

Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños

Sonia Milena Uribe Garzón, Óscar Leonardo Cárdenas Forero
y James Frank Becerra Martínez

Resumen: El presente artículo describe los elementos que constituyen la propuesta didáctica **Teselaciones para niños** como una alternativa en el aula que se viene adelantando en la escuela con niños de preescolar y primaria básica (entre los 5 y 11 años de edad) desde el año 2004, la cual recurre al trabajo con las teselaciones (creaciones artísticas con polígonos regulares o irregulares que, repetidos sobre el plano, llenan completamente una región sin vacíos ni superpuestos), de modo exploratorio y dinámico. El propósito fundamental es desarrollar las *habilidades del pensamiento espacial* (coordinación visomotriz, coordinación figura-fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, relaciones de percepción espacial, discriminación visual y memoria visual) y la *construcción de conocimientos, nociones y conceptos geométricos* (**euclidianos**, como por ejemplo, línea, vértices, polígonos; **topológicos**, como región, interior, frontera; **proyectivos** e **isometrías** propias del plano euclidiano y de la **geometría de las transformaciones**, como son las transformaciones relacionadas con rotación, traslación y reflexión) de los niños en la escuela primaria. La propuesta se materializa en el diseño e implementación de un conjunto de *unidades didácticas* coherentemente estructuradas que integran elementos propios de la geometría, el *pensamiento espacial* y la *expresión artística*. Con todo eso se apuesta por integrar un nuevo currículum con un nuevo saber escolar matemático y artístico.

Palabras clave: geometría activa, teselaciones geométricas, habilidades de percepción espacial, conceptos y nociones geométricas.

Fecha de recepción: 24 de julio de 2013; fecha de aceptación: 31 de mayo de 2014.

Abstract: The present article describes the elements that are immersed in the didactic proposal **Tesselations for Children**, as a class alternative, that has been developed in the school with preschoolers and the primary school children (between 5 and 11 years old) since 2004. It appeals to the job with tessellations (artistic creations with regular or irregular polygons that repeated on the plane completely fill a region without gaps or overlapping) in order to develop the spatial thinking skills (visual-motor coordination, figure-ground coordination, perceptual constancy, perception of position in space, spatial relations perception, visual discrimination and visual memory) and the construction of knowledge, ideas and geometric concepts (**Euclidean** for example line, vertex and polygons; **topological** as inner region and border; **projective** and **isometrics** own the Euclidean plane and from the **geometry transformation** in which are rotation, translation and reflection) from children in primary school. The proposal materializes in the design and implementation of a number of didactic units structured coherently that integrate elements of geometry, of the spatial knowledge and the artist expression that permits to integrate a new curriculum into a new mathematic and artist knowledge.

Keywords: active geometry, geometric tessellations, spatial perception skills, geometric concepts and ideas.

LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA

En la mayoría de instituciones escolares, **particularmente** en básica primaria, hay una tendencia a iniciar, constituir y desarrollar el *pensamiento matemático de los niños* a partir de "la adquisición de destrezas, habilidades y conocimientos aritméticos y numéricos, manejo de algoritmos relacionados con las cuatro operaciones básicas, memorización de procedimientos mecánicos para la resolución de problemas o ejercicios" (Benítez y Cárdenas, 2008, p. 2), así como la aplicación de una serie de fórmulas para hallar el perímetro o el área de ciertos polígonos. Esta tendencia ha derivado en que uno de sus componentes, la *geometría* (y, en consecuencia, el desarrollo de nociones y conceptos geométricos), y, por supuesto, *el pensamiento espacial* se hayan diluido tanto en los procesos de enseñanza, como en la estructuración de los planes de estudio (en algunos países como Colombia) y en el diseño e implementación de las estrategias didácticas para el aprendizaje matemático. Es más, el proceso de enseñanza de la geometría se limita a la enseñanza de algunos elementos de la *geometría*

euclidiana como, por ejemplo, el manejo de ciertos conceptos relacionados con polígonos como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo, la circunferencia y algunos sólidos como el cono, los prismas, el cilindro y la pirámide. Con ello se desconoce que “desde un punto de vista didáctico, científico e histórico [...] se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría” (Vasco, 1998); se desconoce también que la construcción de las nociones espaciales y del espacio mismo es una totalidad que se compone de relaciones topológicas, proyectivas y euclidianas, siendo las relaciones topológicas aprehendidas primero por los niños antes que las proyectivas y sobre todo que las euclidianas (Sauvy *et al.*, 1980). Sin embargo, esta idea se ha venido reconfigurando al considerar que “los niños utilizan el espacio y construyen un conjunto de conocimientos prácticos que les permiten dominar sus desplazamientos y construir sistemas de referencia (Sáiz, 1987; Berthelot y Salin, 1994; Castro, 1999). Estos conocimientos son aprendidos independientemente del paso de los niños por la escuela. Se trata de adquisiciones espontáneas en su proceso de construcción de nociones espaciales” (Broitman, 2000a, p. 2).

Al respecto, es preciso comentar que diversos estudios adelantados por Brun, Broitman, Quaranta, Berthelot y Salin, y Duval, entre otros autores, han cuestionado las posturas piagetianas al plantear la necesidad de superar la concepción “aplicacionista” de un modelo del desarrollo psicológico a la enseñanza, que se instrumenta “con los objetos, problemas, conceptualizaciones, métodos y resultados de un campo de estudio propio de los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” (Quaranta, 1998, p. 17), que se ha mantenido instalada en la escuela, en particular, la primaria. Es más, Broitman (2000a), acudiendo a los planteamientos de Brun (1994), sostiene que:

...la psicología genética influyó en la enseñanza a partir de ciertos malentendidos originados en las relaciones entre las nociones estudiadas por Piaget y la enseñanza de la matemática. Los resultados de dicha confusión han sido suficientemente analizados: se ha producido un desdibujamiento del papel del docente como enseñante, al considerarlo agente de la aceleración del desarrollo, se confundió el método clínico crítico de la psicología genética con las estrategias de enseñanza, hubo una cierta reducción de los conocimientos matemáticos por enseñarse, al reemplazarse estos por nociones que abordar; se alteró, incluso, el fin social de la escuela, dejando de considerarse como el lugar para la comunicación, difusión y democratización

de una selección de conocimientos socialmente relevantes para instalar la expectativa de acelerar el desarrollo (p. 1).

Es más, argumenta Broitman (2000b) que aún en muchos proyectos, trabajos y prácticas pedagógicas, se mantiene la tendencia a reconocer y validar la construcción de la noción de espacio como una finalidad de la enseñanza, como objeto de trabajo, o como un contenido curricular que hay que abordar con los niños. Conforme con esto, María Emilia Quaranta (2002) señala que, además, los avances en la didáctica de las matemáticas han develado que muchas de las nociones trabajadas por Piaget respecto de la construcción de la noción de espacio hoy son revaloradas y, con ello, los modos de comprender el aprendizaje de las matemáticas, rompiendo ciertos paradigmas instaurados que se relacionan con la idea que “los niños aprenden paso a paso, acumulando adquisiciones, que aprenden lo que el maestro les enseña, tal cual se los enseña y sólo lo que les enseña. [Esta perspectiva] Supone pensar, en cambio, que el aprendizaje procede a través de progresivas aproximaciones parciales” (Quaranta, 1998, p. 16). En este mismo sentido, Fripp y Varela (2012) señalan que:

El docente que ostenta un saber insiste con información geométrica, adelantándose a las necesidades intelectuales de sus alumnos. Presenta información sobre las figuras geométricas, pero sin establecer las relaciones que favorecen la construcción del concepto. Generalmente la presentación ostensiva apela a representaciones únicas de los objetos geométricos, lo que puede provocar otras consecuencias. El alumno puede agregar a las figuras con las que trabaja dos pseudopropiedades geométricas: la posición y la dimensión. Si se considera un concepto geométrico como una terna conceptual, lo estaríamos pensando como una representación, un nombre y un conjunto de atributos. Hacer énfasis en la representación podría conducir a prácticas ostensivas. Hacer énfasis en el nombre podría conducir a prácticas nominalistas (p. 13).

Resultado de muchas de estas reflexiones y de las incursiones contemporáneas preocupadas por la investigación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas enfocadas hacia los procesos del pensamiento matemático y en particular del pensamiento geométrico y espacial, se ha dado cabida a la introducción de propuestas pedagógicas, metodológicas y didácticas, en las que se apuesta por constituir modos distintos y diversos de construcción de la noción

de espacio desde el campo de la matemática. Se integran, en estas propuestas, el desarrollo del pensamiento espacial y la construcción de nociones y conceptos geométricos, que se sustentan en diversos estudios realizados en los que se ha demostrado y reconocido que los niños, cuando ingresan en la escuela, poseen muchas nociones intuitivas sobre el espacio, las cuales los ayudan a solucionar problemas a los que se enfrentan diariamente. Esto hace necesario que, en su inicio, la escuela se preocupe por aprovechar, enriquecer y ampliar esas ideas espaciales, para contribuir al proceso de representación, construcción y aprehensión del espacio y, desde allí, introducir habilidades básicas de matematización (Bishop, 1986, p. 183). Incluso, se ha señalado que los maestros, al privilegiar solo la aritmética, suelen oscurecer la idea según la cual casi todo el mundo –en especial los niños– afrontan con mayor frecuencia problemas espaciales que problemas aritméticos y numéricos en su vida cotidiana (Hemming *et al.*, citados por Delaney, a su vez citado por Dickson, Brown y Gibson, 1984, p. 19).

No obstante, cabe aclarar, como lo han señalado Berthelot y Salin (1994), que los problemas espaciales *no necesariamente* son problemas geométricos, pues mientras que los primeros se resuelven en el espacio físico, los segundos se desenvuelven en “espacios teóricos ideales” en los que se respetan y obedecen ciertas reglas de funcionamiento. Es más, “el estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos implica mucho más que reconocerlas perceptivamente y saber sus nombres; implica conocer, cada vez con mayor profundidad, sus propiedades y tenerlas disponibles para resolver diversos tipos de problemas geométricos. Este aspecto es posible de ser abordado desde el primer ciclo” (Itzcovich y Broitman, 2001, p. 3). En este sentido, Quaranta y Ressia (2009), acudiendo a las ideas planteadas por Berthelot y Salin (1995), sostienen que es posible distinguir entre *conocimientos espaciales* y *geométricos*, y expresan que los primeros refieren a acciones y comunicaciones que conciernen al espacio sensible, mientras que los segundos corresponden a un espacio conceptualizado en el que la validez de las afirmaciones se establece deductiva y no empíricamente, como sucede con los conocimientos espaciales. Más aún, Quaranta y Ressia (2009) afirman que estos autores introducen la denominación de conocimientos “espacio-geométricos”, reconociéndolos como “aquellos que surgen del saber geométrico y se utilizan en la modelización de situaciones espaciales. Por ejemplo, los conocimientos utilizados en las mediciones de magnitudes espaciales (longitudes, superficies, volúmenes)” (pp. 8-9).

Por tanto, en el *ambiente de aprendizaje matemático*, resulta fundamental reconocer y valorar, entre otros campos, la existencia de esas vivencias y expe-

riencias de conocimiento espacial de los niños como un elemento fundamental para la iniciación de su proceso de desarrollo y constitución del pensamiento espacial y geométrico –componentes esenciales del pensamiento matemático– y como apertura al universo simbólico de las matemáticas escolares. Desde esta perspectiva, se enriquece el conocimiento, exploración, orientación, localización y distribución del espacio, mientras que el manejo de información espacial aporta elementos en la solución de problemas que el mundo en el que actúan plantea a los niños. Adicionalmente, señalan Benítez y Cárdenas (2008), otros estudios realizados por Alan Hoffer (1977) han probado que es posible aprehender simultáneamente las *habilidades de percepción visual* (propias del pensamiento espacial) y los *conceptos geométricos*, como una manera de favorecer el proceso de construcción espacial. Ante esto, cabe entonces preguntarse: si los niños poseen diversas nociones y vivencias de conocimiento espacial, “adquisiciones espontáneas, independientes del paso de los niños por la escuela”, como lo enunciaron Berthelot, Salin y Broitman, ¿por qué mantener un esquema de enseñanza centrado en lo aritmético y numérico –claro está, sin desconocer su importancia y la de los otros elementos constitutivos del pensamiento matemático en el trabajo escolar–, dejando de lado lo geométrico y espacial o, en su defecto, reduciéndolo a la apropiación, memorización y reconocimiento de ciertos polígonos y elementos propios de la *geometría euclidiana*?

En este sentido, y en el marco de la *geometría activa*, se plantea la propuesta didáctica **Teselaciones para niños** como alternativa didáctica que integra: *a)* el *mundo de las Teselaciones* (creaciones artísticas que, repetidas sobre el plano, llenan completamente una región sin vacíos ni superpuestos), sus conceptos, significados, características y tipologías; *b)* el desarrollo de las *habilidades de pensamiento espacial* (coordinación visomotriz, coordinación figura-fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, relaciones de percepción espacial, discriminación visual, memoria visual); *c)* la construcción de *nociones y conceptos geométricos (topológicos*, como región, interior, frontera; **euclidianos**, como por ejemplo, línea, vértices, polígonos; **proyectivos** y movimientos propios de la **Geometría de las transformaciones**, relacionados con la rotación, traslación o reflexión, isometrías propias del plano euclideano). Se integran, además, elementos relacionados con la **Teoría de los cuatro colores**¹ y la apropiación de diversos materiales para la creación de teselaciones en tres dimensiones. Así las cosas, **Teselaciones para niños** se configura en una

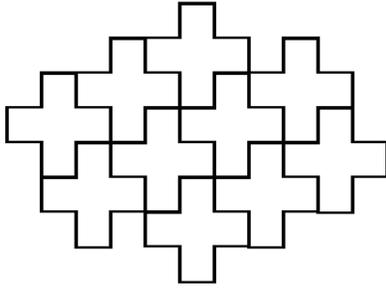
¹ El Teorema de los cuatro colores consiste en colorear un mapa solamente con cuatro colores, cumpliendo con la norma de que dos regiones vecinas no deben tener el mismo color.

apuesta por abordar de un modo distinto la geometría en el aula rezagada en cierta medida en la escuela; se impulsa la idea de que las matemáticas, y con ella la geometría, son una “potente herramienta” para el desarrollo de habilidades del pensamiento, intentando así contrarrestar la manera como se venía adelantando la enseñanza de la geometría en el aula. Es decir, otorgando una “exagerada” atención a la memorización de conceptos y fórmulas geométricos y al reconocimiento y dibujo de ciertos polígonos, entre otros. **Teselaciones para niños** se constituye en una posibilidad de reivindicación de la geometría en el aula, en particular en el ámbito de la educación preescolar y primaria, como una manera distinta de abordar el quehacer geométrico ante la diversidad y riqueza de la geometría contemporánea.

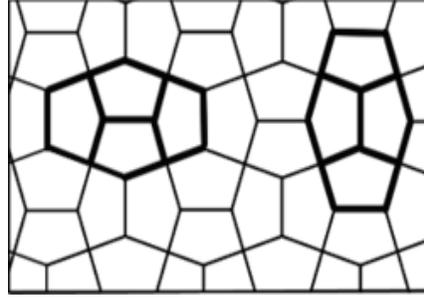
EL MUNDO DE LAS TESELACIONES

Diversas culturas y sociedades a lo largo de la historia se interesaron en el diseño de figuras geométricas que se utilizaron, de manera individual o combinada, para cubrir alguna superficie plana sin dejar espacios. Lo anterior, como una forma de decoración de interiores y exteriores de casas y templos. De este modo, “el diseño de figuras geométricas que individualmente o en combinación cubren una superficie plana sin ‘baches’ se remonta a la Antigüedad. En el valle del Mesopotamia, los sumerios (cerca de 4000 a.C.) construyeron casas y templos decorados con mosaicos con patrones geométricos” (Bonilla, Espinosa, Feria y Martínez, 2007, p. 50). Para lograr cada una de estas creaciones artísticas, muchas culturas emplearon *traslaciones*, *reflexiones* y *rotaciones* de figuras geométricas que se manifestaron en frisos y mosaicos geométricos que requirieron la utilización de diferentes tipos de materiales. Uno de los más grandes exponentes contemporáneos de este tipo de producciones artísticas y del arte matemático es el holandés Maurits Cornelius Escher, quien desarrolló el método de las teselaciones para dividir regularmente la superficie plana. En nuestro mundo, son muy variados los escenarios, expresiones y situaciones en los que se manifiestan las *teselaciones*, como por ejemplo, el embaldosado de pisos, en la Naturaleza, en el arte, en los tejidos de las telas, o en la arquitectura. Ya en el dominio del conocimiento matemático, la palabra *teselación* o *embaldosado* hace referencia al uso repetido de polígonos u otras figuras curvas que llenan completamente una región plana infinita sin vacíos ni superpuestos (Bonilla, Espinosa, Feria y Martínez, 2007, p. 50), “es el cubrimiento completo de un plano

mediante una o más figuras en un patrón repetido, con ninguna figura superpuesta" (Bonilla, Espinosa, Feria y Martínez, 2007, p. 56). Algunos ejemplos son:



<http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teselaciones.htm>

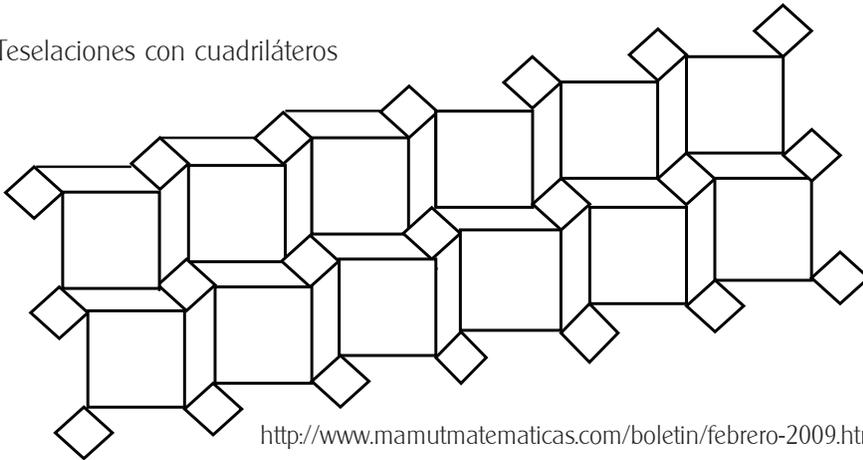


<http://www.elecode lospasos.net/articulo-17910404.html>

TIPOLOGÍAS, SIGNIFICADOS Y CARACTERÍSTICAS DE LAS TESELACIONES

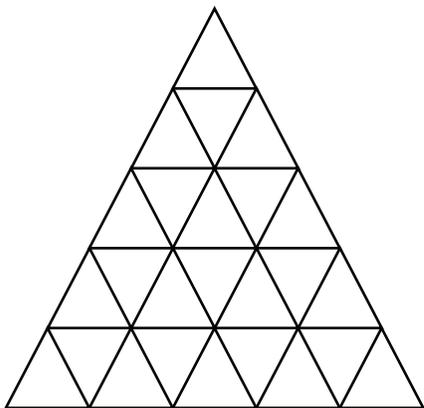
Existen diversas tipologías y maneras de construir las teselaciones. Según los polígonos empleados para su producción, estas reciben su nombre y configuran sus propiedades. Al respecto, las teselaciones se clasifican en **teselaciones poligonales**, cuando es una "teselación formada completamente por polígonos: triángulos, cuadriláteros, hexágonos..." (Bonilla, Espinosa, Feria y Martínez, 2007, p. 57), como es el caso de la siguiente:

Teselaciones con cuadriláteros

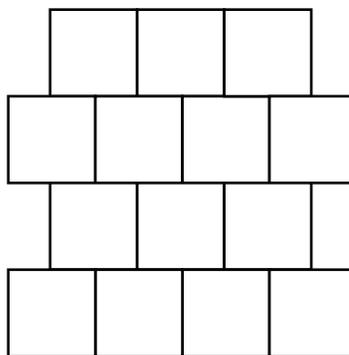


<http://www.mamutmatematicas.com/boletin/febrero-2009.htm>

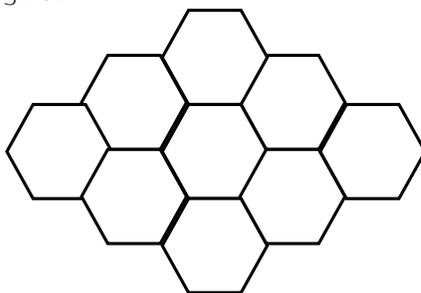
También existen las **teselaciones regulares**, que se construyen con un solo tipo de *polígonos regulares*, es decir, con polígonos cuyos lados y ángulos tienen la misma medida. “Una teselación es regular si está formada por polígonos regulares congruentes. Solo son tres los polígonos regulares que pueden formar teselaciones regulares. Estos son: 1. un triángulo equilátero; 2. un cuadrado; y 3. un hexágono regular” (Bonilla, Espinosa, Feria y Martínez, 2007, p. 58).



Teselación con triángulos

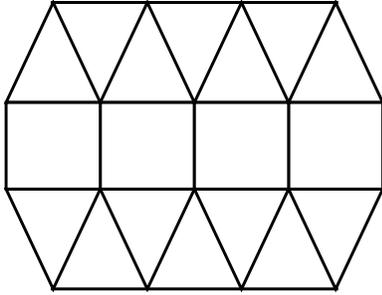


Teselación con cuadrados

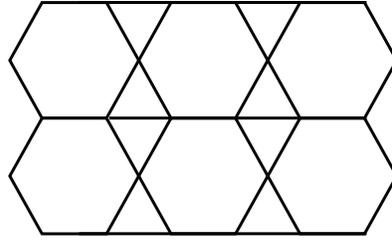


Teselaciones con hexágonos

Las teselaciones también pueden ser **semirregulares**; son las que “combinan dos o más polígonos regulares para teselar un plano” (Bonilla, Espinosa, Feria y Martínez, 2007, p. 59), como por ejemplo:

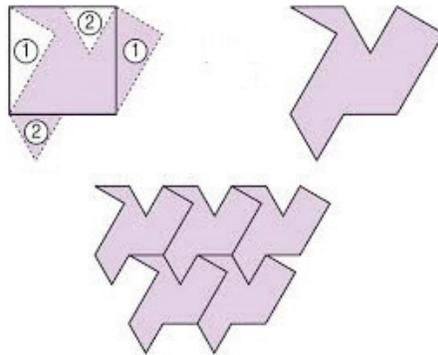


Combinación de cuadrados y triángulos



Combinación de triángulos equiláteros y hexágonos

Además, las teselaciones pueden ser **poligonales no regulares**; son aquellas que se desprenden de un polígono regular y que, por efecto de la técnica del *mordisco*, que consiste en cortar en uno de los lados del polígono algún tipo de figura (como se muestra en la figura), mediante *deslizamientos*, *giros* o reflexiones se ubica en el lado opuesto al corte, dando origen a la tesela o loseta.



<http://traselastrodeecher.blogspot.com/2010/08/teselaciones.html>

EL PENSAMIENTO ESPACIAL Y GEOMÉTRICO: COMPONENTES DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Una de las tendencias actuales frente al quehacer matemático en las instituciones educativas, afirman Benítez y Cárdenas (2008), es el desarrollo del **pensamiento matemático** de los niños desde temprana edad, como una manera de reorientar las prácticas pedagógicas, actividades didácticas, metodologías y, en general, todo lo que acontece en el ambiente de aprendizaje matemático. Con este propósito, se pretende trascender hacia “una enseñanza que se preocupe por los procesos de pensamiento propios de la matemática y menos por los contenidos” (Sánchez y Bonilla, 1999, p. 9). Pero, al mismo tiempo, se busca trastocar la imagen de la matemática escolar como un saber acabado, aburrido, de estructura rígida y “consistente, sin contradicciones y secuencial, en donde un concepto es prerequisite del siguiente [en el que] lo importante es establecer leyes o algoritmos para aplicar y solucionar problemas similares, [dejando] poca opción de crear, y donde las satisfacciones se presentan solo cuando se coincide en los resultados” (Malagón, 1988, p. 192). Entre las razones que han influido en la persistencia de esta tendencia escolar y que parece una idea fija de la pedagogía y del imaginario colectivo de los maestros, mencionan Benítez y Cárdenas (2008), es la creencia de que los niños *no están capacitados para pensar de manera abstracta antes de una edad determinada* y que su pensamiento es el producto del desarrollo de un estadio evolutivo, lo que circunscribe su pensar en una serie de etapas que los niños deben alcanzar y superar (véase Gattegno, 1964, y Enzensberger, 2001). Es más, Broitman (2000b) argumenta que en la escuela se mantiene el supuesto de que los niños deben atravesar ciertas etapas que van de lo concreto a lo gráfico y desde este a lo abstracto, lo que ha desembocado en la permanencia de “la confusión de los aprendizajes espaciales ligados a la matemática con aquellos ligados al movimiento o a los desplazamientos. El supuesto orden produjo la organización en etapas de la enseñanza: primero la ‘vivencia’ del espacio, luego su representación gráfica y finalmente su abstracción” (p. 28).

De acuerdo con lo anterior, sustentan Benítez y Cárdenas (2008), uno de los componentes fundamentales del *pensamiento matemático* es el *pensamiento espacial*. Este pensamiento se considera como “la facultad de reconocer y discriminar estímulos visuales e interpretarlos asociándolos con experiencias anteriores” (Frostig, 1978, p. 7), así como una posibilidad de desarrollar habilidades de establecer relaciones espaciales para organizar, analizar y sistematizar

los conocimientos espaciales (Sánchez, y Bonilla, 1999, p. 10). Esto contribuye a un mejor manejo, ubicación, orientación y localización espaciales, especialmente de los niños. Con esta facultad están relacionadas siete habilidades: la coordinación visomotriz, la percepción figura-fondo, la constancia perceptual, la percepción de posición en el espacio, la percepción de las relaciones espaciales (propuestas por Frostig, 1978, y Horne, 1978), la discriminación visual y la memoria visual (planteadas por Hoffer, 1967), las cuales se pueden desarrollar en contextos geométricos.

LAS HABILIDADES DE PERCEPCIÓN ESPACIAL

Diversos estudios –entre los que se cuenta el de Feria *et al.* (2006)² han demostrado que, para lograr el desarrollo del pensamiento espacial de los niños, es importante enfrentarlos a actividades centradas en relaciones geométricas, en la dirección, orientación y perspectiva de los objetos en el espacio, las formas y tamaños relativos de las figuras y objetos. En este sentido, uno de los aspectos que se desarrollan y mejoran a través de **Teselaciones para niños** son las habilidades de percepción geométrica y espacial.

Según Frostig, Hoffer y Horne, las habilidades de percepción visual son: la **coordinación visomotriz**, que se relaciona con la “habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. Los niños que tienen dificultad con las habilidades motoras simples y los movimientos tienen dificultad para pensar en ideas diferentes cuando se concentran en la tarea que los ocupa” (Feria *et al.*, 2006, p. 26). La percepción **figura-fondo** es el acto visual de identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo). Cuando, por ejemplo, nos vemos en la necesidad de enchufar un electrodoméstico, acudimos a la percepción figura-fondo para realizar con éxito dicha actividad. En este caso, la pared donde se ubica el enchufe es el fondo y el enchufe, la figura. Por otra parte, se encuentra la **constancia perceptual (constancia figura y tamaño)**, que es la habilidad para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes, tales como el tamaño y la forma, a pesar de la variabilidad de sus impresiones cuando son observadas desde diferentes puntos de vista. La **percepción de la posición en el espacio**, que es la “capacidad para determinar la relación de un objeto con relación a otro y al observador” (Feria *et al.*, 2006, p. 28). Por su

² Marco Feria *et al.* (2006), *Percepción espacial y geometría intuitiva. Una puerta de entrada al aprendizaje significativo de la geometría*, Universidad Externado de Colombia, Facultad de Educación, Bogotá.

lado, aparece, la percepción de relaciones espaciales, que se relaciona con la “destreza para ver dos o más objetos en relación con uno mismo o entre ellos, y está estrechamente ligada en algunas tareas con la percepción de la posición en el espacio” (Feria *et al.*, 2006, p. 28). Y por último, se encuentran la **discriminación visual**, que hace referencia a la “disposición para distinguir semejanzas y diferencias entre los objetos (Hoffer, 1977) y la **memoria visual**, que implica la “habilidad para recordar con precisión un objeto que no está más a la vista y luego relacionar sus características con otros objetos que estén ya sea a la vista o no” (Hoffer, 1977).

LOS NIVELES DE DESARROLLO DE VAN HIELE

Teselaciones para niños toma también como marco de referencia el **Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele**, que describe los niveles de razonamiento de los niños en cuanto a la geometría y las maneras como podían los docentes colaborar con ellos para mejorar su pensamiento geométrico-espacial. Sin embargo, cabe señalar que el que el trabajo se sustente en esta perspectiva no significa que no se reconozca que el modelo es en sí esquemático, secuencial y sistemático, con lo que, además, se pretende evidenciar que el trabajo alrededor de los procesos geométricos no sigue un modelo jerárquico y organizado por diferentes niveles, como lo sustenta Raymond Duval, entre otros; por tanto, el modelo sirve como marco para orientar las acciones y el trabajo en general, más no se convierte en la línea de base que hay que seguir taxativamente. Con ello, también se quiere considerar, como lo señala Patricia Sadovsky (1998), citada por Fripp y Varela (2012, p. 11), que “hay un modo de estudiar geometría que permite que los alumnos desarrollen un modo de pensar, propio de la matemática, que solo existe si la escuela lo provoca y al que creemos que todos los alumnos tienen derecho a acceder”. Ahora bien, según Gutiérrez y Jaime (1991, p. 49), este modelo de razonamiento geométrico fue propuesto por los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, que en los años 1950 eran profesores de enseñanza secundaria en Holanda. Dicho modelo:

...está formado por dos partes: la primera es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento visual de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades

de Ciencias; estos tipos de razonamiento se denominan *niveles de razonamiento*. La segunda parte es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos sean capaces de acceder al nivel de razonamiento superior al que tienen actualmente; se trata de las fases de aprendizaje (Gutiérrez y Jaime, 1991, p. 50).

Los niveles de razonamiento geométrico propuestos por los profesores Van Hiele son: el **nivel 1**, de **reconocimiento**, en el que el niño “percibe los objetos en su totalidad y como unidades. Describe los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica con base en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos. No reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos” (Gutiérrez y Jaime, 1991, p. 50). El **nivel 2**, de **análisis**, según el cual el niño “percibe los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas. Puede describir los objetos de manera informal mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas. Deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación” (Gutiérrez y Jaime, 1991, pp. 50-51). El **nivel 3**, de **clasificación**, en el que el niño “realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas y por medio de razonamiento informal. Describe las figuras de manera formal [...] Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de manera aislada, pero no comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración. No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por este motivo tampoco comprende la estructura axiomática de las Matemáticas” (Gutiérrez y Jaime, 1991, p. 50). El **nivel 4**, de **deducción**, en el que el niño está en capacidad de “...realizar razonamientos lógicos formales. Comprende la estructura axiomática de las Matemáticas. Acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.)” (Gutiérrez y Jaime, 1991, p. 51). Cabe agregar que el modelo de Van Hiele se compone también de varias fases de aprendizaje:

- **Información.** Es el momento en el que el profesor informa a los niños acerca de las temáticas y problemas que se van a tratar de resolver, en el que, además, es factible reconocer las vivencias de conocimiento de los niños o los *conceptos previos* que posee para enriquecerlos o transformarlos definitivamente.

- **Orientación dirigida.** Es el instante en el que los niños exploran las temáticas y problemas por resolver mediante el material suministrado por el maestro y que favorece el aprendizaje y la construcción de nociones, conceptos y propiedades de los campos de estudio geométrico.
- **Explicitación.** Es el momento de diálogo entre los niños, de interrelación subjetiva, en el que conviven, confrontan sus puntos de vista, deliberan, comparten hallazgos (trabajo cooperativo) que, en ocasiones, exige la intervención del maestro (trabajo colaborativo).
- **Orientación libre.** Es el momento en el que los niños aplican sus conocimientos construidos a la resolución de nuevas situaciones geométricas, su finalidad es que “profundicen en dichos conocimientos, se afiancen en su uso, relacionen unos con otros y descubran y aprendan algunas propiedades que, por su complejidad, no pueden ser estudiadas antes” (Gutiérrez y Jaime, 1991, p. 55).
- **Integración.** Es un instante en el que el maestro recoge todos los elementos trabajados en la clase a fin de fomentar “comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ninguna novedad al estudiante: Solamente deben ser una acumulación de las cosas que ya conoce” (Gutiérrez y Jaime, 1991, p. 55).

EN CUANTO A LA METODOLOGÍA

Teselaciones para niños es una propuesta didáctica que se configuró en tres momentos. Uno preliminar, **el diseño de la propuesta**, de *preparación*, en el que se trazó la ruta de trabajo y se estructuró la propuesta teniendo en cuenta la necesidad de una *apropiación conceptual* que se encaminó al rastreo teórico alrededor del significado, características, tipologías y beneficios de las teselaciones en la escuela, como también a la caracterización de los *niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele*, marco que determina los avances y aprendizajes geométricos de los niños. Durante este momento, se definió y planteó el *problema* a trabajar con la estrategia, se trazaron los *objetivos*, se definieron los *criterios de evaluación* de los procesos de aprendizaje de los niños, se justificó el trabajo, se formularon y elaboraron los conocimientos por construir en el aula (temas, contenidos, nociones y conceptos relacionados con las teselaciones). Además, se diseñó la metodología, escogiendo la estrategia más pertinente para lograr lo planteado, lo que se tradujo en la determinación del bosquejo de una

Secuencia de unidades didácticas *coherentemente estructuradas*, factibles de ser abordadas en cualquier ciclo, grado o curso escolar. La estructura de cada una de estas unidades didácticas está enmarcada por: el planteamiento de unas **temáticas** por abordar; la definición de unas **intenciones pedagógicas**; la enunciación de las **habilidades espaciales** por desarrollar o mejorar; la formulación de las **nociones y conceptos geométricos** por construir por los niños; los **niveles de razonamiento geométrico** por privilegiar; la descripción de las **actividades didácticas** por realizar; los **recursos didácticos** necesarios para adelantar el trabajo, así como los **criterios de evaluación** emergentes de los niveles de desarrollo geométrico y de las habilidades espaciales. En este sentido, las unidades didácticas planteadas fueron: Unidad didáctica 1: *Iniciación y exploración del mundo de las teselaciones*; Unidad didáctica 2: *Introducción a las teselaciones*; Unidad didáctica 3: *Características de las teselaciones*; Unidad didáctica 4: *Las teselaciones y sus otras tipologías* y Unidad didáctica 5: *Del mundo de las teselaciones con polígonos a los poliedros*.

Con la unidad didáctica **Iniciación y exploración del mundo de las teselaciones**, se busca que los niños ingresen a un nivel *exploratorio* del mundo de las teselaciones; es recomendada para el ciclo inicial (lo cual no significa que no se pueda abordar en otro ciclo o grado); privilegia el desarrollo del nivel de razonamiento geométrico (propuesto por Van Hiele), de **reconocimiento** (esto no significa tampoco que no se puedan trabajar otros niveles de desarrollo geométrico). Se plantean, como **criterios de evaluación y aprendizaje**, por ejemplo los siguientes:

- Identifica que, a partir de los cuadrados y otros polígonos regulares, se pueden formar teselaciones.
- Reconoce que en su vida diaria se emplean las teselaciones en diversos escenarios.
- Emplea un vocabulario elemental en relación con las teselaciones, identifica cuadrados, rombos, rectángulos, triángulos, etc. en las teselaciones

Para lograr esto, se propone una serie de **temáticas** relacionadas con la definición del concepto de teselaciones y la observación de las teselaciones en el mundo que nos rodea, para lo cual se plantean **actividades didácticas** como, por ejemplo, calcar y dibujar teselaciones del entorno. Con esto se pretende desarrollar y mejorar las **habilidades de percepción visual** que se reflejan cuando los niños:

- Identifican teselaciones en imágenes, fotografías y cuadros de arte.
- Dibujan teselaciones con plantillas, reconociendo ciertos componentes y características.
- Copian teselaciones sobre retículas, observando cuadros, fotografías e imágenes.

Todo lo anterior se integra a la construcción de **nociones** y **conceptos geométricos**, por ejemplo: **topológicos** (como abierto, cerrado, adentro y afuera), **euclidianos** (como polígono, polígonos regulares e irregulares); **proyectivos** y de la **Geometría de las transformaciones** (relacionados con los movimientos efectuados a partir de deslizamientos o traslaciones sobre el plano). La unidad didáctica **Introducción a las teselaciones**, en un nivel de *familiarización* y *afianzamiento* y recomendada para el ciclo inicial y ciclo dos, privilegia el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de **reconocimiento** y **análisis** en la medida en que los niños, por ejemplo:

- Describen ciertas características de los polígonos que constituyen las teselaciones.
- Identifican las particularidades de los polígonos que conforman las teselaciones.
- Colorean teselaciones regulares y poligonales empleando la Teoría de los cuatro colores

Para ello, se propuso una serie de **temáticas** relacionadas con las *teselaciones poligonales y regulares* y **actividades didácticas**, con las que de manera articulada se pretende desarrollar y mejorar las **habilidades de percepción visual** que se reflejan cuando el niño, por ejemplo:

- Reconoce ciertas características de las teselaciones poligonales y regulares.
- Hace dibujos de teselaciones regulares y poligonales, siguiendo patrones preestablecidos sobre retículas.
- Colorea teselaciones regulares, empleando la Teoría de los cuatro colores.
- Realiza teselaciones, empleando modelos preestablecidos y movimientos de reflexión sobre el plano.

Lo anterior se complementa con el aprendizaje de **nociones y conceptos geométricos topológicos** (como región, interior, exterior y frontera); **euclidianos** (relacionados con la idea de cuadriláteros y triángulos); **proyectivos** y de la **Geometría de las transformaciones** (relacionados con los movimientos efectuados a partir de reflexiones). La unidad didáctica **Características de las teselaciones**, en un nivel de *análisis y conceptualización* y recomendada para los ciclos dos y tres, privilegia el desarrollo del nivel geométrico de **reconocimiento y análisis** en la medida en que los niños, por ejemplo, están en capacidad de:

- Identificar algunas propiedades o cualidades de los polígonos empleados para dibujar las teselaciones semirregulares.
- Diferenciar algunas tipologías de las teselaciones.
- Diferenciar las propiedades de una frontera conexa y una inconexa en una teselación semirregular.

Se buscó lograr lo anterior mediante la proposición de una serie de **temáticas** relacionadas con las *teselaciones semirregulares* y **actividades didácticas** con las que, de manera articulada, se pretendió desarrollar y mejorar las **habilidades de percepción visual** que se evidencian cuando los niños:

- Perciben las propiedades de los polígonos empleados para dibujar una teselación semirregular.
- Describen adecuadamente las propiedades de los polígonos que constituyen una teselación semirregular.
- Mencionan los polígonos que componen una teselación semirregular.
- Realizan teselaciones semirregulares empleando movimientos de rotación sobre el plano.

Con lo anterior se plantearon **nociones y conceptos geométricos** como son: **topológicos** (fronteras conexas e inconexas), **euclidianos** (área y perímetro, polígonos: hexágonos, pentágonos), **proyectivos** y algunos de la **Geometría de las transformaciones** (relacionados con los movimientos efectuados a partir de giros o rotaciones sobre el plano). Por su parte, la unidad didáctica, **Las teselaciones y sus otras tipologías**, en un nivel de *clasificación geométrica* y recomendada para el ciclo tres, privilegia el desarrollo del nivel geométrico de **análisis y clasificación** en la medida en que el niño:

- Clasifica cuadriláteros y triángulos con base en sus propiedades.
- Clasifica las distintas formas de realizar teselaciones.
- Reconoce y diferencia por sus características las **teselaciones poligonales no regulares**.

A través de la proposición de una serie de **temáticas** relacionadas con las *teselaciones no poligonales* y **actividades didácticas**, se pretendió alcanzar este objetivo, además de que, de manera articulada, con ellas se pretende también desarrollar y mejorar las **habilidades de percepción visual**, reflejadas en que el niño

- Dibuja teselaciones no poligonales y las diferencia de otras formas de teselaciones.
- Comprende que las propiedades son una condición para diferenciar teselaciones.
- Dibuja y propone la elaboración de teselaciones poligonales no regulares, empleando modelos preestablecidos sobre retículas.

Como complemento, se sugieren **nociones** y **conceptos geométricos topológicos** (puntos interiores, exteriores y puntos frontera), **euclidianos** (ángulos, otros polígonos como por ejemplo, heptágonos, octágonos, nonágonos, decágonos), **proyectivos** y de la **Geometría de las transformaciones** (que combinan los distintos movimientos en el plano). Por último, la unidad didáctica **Del mundo de las teselaciones con polígonos a los poliedros**, en un nivel de *definición* y *relación* y recomendada para el ciclo tres, privilegia el desarrollo del nivel geométrico de **clasificación** en la medida en que el niño:

- Clasifica las distintas formas de Teselaciones presentadas en imágenes preestablecidas.
- Clasifica teselaciones regulares, poligonales o semirregulares empleado poliedros.
- Clasifica por sus características las diferentes formas de teselar el plano.

Se propone, adicionalmente, una serie de **temáticas** relacionadas con el mundo de los poliedros y **actividades didácticas** con las que de manera articulada se pretende desarrollar y mejorar las **habilidades de percepción visual**, que se reflejan cuando el niño:

- Dados ciertos polígonos es capaz de construir distintas tipologías de teselaciones.
- Define cada una de las tipologías de teselaciones existentes.
- Usa las propiedades de las teselaciones y los polígonos trabajados para definirlos.
- Realizar giros, deslizamientos y reflexiones para elaborar teselaciones sobre el plano.

Estas formulaciones, unidas a **nociones** y **conceptos geométricos (topológicos: agujeros y laberintos; euclidianos: poliedros regulares; proyectivos** y algunos relacionados con la **Geometría de las transformaciones**, como deslizamientos, giros y reflexiones de poliedros regulares), constituyen esta unidad didáctica.

Un **segundo momento**, el de la implementación en el aula, los niños se enfrentan a: la apropiación conceptual que sustenta cada unidad didáctica, a la elaboración de las actividades didácticas (producción de modelos de teselaciones), a la interacción con el otro y a la evaluación de sus procesos de aprendizaje geométrico acordes con un nivel o niveles de desarrollo geométrico específicos. Lo anterior implica el manejo de *lenguaje geométrico*, expresado en el empleo de términos geométricos, su definición y aplicación, que pueden tener características muy diferentes según el tipo de teselación; concepto geométrico por apropiación o habilidad espacial por mejorar o desarrollar; objetivos, etc. Durante la tarea, los niños pueden utilizar el material elaborado durante la fase de preparación. Un **tercer momento**, el de **evaluación** y ajustes, en el que se llevan a cabo los procesos evaluativos de manera formativa y continua, basados, en primer lugar, en la adquisición de los objetivos planteados, que son los criterios que habrán guiado la producción. Durante este momento, el maestro registra en su cuaderno de notas o diario de campo los avances y dificultades en los aprendizajes de los niños; además, consigna lo referido en los ajustes requeridos en la propia propuesta en relación con los contenidos, actividades didácticas, la forma de organización de los niños en el aula, los criterios de evaluación y las metodologías empleadas.

IMPACTOS E IMPLICACIONES EN EL AULA

Múltiples han sido las manifestaciones y trabajos realizados por los niños que permiten observar los modos de apropiación conceptual respecto al mundo de las teselaciones, que no se han quedado solamente en la producción artística, sino que además han permitido evidenciar la materialización y construcción de nociones y conceptos geométricos y el desarrollo de sus habilidades visuales. Precisamente, como lo señalan Quaranta y Ressia (2009), la distinción entre los contenidos espaciales y geométricos permite enfrentar a los niños a la construcción de “conocimientos relativos a la orientación y localización en el espacio, la representación de posiciones y desplazamientos propios y de los objetos con la construcción de sistemas de referencias. Esto implica la producción e interpretación de representaciones gráficas del plano y los conocimientos vinculados a los cambios de puntos de vista” (p. 9) y a la producción de “conocimientos relativos a las figuras geométricas y cuerpos. También la exploración y el análisis de formas geométricas, la observación y la descripción de sus características a partir de las relaciones entre unas y otras, la reproducción, representación y construcción de figuras” (p. 9).³

Además de lo anterior, **Teselaciones para niños** es un intento por *curricularizar* (incluir nuevos saberes en los planes de estudio y currículos escolares a fin de adelantar procesos de formación) un nuevo saber escolar matemático y artístico, con el que se pretende: generar una serie de producciones artísticas, desarrollar algunas habilidades matemáticas, construir algunos conceptos geométricos, compartir algunas vivencias de conocimiento, tanto del docente como de los niños, poner en evidencia las posibilidades de desarrollo del pensamiento geométrico y espacial, así como la creatividad. Todo lo anterior intenta incorporar y formar en la escuela la idea de un niño distinto, que piensa matemáticamente desde lo geométrico y espacial, que ingresa con múltiples nociones espaciales que se pueden mejorar y desarrollar en el contexto escolar y que le servirán para enfrentar los retos de la sociedad contemporánea. Con esto, se ha logrado la descripción y exploración de las condiciones del surgimiento (conjunto de prácticas singulares que “se refiere[n] a lo que los hombres *realmente hacen cuando hablan o actúan*” (Castro, 2010, p. 28) de la experiencia pedagógica

³ “El primero de estos dos ejes hace referencia a una serie de conocimientos necesarios para el dominio de las relaciones espaciales, tales como la orientación en el espacio, la ubicación de un objeto o persona, la organización de desplazamientos, la comunicación de posiciones y desplazamientos, la producción e interpretación de representaciones planas del espacio. El segundo hace referencia a las propiedades vinculadas a las formas geométricas (figuras y cuerpos)” (Quaranta y Ressia, 2009, p. 9).

Teselaciones para niños, tanto desde el exterior como desde su interior, como una nueva práctica pedagógica que irrumpe con la intención de transfigurar las prácticas de enseñanza de la matemática instaurada en la escuela. En cuanto a los resultados e impactos, se ha logrado la sistematización de la experiencia con el apoyo de entidades como el Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico (IDEP) y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, lo cual ha favorecido la consolidación e institucionalización de la experiencia pedagógica; sin embargo, el ejercicio allí realizado permitió ver poco **Teselaciones para niños** desde su interior, pues la preocupación se centró en lo que posibilitó su surgimiento en la escuela como un modo de actuación distinto frente a la enseñanza de la geometría, como también, el reconocimiento local, la consolidación de un equipo de maestros preocupados por la enseñanza de la matemática, la gestión de acuerdos con fundaciones y ONG, como la Fundación Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano (CINDE).

Adicional a esto, se logró reconocer la experiencia pedagógica como una alternativa didáctica que incursiona en la escuela para pensar de otro modo la matemática escolar y que, así como hoy irrumpe para institucionalizarse, más adelante puede transformarse o simplemente desaparecer. Es más, la participación en el Proyecto de Formación Docente “Maestros que aprenden de maestros” se ha visto fortalecida por el diseño de un blog (Tras el rastro de Escher) complementado con una página <http://ambientematematicoes.wix.com/teselaciones> para interactuar a través de las TIC con la comunidad educativa.

En cuanto a los resultados, se ha observado un mejor desempeño de los niños en varias vertientes: para solucionar problemas de localización, orientación y ubicación espacial, en el nivel del *microespacio* (que corresponde a esa parte del espacio cercano de los niños, que contiene objetos factibles de ser manipulados y en el que se ubica y orienta); en la representación de las distintas posiciones, movimientos y desplazamientos propios y de los objetos con la construcción de referentes de ubicación, conocimiento de las figuras geométricas, sus propiedades y característica; en mejores desempeños en las evaluaciones de competencias (saber), en particular con lo geométrico, de representación y aprehensión del espacio a los que se enfrentan en su cotidiano vivir; en mejor manejo del renglón del cuaderno en el caso de los más pequeños; en un favorable reconocimiento, análisis y clasificación de los conceptos geométricos trabajados; en una apropiación conceptual manifiesta en sus expresiones del lenguaje y en un mejoramiento en la calidad en sus expresiones artísticas.

Del mismo modo, se avanzó en la apropiación y reconocimiento institucional

y por parte de otros maestros de la propuesta pedagógica y didáctica. Esto se ve reflejado en que cada año son más los maestros de distintas instituciones de la ciudad que se vinculan a la propuesta para enriquecerla y complementarla con sus vivencias de conocimiento en el aula, lo que ha beneficiado la reflexión acerca de las prácticas de enseñanza de la matemática en la escuela.

REFLEXIONES FINALES

La experiencia **Teselaciones para niños** representa una alternativa en la educación matemática en preescolar y primaria básica (niños entre los 5 y 11 años de edad). Esta propuesta se aleja del privilegio de lo numérico y los algoritmos de las operaciones básicas, pero no desconoce su importancia en el proceso de desarrollo del pensamiento matemático de los niños, y que trasciende esa mirada convencional de la matemática en la escuela. El trabajo se convierte en una posibilidad frente a la enseñanza de la matemática escolar que permite pensar que es posible hablar de la integración de otras áreas y conocimientos en la enseñanza de la matemática misma y, en esa medida, explorar otras rutas de trabajo que favorezcan el desarrollo y mejoramiento de las habilidades espaciales de los niños. Además, permite validar la idea de que es factible desarrollar las habilidades de percepción visual y construir conocimientos geométricos. De este mismo modo, **Teselaciones para niños** ha permitido el desarrollo y mejoramiento del pensamiento espacial y geométrico de los niños y niñas, en la medida en que se han apropiado de un vocabulario geométrico, y de nociones y conceptos y habilidades espaciales. Esto ha permitido, además, el reconocimiento, aceptación y apropiación de la experiencia por parte de los colegas de la institución, en el marco del desarrollo del pensamiento espacial y geométrico mediante actividades enfocadas en la construcción de las teselaciones. Es más, ha favorecido la valoración de la importancia del pensamiento espacial y geométrico no solo como una ruta para solucionar problemas de localización, orientación, ubicación espaciales o de representación y aprehensión del espacio a los que se enfrentan los niños en su vivir cotidiano, sino que la experiencia vislumbra cómo puede apoyarse la solución de muchos otros problemas académicos, por ejemplo, de escritura y lectura, que al parecer tienen su origen en la poca atención que se le ha dedicado en la escuela inicial a esta forma de pensamiento por privilegiar otras cuestiones que muchos docentes consideran como lo más importante en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Benítez, M. L y O. L. Cárdenas (2008), *La enseñanza de la topología a través de la cartografía*, recuperado de: <http://esrlc.com.ve/ibero2008/iberoamerica/files/CARDENAS%20OSCAR.pdf>
- Bonilla Jaramillo, S., L. B. Espinosa, M. A. Feria Uribe y N. Martínez Álvarez (2006), *Percepción espacial y geometría intuitiva. Propuesta de unidades didácticas*, Universidad Externado de Colombia, Facultad de Ciencias de la Educación.
- _____ (2000a), "Reflexiones en torno a la enseñanza del espacio", *0 a 5. La educación en los primeros años*, año III, núm. 22, marzo, Buenos Aires, Ediciones Novedades Educativas, pp. 24-41. Tema: estrategias didácticas para favorecer las nociones del espacio, recuperado de: [http://www.e-educar.org/DEP/lecturas/sesion%2014/LEC%2007%20EL%20ESPACIO%20\(2\).pdf](http://www.e-educar.org/DEP/lecturas/sesion%2014/LEC%2007%20EL%20ESPACIO%20(2).pdf)
- Broitman, C. (2000b), "Reflexiones en torno a la enseñanza del espacio", *Educación Matemática. Propuestas de trabajo, experiencias y reflexiones. La educación en los primeros años*, Ediciones Novedades Educativas, recuperado de: http://books.google.com.co/books?id=3C1NH2xedbgCy_pg=PA41y_lpg=PA41y_dq=BRUN+J+GEOMETRIAY_source=bly_ots=4zuQkVvaNRy_sig=jv8M2amnvdhyHHzWzVNUjgeOtV4y_hl=esy_sa=Xy_ei=yKK3UvzJlMfKQfD8YGoDQyved=0CDcQ6AEwAg#v=onepagey_q=BRUN%20J%20GEOMETRIAY_f=false
- Castro-Gómez, S. (2010), *Historia de la gubernamentalidad. Razón de Estado, liberalismo y neoliberalismo en Michel Foucault*, Bogotá, Siglo del Hombre Editores.
- Dickson, L, M. Brown y O. Gibson (1991), *El aprendizaje de las matemáticas*, Ministerio de Educación y Ciencia, Barcelona, España, Labor.
- Feria Uribe, M. A., L. B. Espinosa y N. Martínez Álvarez (2006), *Percepción espacial y geometría intuitiva. Una puerta de entrada al aprendizaje significativo de la geometría*, Universidad Externado de Colombia, Facultad de Ciencias de la Educación.
- Fripp, A., y C. Varela (2012), "Pensar geoméricamente", 4º Congreso Uruguayo de Educación Matemática, recuperado de: <http://semur.edu.uy/curem/actas/procesadas1348011188/actas.pdf>
- Frostig, M. (1978), *Figuras y formas. Programa para el desarrollo de la percepción visual*, Buenos Aires, Médica Panamericana.
- Gattegno, C. (1964), *El material para la enseñanza de las matemáticas*, Madrid, Aguilar.
- Gutiérrez, Á., y A. Jaime (1991), "El modelo de razonamiento de Van Hiele como

- marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los giros”, *Educación Matemática*, vol. 3, agosto, México, Editorial Iberoamérica.
- Iltzcovich, H., y C. Broitman (2001), “Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en EGB”, Documento núm. 3, Buenos Aires, Argentina, Recuperado de: <http://www.uruguayeduca.edu.uy/UserFiles/P0001%5CFile%5CIltzcovich%20y%20Broitman%20-%20Aportes%20did%3%A1cticos%20para%20la%20ense%C3%B1anza%20de%20la%20geometr%C3%ADa...PDF>
- Malagón, J. (1998), “Clase de Matemáticas”, en *La construcción de la confianza. Una experiencia en proyectos de aula*, Bogotá, CEPE-IDEP.
- Quaranta, M. E. (1998), “¿Qué entendemos hoy por “hacer matemática en el Nivel Inicial”?”, *Educación Matemática. Los nuevos aportes didácticos para planificar y analizar actividades en el Nivel Inicial*, Novedades Educativas, Recuperado de: http://books.google.com.co/books?id=w4OolfHYodoCy_pg=PA18y_lpg=PA18y_dq=brun+jean+didactica+de+las+matem%C3%A1ticasy_source=bly_ots=Db7LmB9sGYy_sig=dNWS9bDIBiouO287SFv3QM_FyWAYy_hl=esy_sa=Xy_ei=e6SoUsHrCY-LkAeDtIG4BQy_ved=0CEAQ6AEwAw#v=onepagey_q=brun%20jean%20didactica%20de%20las%20matem%C3%A1ticasy_f=false
- _____ (2002), *Orientaciones didácticas para el Nivel Inicial*, Buenos Aires, Dirección General de Cultura y Educación.
- Quaranta, M. E., y B. Ressler de Moreno (2009), *La enseñanza de la geometría en el jardín de infantes*, Buenos Aires (Serie Desarrollo Curricular), recuperado de: http://www.gpdmatemática.org.ar/publicaciones/geometria_inicial.pdf
- Sánchez, N., y M. Bonilla (1998), *Matemáticas escolares asistidas por computador. Actividades en el aula. Módulo 3, Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas*, Bogotá, Universidad Distrital.
- Sauvy, J., y S. Sauvy (1980), *El niño ante el espacio: iniciación a la topología intuitiva-de la rayuela a los laberintos*, Madrid, Ed. Pablo del Río.
- Vasco, C. E. (1998), *Pensamiento espacial y sistemas geométricos*, en: aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/mod/.../view.php?...true...

DATOS DE LOS AUTORES

Sonia Milena Uribe Garzón

Colegio Entre Nubes S. O. IED

sonia.smug80@gmail.com

Óscar Leonardo Cárdenas Forero

Colegio Entre Nubes S. O. IED

osle1972@gmail.com

James Frank Becerra Martínez

Colegio Simón Rodríguez IED

jafra8@hotmail.com