario proporcionar al alumno los medios con los que pueda llegar a realizar un ejercicio efectivo de la función simbólica[18].

## La gestión de las variables didácticas ligadas específicamente a la proposición y resolución de problemas

En los problemas propuestos en páginas anteriores, se ha hecho mención a las variables didácticas propias de alguna de las situaciones problemáticas planteadas, pero, debido a la especificidad de cada apartado, no hemos trabajado sobre las variables didácticas específicas ligadas a la proposición y resolución de problemas. Así pues, para tratar de colmar esa carencia, pasaremos a continuación a hacer un análisis más profundo de esa importante cuestión.

En algunas aulas de Educación Infantil se pueden encontrar tablas como la siguiente:

| |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | X | | X | | | | X |
| M | | X | | X | | X | |
| MI | X | | | X | | | X |
| J | | | X | | X | X | |
| V | | X | X | | | | X |

Normalmente esta tabla se usa para localizar el tipo de comida que toca cada día de la semana, relacionando este con la fecha.

Puede usarse para la introducción de la idea de problema si la conectamos con el tipo de situaciones descritas en 11.6.1. y apartados subsiguientes.

Nos vamos a servir de un instrumento de organización de datos como este para ilustrar la exposición que queremos hacer sobre las variables didácticas específicas de la proposición y resolución de problemas (véase el apartado 11.5.5.).

[18] Se recomienda la consulta del capítulo 3 de este volumen, donde aparece un itinerario didáctico general para el ejercicio de la designación.

Evidentemente, aquí la variable didáctica «soporte» toma el valor «instrumento simbólico de organización de datos». El profesor podría dar otro valor a esta variable didáctica («colección de fotografías», «organización en árbol lógico», etc.), para adaptar el problema a un nivel de edad determinado o a la introducción de conceptos lógico-matemáticos específicos.

La variable didáctica «contexto» toma aquí el valor «situación descrita por el maestro» para evocar una práctica ritual muy próxima al alumno. Necesidades de adecuación a un nivel determinado, a una impostación didáctico-matemática determinada o a una organización particular de la clase podrían determinar cambiar ese valor a otros como «situación efectiva en que se ve inmerso el alumno» o «situación evocada de determinadas prácticas sociales».

La variable didáctica «informaciones» toma en este caso el valor «lógicas», lo que inducirá a una representación lógica determinada (tabla) por parte del alumno. La emergencia de otro tipo de representaciones se puede conseguir cambiando esta variable hacia otros valores: numéricos, textuales, etc.

Se puede entender perfectamente que esta variable va ligada a las dos anteriores y que, en consecuencia, el valor que se adopte para las anteriores puede indicar un valor determinado para ésta.

La variable didáctica «preguntas» tomará distintos valores según las preguntas que se hagan a propósito de la tabla proporcionada. Así, una pregunta como «¿qué se come el jueves?» indica que esta variable ha tomado el valor «respuesta obtenible mediante una reflexión de tipo lógico, sin calcular».

**Actividad 9:** Elabore las preguntas respectivas para que esta variable tome los valores:

a) «La respuesta se obtiene de la simple observación de la tabla (enunciado) o por verificación de una información presente».

b) «La respuesta se obtiene mediante un cálculo numérico».

c) «La respuesta es imposible por falta de informaciones en la tabla».

La variable didáctica «programa de solución previsto» dependerá de la impronta didáctica que el maestro quiera conferir al problema planteado con las correspondientes preguntas anexas, ya que, a nivel matemático, será distinto:

– Controlar las respuestas que da otro a determinadas preguntas sobre las informaciones que aparecen en la tabla, con la consiguiente aplicación de los procedimientos propios y la confrontación con los procedimientos ajenos, aplicados para obtener la respuesta.

– Elaborar una respuesta a una pregunta sobre la tabla, de forma que sea solo la parte interrogada la que se implica en la elaboración de esa respuesta.

Los dos tipos de valores de esa variable inducen formas de trabajo absolutamente necesarias para la construcción de un pensamiento lógico-matemático. Por ello se considera totalmente irrenunciable trabajar sobre ambos.

La variable didáctica «comunicación de resultados» dependerá absolutamente de los medios de que disponga el alumno para ejercitar esa comunicación. Así, la disposición de fichas en que estén representados icónicamente los alimentos de la tabla (aunque la representación icónica no sea idéntica) determina un tipo de comunicación «icónico»; la disposición de fichas con números representados determinará una comunicación de tipo «signo»; la ausencia de material puede determinar una comunicación de tipo «oral o gestual», etc. Es decir, que el valor de esa variable va a depender indefectiblemente del material suplementario que se proporcione al alumno para dar la respuesta.

**Actividad 10:** Elabore dos preguntas a propósito de la tabla e indique qué material suplementario o qué restricciones se le impondrían al alumno para comunicar sus resultados, de forma que el tipo de comunicación fuese:

a) Gestual.
b) Simbólica.

La variable didáctica «prueba de validez del resultado» dependerá, en este caso, de la gestión temporal que quiera imponer el maestro. Así, una disposición grande de tiempo permitiría esperar a la hora de la comida para verificar materialmente una respuesta dada con anterioridad. Una menor disposición de tiempo obligaría a buscar una prueba formal (en la que, por ejemplo, un alumno verificara una respuesta de otro razonándola sobre la tabla).

Hemos intentado destacar la importancia de la consideración de estas variables didácticas, sobre todo a la hora de elaborar una proposición de problemas, de planificar la clase para una proposición determinada, de elegir los materiales más adecuados para una proposición dada y de controlar todos los aspectos para lograr el objetivo lógico-matemático prefijado mediante la proposición de problemas. En definitiva, insistir una vez más sobre el papel esencial que juega una gestión adecuada de las variables didácticas, de todo tipo, para el avance del conocimiento matemático.

### 11.6.3. Principales recomendaciones para acercarse a la idea de problema en Educación Infantil

El itinerario didáctico diseñado en el apartado 11.6. establece los principios fundamentales para una introducción del tema en esa primera etapa educativa. Tales principios se derivan:

– De la concepción de las Matemáticas como resolución de problemas.

– De la adopción de una teoría didáctica de enseñanza-aprendizaje de la matemática, la de las *situaciones didácticas*, que establece los principios teóricos didácticos para la introducción en la escuela, a partir de la resolución de situaciones problemáticas, diseñadas específicamente para la introducción de cada concepto matemático.

– De tener en cuenta el periodo de desarrollo cognitivo que representan las edades de ese nivel educativo con especial cuidado, por tanto, al elegir el soporte en que se proponen esas situaciones problemáticas.

– De la convicción sobre el carácter interdisciplinar de esa etapa educativa, con la consiguiente adaptación a determinados contextos de las situaciones propuestas, pero también de la convicción de la propia validez motivacional de ciertas situaciones fundamentalmente lógico-matemáticas.

– Del carácter introductorio a la idea de problema que permitirá una continuidad en otros niveles educativos, con la misma importancia que se da a la introducción de otros temas lógico-matemáticos, pero con la particularidad de ser un tema transversal que puede y debe aparecer en cada uno de estos últimos temas obligatoriamente.

Al analizar cuidadosamente las situaciones de introducción a la idea de problema propuestas anteriormente, podemos sacar una conclusión a la que se adhieren la mayoría de los expertos en la proposición-resolución de problemas: se está consiguiendo que los niños empiecen a proponer problemas, objetivo óptimo y último de la resolución de problemas.

## 11.7. Bibliografía

Abrantes, P. y otros: *La resolución de problemas en matemáticas. Teoría y experiencias*, Laboratorio Educativo, Graó, Barcelona, 2002.

Chamorro, M. C.: *Las dificultades de lectura y comprensión de los problemas matemáticos escolares*, UNO, 33, 2003, 99-119.

—: «Leer, comprender, resolver un problema matemático escolar», en Chamorro M. C. (ed.): *Los lenguajes de las Ciencias*, MECD, 2004, 175-200.

Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M.: *Iniciación a la lógica matemática. Jugar y pensar 1 y 2*, Alhambra-Longman, Madrid, 1996.

Chamorro, M. C. y Vecino, F.: «El tratamiento y la resolución de problemas», en Chamorro, M. C. (coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson Educación, Madrid, 2003.

D'Amore, B.: *Problemas*, Síntesis, Madrid, 1997.

Ermel: *Apprrentissages numériques (grande section de maternnelle)*, Hatier-INRP, Paris, 1991.

—: *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cycle élémentaire*, tomo 1, OCDL, Paris, 1978.

—: *Apprentissages numériques*, CE1, Hatier, Paris, 1993.

GRAND, N.: *Mathématiques en Maternelle*, Grenoble, Numéro spécial de la revue Grand N, CNIP, Paris.

POLYA, G.: *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1982.

ZIMMERMAN, G.: *Activités mathématiques a la maternelle*, Nathan, Paris.

CAPÍTULO 12

# El juego en la Educación Infantil

Juan Miguel Belmonte Gómez

## Contenidos

## 12.1. Introducción

Nadie suele poner en duda el enorme valor didáctico que presenta el uso del juego en la Educación Infantil. Nuestro trabajo es estudiarlo en el caso de la enseñanza de las Matemáticas, donde su utilización es bastante menos frecuente, por no decir escasa.

Intentaremos clarificar qué es realmente un juego y qué lo caracteriza frente a otro tipo de actividades. Solo así entenderemos su enorme potencial didáctico. La confrontación entre juego y trabajo que se nos presenta frecuentemente, sobre todo a nivel educativo, responde a un gran desconocimiento de los mecanismos de aprendizaje, o bien a otros intereses ideológico-pedagógicos.

Naturalmente que todo no puede gestionarse como un juego, debido a las propias características de lo que se entiende por juego. Pero querer presentar el aprendizaje «serio» como aquel en el que no cabe el juego y que exige al niño un «verdadero esfuerzo», no es sino una muestra de ignorancia de lo que es verdaderamente un juego y de cuáles son las mejores condiciones para aprender.

Además, entendemos que es de vital importancia poner de manifiesto el carácter divertido de las Matemáticas, lo que entendemos que ayudará a los alumnos en niveles posteriores.

Estudiaremos el papel de la competición en el aula intentando aclarar algunos malentendidos muy extendidos acerca de los problemas que acarrea.

También vamos a aplicar algunas herramientas que proporciona la Didáctica de las Matemáticas en el análisis de la idoneidad de las actividades lúdicas en clase de Matemáticas en Educación Infantil.

Por último, presentamos algunos juegos, proporcionando algunas claves para su uso en el aula. No se pretende, obviamente, realizar un listado de los juegos más relevantes. Simplemente nos ha parecido que pueden servir como ejemplo de su utilización para el aprendizaje de aspectos matemáticos en Educación Infantil.

## 12.2. Objetivos

– Estudiar los aspectos característicos de las actividades lúdicas.

– Identificar los distintos tipos de juegos y las distintas capacidades para jugar del niño.

– Analizar el papel del juego en el aula de Educación Infantil.

– Proporcionar elementos de análisis y reflexión sobre el uso del juego en la enseñanza de las Matemáticas.

– Proponer y estudiar ejemplos de juegos para trabajar algunas nociones matemáticas en Educación Infantil.

## 12.3. Aspectos generales acerca del juego. Características y evolución

Es bastante frecuente ver cómo los niños, en el paso de Educación Infantil a Educación Primaria, se lamentan de que «ya no juegan en clase». Ellos son conscientes de que lo que hacen ahora en clase es «trabajar», mientras que en los cursos anteriores «jugaban». Ya comienzan a establecer la contraposición adulta entre juego y trabajo.

Boule asegura:

«Admitir que la infancia es el lugar privilegiado del juego es renunciar a definir el juego del niño en la perspectiva del juego adulto, especialmente en su relación con el concepto de trabajo. El juego es bastante anterior en el niño que la exigencia de trabajo» (Boule, 1976, p. 27).

Pero esta contraposición no es sino del mundo adulto, y ya nos indica que no debemos definir la actividad lúdica sólo por oposición a la actividad «seria».

Esto ya nos proporciona una de las paradojas que nos encontraremos al sumergirnos en la noción de juego. Su definición es objeto de controversia aún actualmente, aunque cualquiera sin una especial preparación puede distinguir las conductas lúdicas de las que no lo son.

Con la intención precisamente de caracterizar las actividades lúdicas, Linaza (1991) establece una serie de elementos comunes a los juegos para conseguir su identificación:

**El juego es libre.** Sólo el individuo que juega puede decidir si realmente está jugando. Una actividad desarrollada por una imposición externa no es nunca un juego. He aquí una de las principales dificultades del aprovechamiento didáctico del juego en el aula. Las potencialidades educativas del juego vienen determinadas por sus características, como ya veremos, y éstas están condicionadas por la elección libre de jugar.

Caillois, en *Les jeux et les hommes*, asegura: «No hay duda de que el juego debe ser definido como una actividad libre y voluntaria [...]. No se juega más que si se quiere, cuando se quiere y el tiempo que se quiere. En este sentido el juego es una actividad libre» (citado en Boule, 1976, p. 29).

**El juego no está condicionado por refuerzos o acontecimientos externos.** Las otras conductas «serias» siempre están condicionadas por la realidad externa, a la que deben adaptarse, y tratan de obtener algún fin.

Cuando el niño percibe que una actividad escolar va a tener consecuencias posteriores de cualquier índole (calificación, reconocimiento social, juicios externos...) no la considerará jamás un juego. No se juega para obtener ninguna recompensa más allá del juego. Si la hay, no se trata de una actividad lúdica.

**Actividad 1:** Reflexione acerca de lo que obtiene un niño cuando juega en su tiempo libre y lo que obtiene si juega dentro de una actividad en el aula. ¿Realmente las consecuencias son las mismas?

**El juego produce placer.** Aunque parezca obvio no podemos dejar de mencionar una de las características primarias de los juegos: proporcionan placer. Esta característica ha sido objeto de distintas interpretaciones psicológicas acerca del papel del juego en el desarrollo humano, especialmente dentro de los enfoques psicoanalistas, al otorgar al juego un papel reductor de ansiedades, dando al niño un cierto control sobre el mundo y una forma aceptada de expresar los impulsos inconscientes.

**Predominan los medios sobre los fines.** Es quizá el rasgo más característico del juego. Al contrario de las otras conductas que siempre tienen algún objetivo, cuando jugamos la acción misma ya produce satisfacción. El objetivo principal del juego son las propias acciones que lo conforman. El lema olímpico «Lo importante es participar» no hace sino afirmar este hecho. En ello se basa la esencia del deporte. Naturalmente no debemos observar a los deportistas profesionales como la ejemplificación de este tipo de conductas, ahora bien, basta con observar la gran cantidad de personas que se afanan en practicar algún deporte con la única intención de jugar.

**Las conductas lúdicas presentan ciertas especificidades.** Incluso en el caso del juego simbólico, con un componente importante de representación de la realidad, siempre existen diferencias conscientes entre la conducta inmersa en el juego y su correspondiente conducta seria. Si observamos a los niños representar alguna escena cotidiana siempre ponen de manifiesto su carácter de ficción. Son ellos los primeros que no confunden la realidad con su representación lúdica. Incluso en el reino animal se evidencian las diferencias entre los dos tipos de conductas. Basta observar cómo dos perros juegan a pelearse: los posibles rasgos distintivos de agresividad (exhibición de colmillos, posturas de ataque...) van siempre acompañados de otros que «avisan» acerca del carácter lúdico de la conducta (movimiento del rabo), además de no provocar daños a su contendiente.

En definitiva, es importante concluir que el juego es una actividad que sólo los jugadores pueden definir: «... el juego es un modo de interactuar con la realidad que viene determinado por los factores internos de quien juega y no por los de la realidad externa. Esta última puede, sin duda, modular e influir en el juego, pero éste se define más como una actitud ante la realidad del propio jugador» (Linaza, 1991, p. 13).

Podríamos entonces pensar que, con estas características, la posibilidad de que el niño pueda jugar en el aula es muy remota. No es así. Lo que sí hay que conocer es que solo el niño será quien decida cuando juega. Es la práctica cotidiana del docente la que conseguirá que el niño reconozca como juegos muchas de las actividades que se le han propuesto con intención lúdica. No basta con declarar explícitamente al niño: «Vamos a jugar». Es el *contrato didáctico*[1] presente en el aula el que indica al niño la autenticidad de ese mensaje.

Hasta ahora hemos hablado del juego de manera global, pero naturalmente el juego va adoptando distintas formas a lo largo del desarrollo infantil. Piaget los clasifica en tres tipos como consecuencia de la evolución de las estructuras mentales del niño:

***Juego funcional.*** Se trata de actividades que realiza el niño para ejercitarse funcionalmente en el curso de su maduración. Son propios de los dos primeros años de vida y fundamentalmente motores, interviniendo aptitudes físicas, sensoriales y psicomotoras, con un importante fin adaptativo. El niño los realiza por un simple placer funcional. En un primer momento tiene un carácter puramente individual aunque van incorporando progresivamente la interacción con otros, especialmente adultos, que «guían» sus progresos (aserrín, aserrán, cucútras...). Este tipo de juegos le permite al niño explorar el mundo que le rodea, es un juego del presente, del *aquí y el ahora*, el simbolismo está ausente.

***Juego de imitación o juego simbólico.*** Comienza en el momento en que el niño desarrolla la capacidad de evocar objetos o acciones ausentes, sustituyendo la acción real por otra imaginada. Tras el desarrollo motriz, el mundo del niño se amplía considerablemente provocando una gran curiosidad por una realidad que le desborda. Quizá estamos ante el paradigma del juego infantil.

Esta simulación de la realidad supone una distinción clara entre lo real y la ficción: «La capacidad de mantener simultáneamente los dos niveles de repre-

[1] Más información acerca de la noción de contrato didáctico podrá encontrarla en el capítulo 2 de este libro.

sentación, el real y el fingido, constituye uno de los rasgos más notables de la actividad infantil. Diversas teorías han tratado de explicar en qué radica tal capacidad y los mecanismos psicológicos que subyacen a ella. Confundir ambos planos daría lugar a comportamientos muy poco adaptativos» (Linaza, 1991, p. 24).

Linaza también añade que la consideración simultánea de la ficción y la realidad es una condición del juego simbólico, no su objetivo. El niño juega para actuar, no para imitar. Así, los juguetes que los adultos ponen a disposición del niño con una gran calidad representativa, pero que reducen al niño a un mero observador sin capacidad de actuar, son malos juguetes. El niño preferirá una tapadera circular que pueda servirle de volante, a una reproducción en miniatura de un coche, por muy perfecta que sea.

El niño se ve inmerso en una realidad a la que debe adaptarse. El juego simbólico supone un elemento liberador. Es la realidad simulada la que se adapta a él, sometiéndola a sus deseos y necesidades. Para Piaget es el polo asimilador el preponderante en este tipo de juegos, aunque el polo de acomodación va progresivamente aumentando a medida que el juego simbólico se socializa. En un primer momento el niño juega con otros pero en paralelo, cada uno con su papel sin necesidad de establecer unas reglas comunes. Poco a poco se establecen escenarios comunes que exigen la coordinación de los diferentes papeles interpretados por los jugadores, escenarios de realidades próximas o de mundos de ficción compartidos.

Estos escenarios compartidos ya exigen el establecimiento de reglas comunes para varios, aunque pueden ir modificándose en el transcurso del juego: «…vale que ahora yo hago de maestra y…».

En definitiva, este tipo de juegos ayuda al niño a descubrir y adaptarse a la realidad, así como a aceptar las restricciones sociales.

***Juegos de reglas.*** Aparecen a partir de los 4 años, aunque se consolidan a partir de los 6 años. Estos juegos llevan implícita la socialización y competición. Socialización porque el desarrollo del juego necesita de los otros, y competición al establecer unas normas que determinen el final del juego. El objetivo del juego puede exigir medirse con el resto de jugadores, ya no basta con compararse consigo mismo.

El papel de las reglas va evolucionando paralelamente al desarrollo psicológico del niño. En un primer momento no se trata de normas coercitivas, simplemente se acatan como ejemplo de conductas. Después pasa a ser algo externo, de origen adulto, y totalmente fijo. Sólo cuando se produce la completa socialización del juego se asume la regla como un acuerdo mutuo entre jugadores, consentida por todos y que puede modificarse si existe un acuerdo entre todos.

Este juego exige ya al niño la superación del egocentrismo infantil, al necesitar la coordinación de los distintos puntos de vista, así como ser capaz de anticiparse y de ponerse en lugar del otro jugador para intentar obstaculizar su victoria. Aquí radica una de sus grandes utilidades didácticas.

Otros autores añaden los **juegos de construcción** como un tipo más ya que parece que no se ajusta a ninguno de los anteriores. Pero hay que destacar que estos tipos de juegos son sucesivos desde un punto de vista evolutivo, pero persisten en etapas posteriores. Estos juegos exigen ciertas capacidades físicas (habilidades psicomotoras), dependen de ciertas reglas de construcción impuestas por el material y el uso posterior del objeto construido presenta un papel de simbolización.

**Actividad 2:** Estudie los aspectos funcionales, simbólicos y de juego de reglas que coexisten en el juego más institucionalizado en la sociedad actual: el deporte.

## El azar y la estrategia

Aunque no hemos dicho nada al respecto, entendemos que cuando hablamos de juegos para la educación no nos estamos refiriendo a juegos de azar. ¿Se trata entonces de juegos de estrategia? En realidad no estamos ante una clasificación en el sentido estricto del término, sino ante una graduación. Juegos de azar y juegos de estrategia son los dos polos extremos de una graduación. Encontramos juegos puros de azar (loterías) y juegos puros de estrategia (ajedrez, por ejemplo). Pero si observamos otros muchos juegos, por otra parte de gran uso social, presentan componentes de azar y componentes de estrategia.

Las condiciones para que un juego tenga componentes de estrategia son:

– Debe tener un conjunto de reglas fijas, determinadas al comienzo de la partida.

– Las reglas deben dejar claro los objetivos de todos los jugadores así como las posibilidades de oponerse a los contrincantes.

– Los jugadores deben poder elegir sus propias acciones para conseguir sus objetivos. Si esto no es posible estamos ante un juego puro de azar. La amplitud de posibilidades de elección será la que marque el carácter más o menos de azar que presenta el juego.

– Las reglas deben determinar cuándo termina el juego, declarando algún vencedor o empate.

Gómez Chacón (1992) compara las tareas propias de la resolución de problemas en Matemáticas con las de los juegos de estrategia:

| Juegos de estrategia | Resolución de problemas |
|---|---|
| Comprender el juego:<br>– Los requisitos.<br>– Las acciones posibles.<br>– Cuándo se gana. | Comprensión del enunciado:<br>– ¿Qué piden?<br>– ¿Qué datos tengo?<br>– ¿Qué necesito? |
| ¿Se ha jugado a algún juego similar? | ¿Conozco algún problema análogo? |
| Elaboración de estrategias de juego. | Establecimiento de conjeturas. |
| Juego y desarrollo de las estrategias. | Examen de la validez de las conjeturas.<br>Ejecución de un plan de resolución. |
| ¿Funciona la estrategia ganadora bajo cualquier condición del juego? | ¿Se trata de una estrategia general? |
| ¿Se puede extender a otros juegos? | ¿Es posible su uso en otros problemas? |

## 12.4. La competición en los juegos

Como consecuencia de todo lo anterior, cuando hablamos del uso del juego en la enseñanza de las Matemáticas nos referimos al juego de reglas que no sea puro de azar.

La mayoría de estos juegos presentan una competición entre varios jugadores, al final de la cual puede haber vencedores y vencidos, o empate. Y precisamente el uso de la competición en el aula es objeto de algunas discrepancias.

Nosotros entendemos que la competición en el juego presenta utilidades didácticas muy importantes como veremos más adelante, pero queremos hacer primero algunas consideraciones, fundamentalmente para aclarar algunos importantes malentendidos que rodean a esta cuestión.

La palabra «competición» está llena de connotaciones negativas y los docentes se preocupan de la rivalidad y los sentimientos de fracaso y rechazo que puede provocar. Vamos a intentar probar que la competición en los juegos es inevitable y que los maestros y maestras deben gestionarla adecuadamente, lo que proporciona múltiples efectos positivos en la enseñanza de las Matemáticas.

Kamii (1988) rebate algunas de las objeciones más frecuentes que los docentes plantean a propósito de la competición en el aula.

*Los niños ya son demasiado competitivos y no debemos colocarlos en situaciones que los hagan aún más.* Parece claro que hay personas más competitivas que otras, lo que puede constituir un rasgo de la personalidad. Pero la competición en el juego no hace referencia necesariamente a este aspecto competitivo. Los niños con tres o cuatro años pueden pelearse por un juguete, sin embargo evolutivamente no son capaces de competir en un juego. El egocentrismo de los niños pequeños les impide interesarse por lo que hacen los demás, lo que es fundamental si uno quiere competir en un juego.

Además, la competición en un juego no es para obtener algo. Ya vimos que si algo caracteriza al juego frente a otras conductas es la ausencia de refuerzos externos, centrando todo el interés en la acción misma. Por el contrario la competitividad fuera del juego se caracteriza por la obtención de ciertas recompensas (materiales, reconocimiento social, etc.).

*Ya hay demasiada competición en nuestra sociedad, y los niños se verían expuestos a ella demasiado pronto en la escuela.* Esta objeción se basa en la confusión entre la competitividad social (y escolar) y la competición de los juegos. Existen importantes diferencias:

| Competitividad social | Competición de los juegos |
|---|---|
| El objetivo es un beneficio material o social. | No hay ganancias fuera del juego. |
| Los competidores tratan de eliminarse de manera permanente. | Ser eliminado o perder sólo tiene vigencia durante un periodo limitado, tras el que todo volverá a ser igual que al principio. |
| Los competidores no acuerdan normas antes de competir. | Las reglas se establecen al principio y si algún jugador no las cumple es rechazado. |

El uso de los juegos con competición no tiene nada que ver con el uso de prácticas competitivas dentro del contexto escolar. Otorgar premios o galardones para motivar a los niños a aprender dificultará el uso del juego en el aula de manera adecuada, además de que muchos alumnos acaban persiguiendo estas recompensas en lugar del placer intrínseco al aprendizaje.

*Los juegos afectan a los perdedores.* Perder afecta cuando supone una degradación. Los maestros y maestras deben cuidar especialmente este aspecto. El contrato didáctico del aula debe dejar muy claro este extremo. Ganar en un juego no significa más que eso: ganar en un juego. Perder forma parte intrínseca del juego, además de ser bastante educativo. Ahora bien, el perdedor no es inferior ni incompetente. Con estos planteamientos absolutamente explícitos, los niños que sufran excesivamente perdiendo son aquellos que no explorarán actividades nuevas, lo que es imprescindible para poder aprender. Si solo hacemos lo que *a priori* sabemos que sabemos hacer, es difícil construir nuevos conocimientos.

*Los niños deberían competir con ellos mismos y no unos contra otros.* Se trata de un eufemismo que muestra una intención de hacer competir pero rechazándolo a la vez. Incluso muchos de los denominados juegos cooperativos son muestras de este hecho. El maestro o maestra no debe evitar los juegos de competición, sino conseguir que los niños jueguen de manera honesta, tomando sus propias decisiones.

Como conclusión, Kamii extrae algunos principios de enseñanza sobre la competición de los juegos en el aula.

*Quitar importancia al hecho de ganar.* Ganar es malo cuando no se sabe ganar, cuando el ganador muestra algún desprecio por el perdedor. También es frecuente ver a los adultos glorificando al vencedor. El docente debe minimizar la importancia de ganar desde el comienzo del juego. Ganar solo es importante dentro del juego, nunca después. Algunos entrenadores hacen explícito este hecho cuando dicen a sus jugadores: «Salid y divertíos».

*Poner de manifiesto que no pasa nada si se pierde.* No basta con declararlo formalmente si luego el alumno observa que en realidad perder en el juego lleva consigo algún tipo de consecuencia. La práctica cotidiana debe demostrar que perder en un juego solo es eso: perder en un juego.

Imaginemos el juego de las sillas, en el que los niños se mueven mientras suena una música alrededor de un círculo de sillas. Hay una silla menos que niños y cuando la música se para, los niños deben sentarse. Queda eliminado aquel que no se siente. Al niño eliminado le damos un instrumento de música, para que se incorpore a la orquesta encargada de hacer la música. Esto puede suponer un buen ejemplo de práctica docente que ayudará a superar los temores a perder en un juego.

*Permitir que los niños eviten la competición si no quieren.* Si nunca un juego debe ser una imposición, menos la competición. Competir es provechoso didácticamente si es voluntario. De todas maneras hay que decir que la mayoría de los niños obtienen placer poniéndose a prueba, por lo que compararse con los demás es una práctica bastante habitual. El rechazo a competir, siempre dentro de un juego por supuesto, desaparecerá si respetamos las observaciones expuestas antes.

*Incorporar más elementos de azar.* En los juegos puros de estrategia, la posibilidad de vencer depende de las habilidades de los jugadores. Muchas veces los niños rehúsan jugar si observan que han perdido repetidas veces. En ese caso puede dar buenos resultados incrementar el azar en el juego.

En definitiva, el incremento o disminución del papel del azar en un juego es una variable didáctica[2] que el docente debe gestionar en función de sus objetivos didácticos.

[2] Léase el capítulo 2, donde se muestra la noción de variable didáctica y su gestión en las situaciones didácticas.

**Actividad 3:** Analice el grado de azar de los juegos de mesa que suelen desarrollarse en los ambientes familiares. Observe que por regla general no son juegos que exijan una atención exhaustiva al desarrollo de una estrategia.

## 12.5. Consideraciones didácticas sobre el juego en la enseñanza de las Matemáticas

En el capítulo segundo de este libro se expone la importancia del planteamiento de situaciones a-didácticas en el aprendizaje de las Matemáticas. Veamos cómo los juegos reúnen algunas de las características de este tipo de situaciones:

### El alumno debe disponer de algún procedimiento inicial

En las situaciones a-didácticas el alumno debe poder iniciar su trabajo con alguna estrategia inicial, que no se corresponderá con el procedimiento óptimo. Cuando un niño comienza un juego, obviamente no dispone de la estrategia para ganar, ahora bien, siempre podrá comenzar a jugar. Si el niño conoce la manera de ganar siempre, simplemente no supondrá un juego para él.

### El procedimiento de base debe revelarse rápidamente como insuficiente o ineficaz para el alumno

Cuando los niños juegan compitiendo, unos ganan y otros pierden. Cuando uno pierde debe modificar su forma de jugar, debe buscar nuevas estrategias. Esto puede posibilitar que se vea obligado a hacer acomodaciones, modificaciones en su sistema de conocimientos. De una manera natural la actividad, en este caso lúdica, provoca en el niño la necesidad de modificar sus procedimientos hasta dar con aquellos que mejor se adapten a la situación, lo que caracteriza a las situaciones de aprendizaje.

### Existe un medio para la validación

Un juego hace evidente la validez de las estrategias que construye y utiliza un niño. La victoria o la derrota muestran con toda rotundidad dicha validez. Además, esta validación no dependerá del maestro o maestra, es la situación misma la que evidencia al alumno la bondad de sus procedimientos, lo que es propio de situaciones a-didácticas.

### Que exista incertidumbre en el alumno en cuanto a las decisiones a tomar

La posibilidad de jugar está totalmente ligada a la incertidumbre en las decisiones. Si se dispone de un algoritmo para el juego, éste deja de ser atractivo. El azar puede abrir o cerrar el campo de acción del jugador/alumno; en los juegos de estrategia esta amplitud es máxima, en los juegos de azar, mínima. El docente deberá gestionar esta variable para adaptar el campo de acción a las posibilidades del niño.

### Que el medio permita retroacciones

Pocos medios hacen posible las retroacciones de manera más rotunda. Las sucesivas jugadas ofrecen a cada uno de los contendientes la posibilidad de volver a actuar a partir de las informaciones y datos que se van produciendo en el contexto del juego.

### Que el juego sea repetible

Un juego podrá repetirse cuantas veces se quiera. Los niños dejarán de jugar cuando deje de ser atractivo para ellos, esto es, cuando el niño domine la estrategia ganadora y deje de suponer un reto. En ese caso los conocimientos que justifican dicha estrategia estarán adquiridos.

### Que el conocimiento buscado deba necesitarse como requisito, de forma lógica, para pasar de la estrategia de base a la estrategia óptima

Este hecho justificará el uso de determinados juegos en el aula. Veremos en los apartados posteriores algunos juegos que favorecen el aprendizaje de ciertas nociones matemáticas. Se trata de juegos en cuya estrategia van a intervenir de manera inequívoca dichas nociones matemáticas. Sin entrar a evaluar las posibilidades del juego como dinamizador de la socialización del niño, nuestro trabajo en el área de Didáctica de las Matemáticas se centra en aquellos juegos que hacen evolucionar los conocimientos matemáticos del niño.

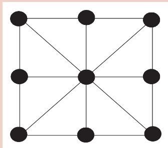
En definitiva, y como dijimos en la introducción, no se trata de presentar el juego como un «complemento» en la enseñanza de las Matemáticas, sino como una herramienta absolutamente central. Jugar es una forma muy seria de aprender Matemáticas.

# 12.6. Los juegos y el pensamiento lógico

### Las tres en raya

Nombre: Las tres en raya.

Número de jugadores: 2. Simétricos (ambos hacen papeles similares).



Material:

– Dos juegos de tres fichas de dos colores distintos.

– Tablero como se muestra al lado.

Objetivo: Conseguir alinear las tres fichas.

Reglas:

– Cada jugador juega con tres fichas del mismo color.

– Por turnos, cada jugador coloca una ficha en uno de los círculos del tablero que no esté ocupado por otra ficha.

– Una vez que se han introducido las tres fichas, en su turno cada jugador mueve una de sus fichas a otro círculo que esté libre.

– Gana aquel que consiga poner sus tres fichas en línea recta.

Vamos a comenzar con este juego muy extendido pero no por ello menos interesante en Educación Infantil. Existen diversas variantes, algunas denominadas *tic-tac-toc*.

El motivo de presentar este archiconocido juego es que quizá se trate de uno de los primeros juegos en que el niño aprende a oponerse al adversario. En un primer momento el niño va a ocuparse exclusivamente de colocar sus tres fichas en línea. Observa que esto no le da buen resultado si no tiene en cuenta simultáneamente los movimientos de su compañero. Entonces pasa a modificar su estrategia moviendo sus fichas teniendo en cuenta que también debe impedir la victoria de su adversario.

En definitiva, obliga a superar el egocentrismo infantil, al tener que considerar puntos de vista ajenos. Es una necesidad en los juegos de competición por la cual están especialmente indicados en Educación Infantil.

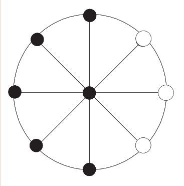
Los niños dejan de jugar a este juego cuando las partidas se alargan sin vencer ninguno.

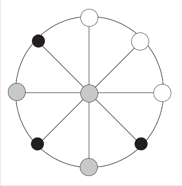
Es entonces cuando se les puede presentar las siguientes variantes:

**Variante 1:**

Cambiamos el tablero por el siguiente:

Se acepta también como posición ganadora tres fichas consecutivas en la circunferencia, como por ejemplo las tres fichas blancas.

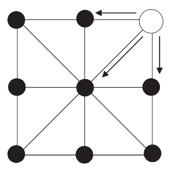




**Variante 2:**

Se juega con el mismo tablero, pero los movimientos de las fichas solo se pueden realizar entre círculos contiguos, entendiendo como tales los que están unidos por un solo segmento.

De esta manera la ficha blanca de la figura solo puede hacer los tres movimientos indicados.



Son dos los objetivos de estas variantes:

– Obligan a modificar las estrategias que el alumno ha construido en la versión clásica, dando más posibilidades de superar el egocentrismo, a partir de contextos similares.

– Se consiguen posiciones ganadoras con mayor probabilidad, lo que puede conducir a generar más estrategias para ganar, en lugar de para no perder, como en el caso de la versión clásica. En particular, en la segunda variante existe una estrategia ganadora para el jugador que comienza[3].

**Actividad 4:** Invitamos al lector a diseñar una estrategia para vencer siempre en las tres en raya según la variante 2. La estrategia debe prever, por supuesto, cualquier juego de su adversario.

También puede ser interesante el juego de las **cuatro en raya,** con tableros cuadriculados y con una mayor cantidad de fichas. Aquí las fichas no se desplazan, solo entran en el tablero y permanecen en su posición. La versión más conocida de esta variante dispone el tablero de manera vertical, lo que restringe las posibilidades de colocación al colocar primero las fichas en las filas inferiores. Son juegos en los que el niño, a partir de unas reglas muy sencillas, debe conseguir ponerse en lugar de su adversario para evitar ser derrotado.

[3] Advertimos al lector que esta estrategia contempla la posibilidad de mover la ficha central, regla que no hemos formulado ni en la versión clásica, pero que sabemos que es asumida por multitud de jugadores.

## El quarto[4]

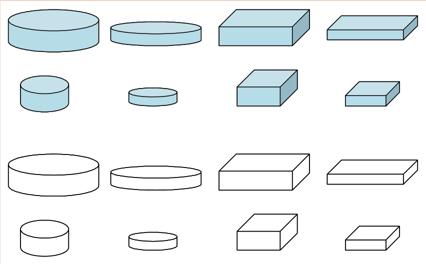
Aunque se trate de un gran juego de estrategia, nos parece que puede ser un instrumento muy interesante en Educación Infantil.

Nombre: Quarto.

Número de jugadores: 2. Posición simétrica.

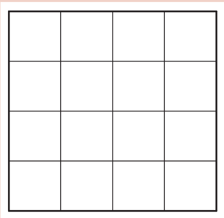
Material:

– 16 piezas como las que figuran al lado:

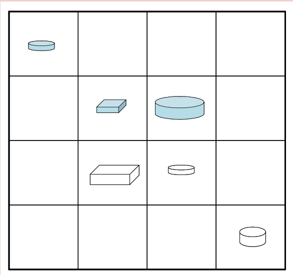


Se trata de 16 piezas todas distintas en las que se pueden observar 4 atributos binarios. En este caso: color (azul y blanco), forma (círculo y cuadrado), tamaño (grande y pequeño) y grosor (delgado y grueso). En la versión comercializada se trata de otras figuras con otros atributos.

– Un tablero como el siguiente:



Objetivo: Conseguir alinear cuatro piezas con un atributo común. Por ejemplo, en la diagonal de la siguiente figura se encuentran cuatro piezas pequeñas, lo que sería un alineamiento ganador:



Reglas:

– Las piezas están a disposición de ambos jugadores.

– Por turnos, cada jugador elige una pieza, se la da al adversario y éste la coloca en una casilla libre del tablero.

– El juego termina cuando el jugador que coloca la pieza, que no ha elegido, consigue formar un alineamiento de cuatro piezas con un atributo común, por lo que vence. Cuando se han colocado las dieciséis piezas sin conseguir lo anterior, se producen tablas.

[4] Se trata de un juego reciente diseñado por Blaise Muller y comercializado por Gigamic.

Naturalmente no se trata de que los alumnos de Educación Infantil busquen la mejor estrategia para vencer, basta con que sepan cumplir las reglas del juego, lo que les exige:

– Ser capaces de aislar los atributos.

– Manejar la conjunción de atributos en un mismo objeto.

– Pensar en términos negativos, al buscar una pieza que no permita formar un alineamiento ganador, ya que, si no, ganará nuestro adversario. Es quizá uno de los aspectos más sorprendentes de este juego, pero a la vez más provechosos didácticamente. Proporciona un contexto que obliga a manejar la negación de atributos, incluso la negación de una disyunción o conjunción.

Variantes:

Podremos jugar sin la regla de la «negación». Esto es, el jugador elige una pieza y la coloca. En este caso simplificamos el juego, que se hace así accesible para niños más pequeños.

Podremos también jugar con un tablero más grande aumentando las posibilidades de alineamiento.

### Juegos de retrato[5]

Nombre: ¿Quién es?

Número de jugadores: 2. Posición asimétrica.

Material:

Una colección de objetos en los que se puedan identificar determinados atributos. Puede ser una baraja, los bloques lógicos… Hay que prestar atención a la constitución de la colección ya que si no es correcta puede impedir el juego.

Objetivo: Adivinar el objeto que ha elegido el compañero.

Reglas:

- Un jugador, A, que tiene en su poder la colección, elige una pieza.
- El otro jugador, B, va preguntando cuestiones que puedan ser contestadas solo con sí o no.
- El juego termina cuando el jugador B declara qué objeto es el escondido.
- Intercambian los papeles y se vuelve a jugar.
- Se pueden dar tres casos:
  a) Si ambos jugadores, en la posición B, han acertado, vence quien lo haya hecho con el menor número de preguntas.
  b) Si solo ha acertado uno, es el vencedor.
  c) Si ambos han fallado, tablas.

[5] Son juegos muy usuales pero comercializados actualmente por varias empresas bajo el nombre de «¿Quién es quién?».

Se trata de un juego también muy clásico y que puede ayudar a que el niño:

– Sea capaz de aislar atributos.

– Pueda identificar un conjunto por una propiedad característica.

– Realice clasificaciones a partir de la equivalencia de objetos respecto de un atributo.

– Sea sistemático en la búsqueda y tratamiento de informaciones.

Existe un aspecto en este juego que hay que tener en cuenta. En las versiones comerciales, cada niño dispone de una colección idéntica, lo que permite que ambos jugadores hagan el papel A y B a la vez. Pero, además, el niño puede ir apartando de su colección los objetos que rechace en función de las respuestas que, a sus preguntas, da su adversario. Así, si jugamos con una baraja española y preguntamos: «¿Es de copas?», si la respuesta es no, retiro todas las cartas de copas, y sigo preguntando a la vista de las cartas restantes.

En la descripción que hemos hecho del juego, no hemos contemplado esta posibilidad. No ha sido por descuido. Se trata de una variante más compleja. El niño debe estructurar previamente la colección en función de los distintos atributos si quiere ir avanzando adecuadamente. Si no lo hace corre el peligro de hacer preguntas redundantes que no le ofrezcan información relevante. Nosotros proponemos que se comience con la disponibilidad de las dos colecciones, para pasar luego a jugar con una sola.

**Actividad 5:** ¿Qué hacemos para saber qué carta falta de una baraja? Identifique los procesos que ponemos en juego. Diseñe una actividad que pueda servir como introductoria para los juegos de retrato.

## 12.7. Los juegos cuantitativos

### El número para comparar

#### ¡A casa!

Nombre: ¡A casa!

Número de jugadores: 4. Posición simétrica.

Material:

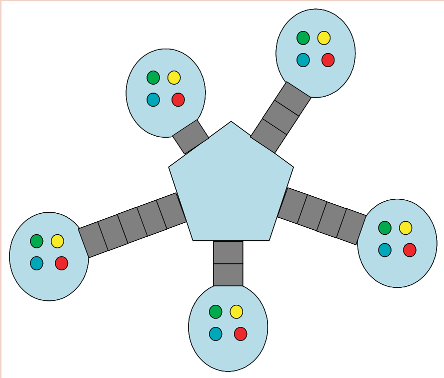
– Un dado tradicional.

– 4 juegos de 5 fichas de colores distintos.

*Continúa*

*Continuación*

– Un tablero como el siguiente:



Objetivo: Conseguir llevar a casa todas las fichas.

Reglas:

– Cada jugador juega con las fichas de un color.

– En cada turno, el jugador lanza un dado, y mueve a lo sumo una ficha de su color, avanzando tantas casillas como indique el dado y debiendo llegar a la casilla central. No pueden quedarse en los caminos.

– Para alcanzar la casilla central no es necesario obtener el número preciso, basta con que se alcance. Así, si un jugador obtiene un seis en el dado puede mover cualquiera de sus fichas desde el círculo de salida hasta la casilla central.

– El primer jugador en colocar todas sus fichas en «casa» es el vencedor.

Este juego[6] sencillo pretende que el niño use el número para comparar. Aunque naturalmente el azar tiene una presencia importante, el niño tiene un cierto margen de decisión. Si obtiene, por ejemplo, un cuatro, ¿qué ficha mover? La mejor opción es mover la ficha disponible que necesite un número mayor y éste sea menor o igual que cuatro. Como se ve, no se trata de una simple comparación entre dos cantidades, sino que fuerza a seriar las cantidades para poder elegir la mejor opción.

**Actividad 6:** Modifique las reglas para simplificar el juego de manera que el niño solo necesite comparar dos cantidades en cada jugada, sin elegir entre varias posibilidades.

[6] Extraído de Ermel: *Apprentissages numériques (grande section de maternnelle)*, Hatier, París, 1990.

Puede ser interesante jugar con un dado en el que las constelaciones de puntos sean sustituidas por la escritura numérica, de manera que el niño no pueda comparar término a término los puntos del dado con las casillas del recorrido. Así se verá obligado a utilizar las comparaciones puramente numéricas.

## El número para calcular

### Las parejas

**Las parejas**

Nombre: Las parejas.

Número de jugadores: Hasta 4. Posición simétrica.

Material: Todas las cartas del 1 al 7 de una baraja española y un rey.

Objetivo: Deshacerse de todas sus cartas.

Reglas:

– Se reparten todas las cartas entre los jugadores.

– Los jugadores se descartan de aquellas parejas de cartas que sumen 8.

– Una vez que se han descartado de todas las posibles, por turnos cada jugador roba una carta al compañero que está a su izquierda. Si de esta manera consigue otra pareja de cartas que sumen 8, se descarta.

– El juego termina cuando al final solo queda el rey en posesión de algún jugador, que es el perdedor.

Se trata de un sencillo juego puro de azar, pero que en su desarrollo, el niño debe manejar las descomposiciones aditivas del ocho. Si disponemos de otras cartas, podemos jugar con otros números. Especialmente interesantes son las descomposiciones aditivas del 10, por su trascendencia posterior en las técnicas de cálculo.

Al igual que con cartas, es posible diseñar juegos con estos objetivos a partir de bingos, dominós, etc. Basta con construir las reglas adecuadas para que el niño deba identificar las descomposiciones aditivas equivalentes.

**Actividad 7:** Modifique las reglas clásicas del dominó tradicional para que el niño deba utilizar descomposiciones aditivas de números.

### ¡No va más!

Nombre: ¡No va más!

Número de jugadores: 2 a 4. Posición simétrica.

Material:

– Dos juegos de cartas del 1 al 10 (20 cartas en total).

– Dos dados con cantidades del 0 al 5 (pueden servir los dados tradicionales a los que se les ha sustituido el seis por el cero).

Objetivo: Conseguir el mayor número de cartas.

Reglas:

– Se colocan las 20 cartas expuestas a la vista de todos los jugadores.

– Por turnos, cada jugador tira los dados y suma la cantidades obtenidas. Debe coger las cartas de la mesa cuya suma de puntos sea igual que la que ha obtenido con los dados.

– El juego se termina cuando algún jugador retira en su turno las últimas cartas; o si en el turno de un jugador, no es posible retirar ninguna carta (no es posible conseguir con las cartas que quedan en la mesa la cantidad obtenida por los dados), entonces aquel jugador que antes diga: «¡No va más!», obtiene todas las cartas restantes.

– Vence aquel jugador que ha conseguido el mayor número de cartas. (Atención: *no* quien ha obtenido el mayor número de puntos).

Si en el juego anterior estaba fijada la cantidad que se iba a descomponer, en este la cantidad varía y también el número de sumandos de la descomposición. Es más, una buena estrategia consiste en descomponer aditivamente, con el mayor número de sumandos posible, la cantidad que salga en los dados, ya que conseguiremos más cartas. (Si obtenemos 7, es mejor jugada tomar las cartas 2, 2 y 3, que 3 y 4).

**Actividad 8:** Altere algún material o regla del juego anterior para aumentar o disminuir su dificultad.

Realice también las modificaciones buscando una mayor o menor presencia del azar en el juego.

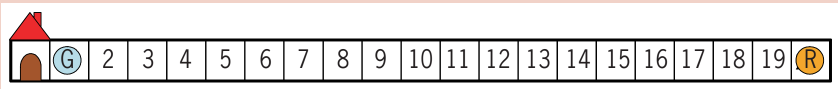
## El ratón y el gato

Nombre: El ratón y el gato.

Número de jugadores: 2. Posiciones asimétricas.

Material:

– Un tablero como el siguiente:




– Un dado usual.

– Una ficha para el gato y otra para el ratón (que ya están colocadas en el tablero).

Objetivo: Para el gato: atrapar al ratón. Para el ratón: refugiarse en su casa (la casilla 0).

Reglas:

– El gato comienza en la casilla 1 y el ratón en la 20.

– El ratón empieza: lanza el dado y se mueve tantas casillas a la izquierda como indique el dado.

– El gato lanza el dado y se mueve tantas casillas a la derecha como haya obtenido.

– Por turnos, cada jugador lanza el dado y se mueve tantas casillas a la izquierda o a la derecha como indique el dado, y siempre que sea posible.

– El gato no puede ir a la casa del ratón (casilla 0), y ninguno puede pasar de 20.

– La partida se para en uno de los tres casos siguientes:
  - El gato llega en su turno a la casilla en que se encuentra el ratón. Gana el gato.
  - El ratón llega a su casa. Gana el ratón.
  - Se puede acordar terminar el juego tras un número determinado de tiradas, o bien un tiempo establecido. Si en este caso se termina el juego sin que el gato haya atrapado al ratón, gana el ratón.

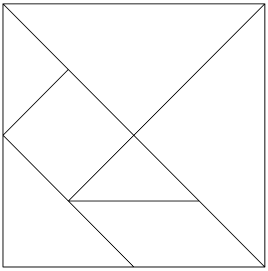
Se trata de un juego de anticipación de resultados. El niño debe prever en qué casillas no debe colocarse para no estar en riesgo de ser alcanzado, o bien para alcanzar, según sea gato o ratón. Además, ofrece una contextualización de la adición-sustracción como desplazamientos en distintos sentidos. Estos contextos proporcionarán al niño en cursos posteriores situaciones muy interesantes para trabajar las operaciones.

Podemos modificar el dado utilizado o el tablero. Incluso podemos lanzar dos dados y elegir el valor que más nos interese. El tablero podemos ampliarlo si observamos que los niños pueden manejarse con números mayores.

# 12.8. Los juegos y la estructuración del espacio

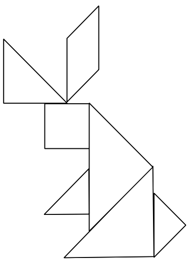
## Puzzles

Es abundante el material existente en el mercado con este propósito. De entre todos ellos es especialmente interesante el tangram chino, consistente en siete piezas, que suelen presentarse formando el siguiente cuadrado:

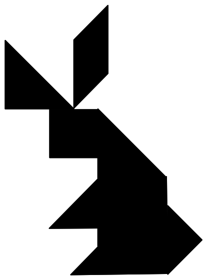


Con estas siete piezas, por las relaciones métricas que cumplen sus lados, es posible formar multitud de siluetas.

Veamos con una de ellas una posible progresión de actividades:



Modelo 1



Modelo 2

1. Reproducción sobre el modelo 1 en tamaño natural.
2. Reproducción al lado del modelo 1.
3. Reproducción sobre el modelo 2 sin fronteras interiores.
4. Reproducción al lado del modelo 2 sin fronteras interiores.

El trabajo con el tangram en Educación Infantil permite al niño trabajar el reconocimiento de distintas figuras geométricas, así como sus relaciones, posiciones relativas y orientación en el plano.

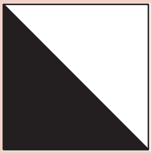
### Los cuadros bicolores[7]

Nombre: Los cuadros bicolores.

Juego individual.

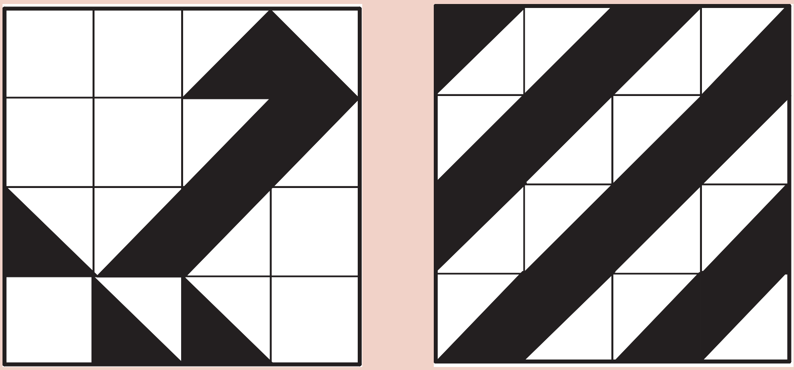
Material:

– Una cantidad suficiente de cuadros como el siguiente:



– Plantillas en forma de cuadrícula de distintas dimensiones.

Se trata de formar figuras como las siguientes:



Este puzzle exige al niño la elección entre las cuatro orientaciones posibles del cuadrado unidad para colocarlo correctamente y formar la figura que se le demanda. Por otra parte, debe reconocer la localización en la cuadrícula de cada cuadrado.

En un primer lugar el niño dispondrá del modelo en tamaño real, lo que le permite ensayar sobre la muestra la colocación de cada cuadrado. Posteriormente los modelos se le suministrarán reducidos.

[7] Extraído de F. Martín, 2003, p. 131.

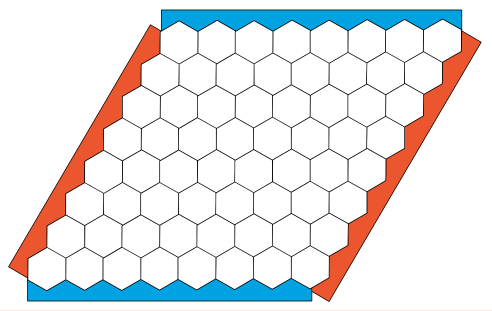
## El Hex

Nombre: Hex

Número de jugadores: 2.

Material:

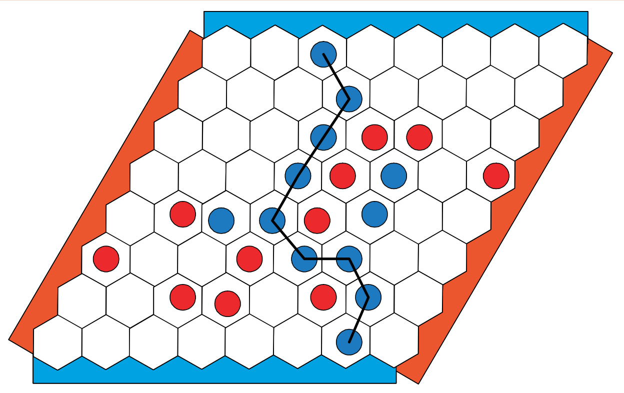
– Tablero formado por una red hexagonal de 8 x 8 (el juego original utiliza una red de 16 x 16), como el que muestra la figura siguiente.



– Fichas suficientes de dos colores.

Objetivo: Construir un camino que una los dos lados de su mismo color.

En la siguiente partida el jugador con azules ha vencido.



Reglas:

– Cada jugador usa las fichas de un color.

– Cada jugador en su turno coloca una de sus fichas en una casilla libre del tablero. Las fichas no se mueven una vez que han sido colocadas.

– El juego termina cuando uno de los dos jugadores cumple su objetivo.

Se trata de un gran juego de estrategia ideado en 1942 por Danois Piet Hein.

Sus reglas son sencillísimas, y por tanto es muy fácil comenzar a jugar. Naturalmente, en Educación Infantil nuestro propósito no es el de generar buenas estrategias de juego, sino que el niño experimente con la idea de vecindad y recorrido continuo. Todo ello en una red hexagonal, que presenta muchas singularidades respecto de las usuales redes cuadradas. Entre otras cosas ofrece algo sorprendente: no es posible hacer tablas.

**Actividad 9:** Intente jugar con las mismas reglas en un tablero con una red cuadrada. ¿Qué casillas son vecinas y cuáles no? ¿Qué ocurre en cada caso?

**Actividad 10:** La mejor manera de conocer un juego es ¡jugando! Aunque no lo hayamos indicado a lo largo del capítulo, juegue, experimente y modifique los juegos que se han propuesto. Diviértase, que, como hemos apuntado en el texto, seguro que aprende.

## 12.9. Bibliografía

A.P.M.E.P.: *Jeux 1. Les jeux et les mathématiques*, A.P.M.E.P., Paris, 1982.

Boule, F.: *Mathématique et jeux*, CEDIC, Paris, 1976.

Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M.: *Iniciación a la lógica matemática. Jugar y pensar 1 y 2*, Alhambra-Longman, Madrid, 1996.

Champdavoine, L.: *Les mathématiques par les jeux (petite et moyenne section)*, Fernand Nathan, Paris, 1985.

—: *Les mathématiques par les jeux (grande section et C.P.)*, Fernand Nathan, Paris, 1986.

Ferrero, L.: *El juego y la matemática*, La Muralla, Madrid, 1991.

Gómez Chacón, I. M.: *Los juegos de estrategia en el curriculum de matemáticas*, Narcea, Madrid, 1992.

Kamii, C.: *Juegos colectivos en la primera enseñanza*, Visor, Madrid, 1988.

Linaza, J. S.: *Jugar y aprender*, Alhambra-Longman, Madrid, 1991.

Martín, F.: *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle*, CRDP Aquitaine, Bordeaux, 2003.

# Bibliografía

APMEP: *Jeux 1. Les jeux et les mathématiques*, APMEP, Paris, 1982.

BAROODY, A.: *El pensamiento matemático de los niños*, Visor, Madrid, 1988.

BOULE, F.: *Mathématique et jeux*, CEDIC, Paris, 1976.

—: *Manipular, organizar, representar*, Narcea, Colección Primeros pasos, Madrid, 1995.

BRIAND, J. y CHEVALIER, M. C.: *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Hatier, Paris, 1995.

BROUSSEAU, G.: *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991. (Existe versión inglesa en la misma editorial).

CHAMORRO, M. C.: *El aprendizaje significativo en Matemáticas*, Alhambra-Longman, Madrid, 1992.

— (ed.): *Dificultades de aprendizaje de las Matemáticas*, MECD, Madrid, 2001.

— (ed.): *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson Prentice Hall, Madrid, 2003.

— (ed.): *Los lenguajes de las ciencias*, MECD, Madrid, 2004.

— (ed.): *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*, MECD, Madrid, 2004.

CHAMORRO, M. C. y BELMONTE, J. M.: *Iniciación a la lógica matemática. Jugar y pensar 1 y 2*, Alhambra-Longman, Madrid, 1966.

—: *El problema de la medida*, Síntesis, Madrid, 1991.

CHEVALLARD, Y.: *La transposición didáctica*, AIQUÉ, Buenos Aires, 1998.

D'AMORE, B.: *Problemas*, Síntesis, Madrid, 1997.

ERMEL: *Apprentissages numériques*, Grande section de maternelle, Hatier, Paris, 1990.

—: *Apprentissages numériques*, CP, Hatier, Paris, 1991.

—: *Apprentissages numériques* CE1, Hatier, Paris, 1993.

FERRERO, L.: *El juego y la matemática*, La Muralla, Madrid, 1991.

KAMII, C.: El número en la educación preescolar, Visor Aprendizaje, Madrid, 1984.

—: *Juegos colectivos en la primera enseñanza*, Visor, Madrid, 1988.

MARTÍN, F.: *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle*, CRDP Aquitaine, Bordeaux, 2003.

RESNICK, L. B. y FORD, W. W.: *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Paidós-MEC, Barcelona, 1990.

VECINO, F.: *La representación del espacio en la transición de la escuela infantil a la escuela primaria*, UNO, 93-107, 1997.

**COLECCIÓN DIDÁCTICA INFANTIL**

La coordinadora de la obra, **Mª del Carmen Chamorro** es catedrática de Escuela Universitaria de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid.

La mayoría de los padres, y parte de los enseñantes, creen que en **Educación Infantil** no es posible hacer un trabajo matemático de calidad, y que como mucho los niños pueden aprender cómo se leen y se escriben los primeros números. Prueba de ello son los aburridos manuales, con sus repetitivas fichas, que los niños de Educación Infantil deben ir rellenando a lo largo del curso, y que dan fe de una concepción del aprendizaje muy alejada de lo que la investigación ha desvelado, no sólo como conveniente, sino también posible.

En este libro, el profesional de **Educación Infantil** encontrará respuesta a muchas de sus preguntas y, sobre todo, una línea de trabajo coherente, científicamente fundada, para trabajar el área lógica-matemática y que va más allá de un repertorio de actividades atractivas sueltas.

Los autores, aunque son matemáticos de formación y expertos en Didáctica de las Matemáticas, han pasado muchas horas en las aulas de la **Escuela Infantil**, por lo que han tenido ocasión de experimentar la mayoría de las propuestas que aquí se presentan; han hecho muchas observaciones que han reflejado en el texto, y han trabajado en colaboración con muchos maestros y maestras de **Educación Infantil**. Este libro es por tanto el resultado de su estudio y su experiencia que ahora quieren compartir con otros docentes o futuros docentes.

**Otros libros de la colección:**

- Didáctica General
- Didáctica de la Música para Educación Infantil
- Didáctica del Inglés para Educación Infantil

Además:

- Didáctica de las Matemáticas para Primaria
- Didáctica de la Lengua y la Literatura para Primaria
- Didáctica de las Ciencias Sociales para Primaria
- Didáctica de la Educación Física para Primaria
- Didáctica de la Educación Artística para Primaria
- Didáctica de la Música para Primaria
- Didáctica del Inglés para Primaria
- Didáctica de la Llengua i la Literatura per a Primaria

PEARSON Educación

**www.pearsoneducacion.com**

ISBN 978-84-832-2891-3

9 788483 228913